



$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

В. І. Жданов, С. М. Пономаренко, В. Б. Долгошей

Класична електродинаміка Мікроскопічна теорія

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$
$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0.$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. І. Жданов, С. М. Пономаренко, В. Б. Долгошей

Класична електродинаміка

Мікроскопічна теорія

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як
навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за
спеціальностями Е6 Прикладна фізика та наноматеріали, F1
Прикладна математика*

Видання друге, виправлене та доповнене

КИЇВ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2026

УДК 537

Ж 42

Рецензенти: **В. В. Куліш**, д.ф.-м.н., професор кафедри загальної фізики фізико-метематичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського.

С. Й. Вільчинський, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри квантової теорії поля та космофізики.

Відповідальний редактор: **С. А. Смирнов**, к.ф.-м.н., доцент, голова методичної ради НН ФТІ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 3 від 12.12.2026 р.) за поданням Вченої ради Навчально-наукового Фізико-технічного інституту (протокол № 14 від 24.11.2026 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Жданов Валерій Іванович, д.ф.-м.н., професор
Пономаренко Сергій Миколайович, к.ф.-м.н., доцент
Долгошей Володимир Борисович, к.ф.-м.н., доцент

Класична електродинаміка Мікроскопічна теорія

Класична електродинаміка: Мікроскопічна теорія [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальностей Еб «Прикладна фізика та наноматеріали» та F1 «Прикладна математика» / В. І. Жданов, С. М. Пономаренко, В. Б. Долгошей; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 789 кБ). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. — 158 с.

Для студентів фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, які навчаються за спеціальностями Еб «Прикладна фізика та наноматеріали» та F1 «Прикладна математика».

© В. І. Жданов, С. М. Пономаренко, В. Б. Долгошей, 2026 р.
© КПІ ім. Ігоря Сікорського (НН ФТІ), 2026 р.

Передмова	6
Вибір системи одиниць	7
Частина I Класична електродинаміка	8
1 Базові поняття та рівняння	9
1.1 Величини, що спостерігаються в електродинаміці	10
1.2 Рівняння електромагнітного поля	17
1.3 Закони збереження	24
1.4 Межі застосовності класичної електродинаміки	27
2 Розв'язки рівнянь Максвелла	31
2.1 Потенціали електромагнітного поля	31
2.2 Потенціали ізольованої системи зарядів і струмів	35
2.3 Задача Коші для рівнянь Максвелла	40
3 Вільне електромагнітне поле	45
3.1 Спектральний розклад і плоскі хвилі	45
3.2 Випадкові поля випромінювання	51
3.3 Співвідношення між тривалістю сигналу та шириною його спектру	59
3.4 Загальний розв'язок рівнянь вільного поля	62
4 Випромінювання	68
4.1 Поле прискореного заряду	69
4.2 Випромінювання малих систем	73
4.3 Розсіювання електромагнітних хвиль	78

5	Перетворення Лоренца як наслідок постулатів Айнштейна	84
5.1	Простір-час, системи відліку	84
5.2	Перетворення Лоренца для одновимірних рухів систем відліку	87
5.3	Власний час	93
5.4	Квадрат інтервалу	94
5.5	Перетворення довжини та об'єму	96
6	Співвідношення СТВ у просторі Мінковського	101
6.1	Загальні та власні перетворення Лоренца	103
6.2	Вектори і тензори в просторі Мінковського	107
6.3	Світові лінії та чотиривектор швидкості	110
7	Електродинаміка у просторі Мінковського	112
7.1	Чотиривимірна форма рівнянь Максвелла	112
7.2	Трансформаційні властивості $F_{\mu\nu}$	114
7.3	Рівняння руху зарядженої частинки	118
7.4	Плоскі монохроматичні хвилі	120
7.5	Ефект Доплера	121
7.6	Вектор-потенціал електромагнітного поля у випадку ізольованої системи	124
8	Варіаційний принцип для рівнянь електродинаміки	127
8.1	Заряд у зовнішньому електромагнітному полі	127
8.2	Дія для електромагнітного поля	130
9	Тензор енергії-імпульсу і закони збереження	134
9.1	Чотири-імпульс системи тіл	134
9.2	Енергія-імпульс електромагнітного поля	135
9.3	Тензор моменту імпульсу електромагнітної системи . . .	137
Додатки		141
A	Таблиця переходу між гаусовою системою одиниць та SI	141
B	Основні формули векторного аналізу	144
B.1	Диференціальні операції в різних системах координат	144
B.2	Другі похідні	145
B.3	Похідні від добутків	145
B.4	Індексна нотація формул векторного аналізу . . .	145
B.5	Інтегральні характеристики та теореми	148

В	Поліноми Лежандра	149
Г	Сферичні гармоніки	149
Д	Циліндричні функції	150
Е	Узагальнені функції	152

Література	157
-------------------	------------

Алфавітний покажчик	158
----------------------------	------------

Передмова

Посібник містить матеріали з класичної електродинаміки в рамках програми з теоретичної фізики, розрахованої на студентів третього курсу навчально-наукового фізико-технічного факультету КПІ імені Ігоря Сікорського.

Викладено основні поняття класичної електродинаміки, розглянуто рівняння Максвелла, їх властивості, основні розв'язки, процеси випромінювання та розсіювання, вільні поля та їх характеристики. Посібник складається з двох частин: I. Класична електродинаміка; II. Чотиривимірне формулювання класичної електродинаміки.

У частині I викладено базові поняття та рівняння, розв'язки рівнянь Максвелла, що описують ізольовану систему зарядів і струмів потенціали ізольованої системи зарядів і струмів, задача Коші для рівнянь Максвелла. Обговорено розв'язки для вільного електромагнітного поля та процеси випромінювання.

У частині II викладено базові принципи та поняття спеціальної теорії відносності (СТВ) близько до оригінальної роботи Айнштейна. Співвідношення СТВ переписано у просторі Мінковського. Далі рівняння Максвелла та основні пов'язані з ними величини переписано у коваріантній чотиривимірній формі за допомогою тензора електромагнітного поля та чотиривектора густини струму та розглянуто основні наслідки. Виведено коваріантні рівняння руху заряджених частинок в електромагнітному полі за допомогою принципу відповідності з класичною динамікою. Розглянуто варіаційний принцип для рівнянь електродинаміки та закони збереження.

Посібник містить вправи для кращого засвоєння матеріалу.

Вибір системи одиниць

У класичній механіці природно будувати систему одиниць як абсолютну, тобто таку, в якій усі фізичні величини виражаються через базові — довжину, масу та час. Однією з таких систем є метрична система СГС, що базується на трьох основних одиницях: сантиметрі (довжина), грамі (маса) та секунді (час), — і власне назва «СГС» утворена саме від перших літер цих одиниць.

Цей підхід можна послідовно поширити й на електродинаміку, якщо розглядати електричні та магнітні величини як похідні від механічних. Таке поширення реалізоване в гаусовій системі одиниць — різновиді системи СГС. У цій системі електричні величини вимірюються в електростатичних одиницях (СГСЕ), а магнітні — в електромагнітних (СГСМ). Одиницю заряду тут визначають безпосередньо через сантиметр, грам і секунду за допомогою закону Кулона $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$.

На противагу природному механічному базису, у SI штучно введено ще одну фундаментальну одиницю — ампер, яка не має прямого фізичного змісту, адже електричний струм є лише похідною величиною від руху зарядів. Одиниця заряду в SI (кулон) є похідною від ампера, що вивертає логічний зв'язок: замість того щоб визначати струм через заряд, заряд визначають через струм. Хоча система SI є зручною для практичних та інженерних застосувань, оскільки результати обчислень одразу отримуються у звичних одиницях — вольтах, амперах, омах тощо, натомість гаусова система дозволяє зосередитися на фізичному змісті явищ, не обтяжуючи формули зайвими коефіцієнтами та допоміжними величинами, в цій системі рівняння не містять діелектричної ϵ_0 чи магнітної μ_0 сталих, які не мають фізичного змісту, електричні \mathbf{E} та магнітні \mathbf{B} поля мають однакову розмірність, зв'язок одиниць легко відслідковується з рівнянь. Все це робить формули теорії «елегантнішими» та симетричнішими, у результаті чого теорія набуває компактного вигляду. Гаусова система залишається стандартом у теоретичній електродинаміці та багатьох галузях сучасної фізики.

З огляду на це, у подальшому викладі всі основні результати формулюються в гаусовій системі. За потреби перехід до одиниць SI може бути виконаний наприкінці обчислень (див. додаток А).

Частина I

Класична електродинаміка

Неможливо позбутися відчуття, що ці математичні формули існують незалежно від нас і володіють власним розумом, що вони мудріші за нас, мудріше навіть тих, хто їх відкрив, і що ми дістаємо з них більше, ніж спочатку було закладено...

Heinrich Hertz

1

Базові поняття та рівняння

Електродинаміка є розділом теоретичної фізики, що описує електромагнітне поле та його взаємодію із зарядженими частинками. Центральним об'єктом теорії є поле, тоді як його джерелами є заряди та струми. Саме поле визначає характер і поширення електромагнітної взаємодії.

У загальній структурі фізики електромагнітна взаємодія є однією з фундаментальних поряд із гравітаційною, сильною та слабкою. Серед фундаментальних взаємодій електромагнітна вирізняється тим, що саме вона є мікроскопічною основою хімії та конденсованої матерії: взаємодія заряджених частинок в атомах і молекулах визначає формування хімічного зв'язку, просторову структуру молекул та стійкість макроскопічних фаз речовини.

Історично електричні явища намагалися звести до безпосередньої взаємодії зарядів. Такий підхід фактично ігнорує процеси, що відбуваються в просторі, і тому є незадовільним. Опис взаємодії потребує введення фізичної величини, визначеної в кожній точці простору і часу.

Цією величиною є електромагнітне поле. У сучасному розумінні воно розглядається як самостійна форма матерії, яка не зводиться до властивостей заряджених тіл. Взаємодія між зарядами здійснюється через поле і поширюється з кінцевою швидкістю.

Основні закони електродинаміки формулюються у вигляді рівнянь Максвелла. Вони визначають зв'язок між полем і його джерелами та повністю задають його динаміку в класичному наближенні. Узгодженість цих рівнянь з експериментом встановлена з високою точністю.

З рівнянь Максвелла безпосередньо випливає існування електромагнітних хвиль. Електромагнітне поле переносить енергію та імпульс, що підтверджується експериментально. Таким чином, поле володіє всіма ознаками фізичної реальності.

У цьому сенсі рівняння Максвелла є повним і замкненим формулюванням законів, що визначають поведінку електромагнітного поля в межах класичної теорії.

1.1. Величини, що спостерігаються в електродинаміці

Заряд, електричне та магнітне поле. Основними спостережуваними величинами в електродинаміці є електричний заряд та електромагнітне поле — сукупність електричного та магнітного полів. Статичні заряди створюють електричне поле, рух зарядів спричинює магнітне поле. Навпаки, електромагнітне поле створює силу, що діє на заряджене тіло. Ця схема відповідає концепції близькодії, яка домінує в сучасній фізиці; за цією концепцією заряди взаємодіють між собою через електромагнітне поле, а не безпосередньо.

Закон Кулона. Числовою характеристикою заряду можна дати, вимірюючи силу взаємодії F між двома точковими нерухомими зарядами. Якщо ці заряди розташовані на відстані R , за абсолютною величиною:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{R^2}, \quad (1.1)$$

де q_1, q_2 — заряди тіл, k — коефіцієнт пропорційності, що залежить від вибору системи одиниць. Це співвідношення називають законом Кулона; воно неодноразово перевірялося різними експериментальними методами. Сила, з якою один заряд діє на інший, спрямована вздовж лінії центрів зарядів. Зі спостережень відомо, що існують лише два сорти електричних зарядів, причому заряди однакового сорту завжди відштовхуються, а заряди різного сорту — притягуються. Цю обставину враховуємо, вводячи знаки зарядів у формулі (1.1). Від'ємними вважаються заряди того ж сорту, що й заряд електрона. Заряд є адитивною числовою величиною: заряд будь-якої системи є алгебраїчною сумою зарядів його підсистем.

Формула (1.1) дозволяє визначити заряд і подати процедуру його вимірювання (тобто спосіб порівняння заряду з деяким еталоном) за допомогою вимірювання сили взаємодії. В гаусовій системі одиниць два одиничних заряди створюють силу взаємодії 1 дина = $1 \text{ г} \cdot \text{см} / \text{с}^2$, якщо знаходяться на відстані 1 см. Відповідно в (1.1) слід покласти $k = 1$. Це — означення одиничного заряду в гаусовій системі (тут одиниця заряду не має спеціальної назви):

$$[q] = \text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Підкреслимо, що в (1.1) йдеться про точкові сферичні заряди, тобто такі, взаємодія яких не залежить від їх орієнтації. Хоча точкове тіло — це таке, розмірами якого можна знехтувати, в конкретній задачі розподіл зарядів всередині цього тіла може бути різко неоднорідним. Це спричинюватиме, взагалі кажучи, відмінність сили взаємодії від (1.1). Прикладом може служити взаємодія точкових

диполів. Далі під *точковим зарядом* ми будемо розуміти саме *сферичний точковий заряд*, якщо немає інших застережень.

Напруженість електричного поля та індукція магнітного поля. Числовою характеристикою електромагнітного поля можна дати, вимірюючи сили, що діють на рухомий електричний пробний заряд. Пробний заряд — це такий, впливом якого на зовнішнє поле можна знехтувати. З експерименту відомо, що на заряджене точкове пробне тіло (сферичний точковий заряд) в електромагнітному полі діє сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right), \quad (1.2)$$

де q — заряд тіла — не залежить від швидкості, \mathbf{v} — його швидкість, а вектори \mathbf{E} та \mathbf{B} не залежать від тіла і є характеристиками поля; коефіцієнт c визначається системою одиниць.

Вектор \mathbf{E} називають напруженістю електричного поля, \mathbf{B} — індукцією магнітного поля¹. Сукупність цих двох векторів, заданих в кожній точці простору, повністю визначають стан електромагнітного поля в класичній фізиці. Формула (1.2) також дозволяє узагальнити процедуру визначення заряду на випадок руху тіла. Адже спосіб, що базується на законі Кулона (1.1), працює лише для нерухомих зарядів.

Спостерігаючи за рухом заряджених частинок, можна визначити (див. вправу 1.1) напруженість електричного поля та індукцію магнітного поля. Звичайно, на практиці існують зручніші методи вимірювання \mathbf{E} та \mathbf{B} .

У гаусовій системі одиниць коефіцієнт c є фундаментальною сталою, що входить у визначення електромагнітних величин, і чисельно дорівнює швидкості світла: $c = 2.9979 \cdot 10^{10}$ см/с. Унаслідок цього напруженість електричного поля \mathbf{E} та магнітна індукція \mathbf{B} мають однакову розмірність:

$$[E] = [B] = \text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{-1/2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Одиницю магнітної індукції називають «гаус». Для електричного поля спеціальної назви одиниці не вводять, хоча його напруженість має ту саму розмірність.

¹Як видно, термінологія не є симетричною. Вектор \mathbf{E} вводиться як сила, що діє на нерухомий заряд, віднесена до величини заряду, і тому називається *напруженістю*, тоді як вектор \mathbf{B} так ввести не можна, оскільки магнітних зарядів в природі нема; назва *індукція*, щодо характеристики магнітного поля закріпилася історично, що зумовлено його роллю в описі магнітного стану середовища.

1.1. Нехай в експерименті визначають прискорення в однорідному електромагнітному полі електронів з різними (заданими) швидкостями. Покажіть, що це дає змогу однозначно визначити вектори \mathbf{E} та \mathbf{B} за формулою (1.2).

Основні властивості зарядів та електромагнітного поля.

- *Принцип суперпозиції.* Формула (1.2) дає змогу виміряти електромагнітне поле, вивчаючи його вплив на рух точкового заряду, але не дозволяє його розрахувати, виходячи з розподілу зарядів. Для цього потрібні рівняння, що пов'язують певним чином електромагнітне поле з його джерелами. Але перш ніж записати ці рівняння, відзначимо фундаментальний принцип суперпозиції електромагнітних полів: напруженість електричного поля \mathbf{E} та індукція \mathbf{B} магнітного поля, створюваних системою зарядів, є сумою полів \mathbf{E}_k , \mathbf{B}_k , що створюються окремими зарядами (або підсистемами) цієї системи:

$$\mathbf{E} = \sum_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{B} = \sum_k \mathbf{B}_k, \quad (1.3)$$

що є наслідком лінійності рівнянь Максвелла, які ми розглянемо далі. Тут поле $(\mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k)$ k -ї підсистеми розглядається окремо.

Це твердження, яке значно спрощує розв'язання задач електродинаміки, випливає з дослідних даних. Взагалі кажучи, можна навести приклади, коли фізичні поля не задовольняють принципу суперпозиції. Але ці явища класична електродинаміка не розглядає. У звичайних умовах принцип суперпозиції виконується з дуже високою точністю. Принцип суперпозиції тісно пов'язаний з адитивністю заряду.

- *Квантування (дискретність) електричного заряду.* З експериментів відомо, що найменшим відомим зарядом є заряд електрона, що наближено дорівнює (за абсолютною величиною) $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ одиниць гаусової системи. Заряд електрона є від'ємним; заряд протона — додатний і дорівнює заряду електрона з оберненим знаком. Будь-які заряди, що спостерігалися, кратні заряду електрона. Пошуки вільних зарядів, менших за e , або не кратних цій величині, дали негативний результат. Зауважимо, що відхилення зарядів протона й електрона призвело б до порушення електронейтральності атомів, що суперечить експериментальним даним.

Слід відзначити, що сучасні експерименти дають змогу вивчати розподіл заряду всередині елементарних частинок. Але наявність неперервного розподілу густини заряду всередині, наприклад, протона чи нейтрона, яка досліджується при зіткненнях

елементарних частинок, не суперечить квантуванню електричного заряду. Ця властивість стосується повного заряду частинок, що можуть існувати ізольовано від інших.

- *Інваріантність електричного заряду.* Величина заряду не залежить від його швидкості відносно спостерігача. Неінваріантність заряду також могла б призвести до порушення електронейтральності атомів, оскільки електрони в атомах рухаються зі швидкостями до 0.1 с; величина швидкості електронів різна на різних оболонках і відрізняється в різних атомах.
- *Збереження електричного заряду.* Якщо вважати встановленим факт квантування заряду, то збереження заряду у звичайних умовах пов'язано зі збереженням кількості протонів та електронів в атомах. Однак відомо, що електричний заряд зберігається і тоді, коли мають місце взаємоперетворення елементарних частинок.

Область застосовності законів збереження, квантування та інваріантності електричного заряду виходить далеко за рамки класичної електродинаміки. На цей час порушення цих законів невідомі.

Розподіли зарядів та струмів.

- **Сила струму.** Дамо числову характеристику електричного струму — впорядкованого руху носіїв заряду.

Нехай поверхня S є орієнтованою, тобто визначений певний додатний напрям перетину цієї поверхні. Нехай $q(t)$ — сумарний заряд, що перетнув S з урахуванням напрямку за час t з початку відліку. Тоді, за визначенням, сила струму через поверхню S (в додатному напрямку) є:

$$I_S(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \quad (1.4)$$

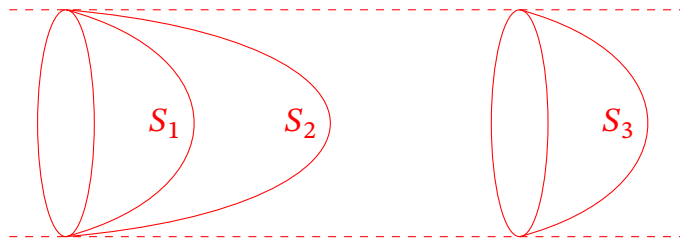
У разі сталого струму — це заряд, що перетинає S за одиницю часу.

- Здавалося б, що запис (1.4) не є цілком коректний, оскільки заряди дискретні й $q(t)$ змінюється стрибками. Однак завдяки малості цих стрибків $q(t)$ можна апроксимувати гладкою функцією, що є цілком правомірно в макроскопічних застосуваннях.
- Необхідними елементами визначення сили струму є поверхня S та її орієнтація. Але якщо йдеться про сталий струм в провідникові, форма перерізу, через який обчислюється струм, не є суттєвою.

Завдяки закону збереження заряду струм через S_1 , S_2 та S_3 (див. рис. 1.1) однаковий. Адже у разі протилежного заряд з часом

міг би накопичуватися, наприклад, між S_1 та S_2 , що суперечило б умові стаціонарності.

Рис. 1.1



- Мікроскопічний та макроскопічний підхід в електродинаміці.** Мікроскопічний підхід оперує з якомога точними значеннями величин, що характеризують електромагнітні взаємодії з врахуванням будови речовини та в цьому розумінні він є найбільш послідовним. Але використання мікроскопічного підходу не завжди доцільно. Приклад такої ситуації — попереднє обговорення формули (1.4). У макроскопічних вимірюваннях амперметр вимірює усереднене значення сили струму, і тут можна не зважати на дискретну будову електрики. Це дає змогу застосовувати відповідну математичну модель процесу вимірювання, яка працює з гладкими функціями $I_S(t)$ та $q(t)$ в (1.4). Якщо треба охарактеризувати нерівномірність розподілу зарядів в об'ємі, можна також використовувати ідеалізацію, коли вводиться густина заряду, яка є неперервною функцією координат. Це можливо, якщо кожна ділянка цього об'єму, де виконують вимірювання, містить досить велику кількість елементарних зарядів. Далі під макроскопічними величинами будемо розуміти такі, що отримані внаслідок деякого усереднення — за часом або у деяких просторових масштабах. З одного боку макроскопічний підхід пов'язаний з можливостями конкретного фізичного експерименту, в якому мікробудова може бути несуттєвою, з іншого боку, застосування неперервних розподілів дає змогу застосувати апарат математичного аналізу для опису явищ.
- Густина заряду.** Для опису заданого просторового розподілу заряду введемо функцію ρ , що може залежати від координат та від часу і дозволяє обчислити заряд в будь-якій області Ω за формулою:

$$q_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (1.5)$$

де $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $d^3\mathbf{r} \equiv dV = dx dy dz$ ¹.

Інакше, елемент заряду в об'ємі dV — це $dq = \rho(t, \mathbf{r}) dV$.

¹В курсі математичного аналізу потрійний інтеграл традиційно позначають $\iiint_{\Omega} \rho dV$ — і це цілком коректно. Однак у теоретичній фізиці прийнято лаконічні-

Функцію $\rho(t, \mathbf{r})$ називають густиною заряду. Для сталого розподілу це величина заряду в одиниці об'єму.

Якщо в середовищі присутні однакові носії з зарядом q й об'ємною густиною їх числа (концентрацією) n :

$$\rho = nq, \quad (1.6)$$

а в загальнішому випадку:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_k q_k n_k(t, \mathbf{r}), \quad (1.7)$$

де індекс k відповідає різним сортам носіїв заряду, кожен зі своєю концентрацією.

- **Густина струму.** Цю величину можна визначити формулою для сили струму через поверхню S :

$$I_S(t) = \int_S \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.8)$$

де \mathbf{j} — вектор густини струму, що не залежить від S , $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, \mathbf{n} — нормаль до елемента поверхні dS . Густина струму дає напрям руху зарядів в даному елементі об'єму і за абсолютною величиною — силу струму через одиничний переріз, проведений перпендикулярно до цього напрямку. Маємо:

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} \quad (1.9)$$

якщо усі заряди з концентрацією n мають однакову швидкість \mathbf{v} та заряд q , або для декількох сортів носіїв заряду:

$$\mathbf{j} = \sum_k q_k n_k \mathbf{v}_k \quad (1.10)$$

Ще більш загальний вираз можна записати за наявності розподілу за швидкостями:

$$\mathbf{j} = \sum_k \int q_k f_k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mathbf{v} d^3\mathbf{v}, \quad (1.11)$$

де $f_k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ — функція розподілу k -го сорту зарядів за швидкостями.

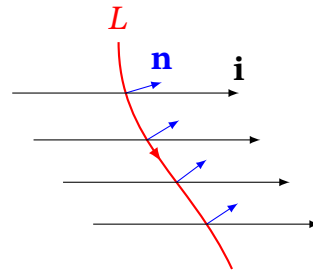
ший запис: єдиний знак інтеграла \int із мірою $d^3\mathbf{r}$. Область інтегрування $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ вже однозначно вказує на тривимірність, тому потрібний знак є надлишковим. Позначення $d^3\mathbf{r}$ при цьому інформативніше за dV : воно явно фіксує розмірність простору і природно узагальнюється — наприклад, $d^4\mathbf{x}$ в релятивістському записі.

- **Поверхневі заряди та струми.** Якщо електричні заряди зосереджені у тонкому прошарку поблизу деякої поверхні, доцільно ввести поверхневу густину заряду σ . Аналогічно (1.5), покладемо:

$$q_S(t) = \int_S \sigma(t, \xi, \eta) dS(\xi, \eta). \quad (1.12)$$

де q_S — заряд на ділянці S цієї поверхні, ξ та η — координати на поверхні; σ — заряд на одиниці площі.

Рис. 1.2. На рисунку зображено нормаль \mathbf{n} (синя стрілка) до лінії L , та вектор поверхневої густини \mathbf{i} (чорна стрілка).



За наявності руху поверхневих зарядів визначимо силу струму через лінію L (див. рис. 1.2) на цій поверхні:

$$I_L(t) = \frac{dq_L(t)}{dt}, \quad (1.13)$$

де dq_L — заряд, що перетинає L за час t з початку спостереження. Тут також має бути зафіксований додатний напрям при перетині L вздовж цієї поверхні. Лінійна густина поверхневого струму визначається формулою (для будь-якої лінії L на поверхні):

$$I_L(t) = \int_L \mathbf{i}(t, \xi, \eta) \cdot d\mathbf{l}(\xi, \eta), \quad (1.14)$$

де \mathbf{i} — вектор поверхневої густини струму, $d\mathbf{l} = \mathbf{n} d\ell$ — орієнтовний елемент довжини на L , \mathbf{n} — нормаль до L на поверхні у точці інтегрування.

Математичний запис закону збереження заряду. Нехай q_Ω — заряд в деякому об'ємі Ω , $\partial\Omega$ — поверхня, що обмежує цей об'єм, $I_{\partial\Omega}$ — струм, що виходить через $\partial\Omega$ назовні з об'єму Ω (будемо вважати, що це відповідає додатній орієнтації поверхні Ω). Тоді, за законом збереження заряду і за означенням струму (1.4), маємо у кожний момент часу:

$$\frac{dq_\Omega}{dt} + I_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.15)$$

Співвідношення (1.15) є інтегральною формою закону збереження заряду. Для поверхневих зарядів та струмів можна подати аналогічне співвідношення, що пов'язує швидкість зміни заряду на ділянці поверхні та струм через межу цієї ділянки.

Отримаємо з (1.15) диференціальне співвідношення для густини заряду $\rho(t, \mathbf{r})$ та густини об'ємного струму $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$. Використовуючи визначення (1.5) для нерухомого об'єму:

$$\frac{dq_{\Omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} d^3\mathbf{r}.$$

Тоді з (1.15) та за визначенням густини струму (1.4):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} d^3\mathbf{r} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Перетворимо інтеграл по замкненій поверхні $\partial\Omega$, що оточує об'єм Ω , за теоремою Остроградського-Гаусса:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{j} d^3\mathbf{r},$$

звідки

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) d^3\mathbf{r} = 0.$$

Це співвідношення виконується для будь-якого об'єму Ω , тому підінтегральний вираз має дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (1.16)$$

Це диференціальна форма закону збереження заряду або рівняння неперервності для об'ємної густини зарядів.

1.2. Рівняння електромагнітного поля

Мікроскопічні рівняння Максвелла (інтегральна форма). В цьому розділі буде розглянута система рівнянь, яка дає змогу аналізувати електродинамічні явища в усій класичній області від мікроскопічних до макроскопічних масштабів. В рамках класичної електродинаміки ці рівняння вважаються точними, вони не містять наближень і явно враховують усі заряди й струми в рамках конкретного явища або теоретичної моделі. Далі будемо називати ці рівняння мікроскопічними — на відміну від макроскопічних рівнянь, які припускають певні

наближення або макроскопічні усереднення, наприклад, для опису поляризаційних зарядів і струмів намагнічення, що виникають у суцільному середовищі. Мікроскопічні рівняння отримано дослідним шляхом за допомогою узагальнення великої кількості експериментальних даних. Ці рівняння становлять основу всієї електродинаміки. Їх можна розглядати як основні аксіоми електродинаміки, які відіграють у ній таку саму роль, яку закони Ньютона відіграють у класичній механіці.

Вихідною для нас буде інтегральна форма рівнянь Максвелла, з якої далі будуть отримані граничні умови та диференціальна форма цих рівнянь. Інтегральна форма мікроскопічних рівнянь має вид:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q_{\Omega}, \quad (1.17)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.18)$$

$$(1.19)$$

де Ω — довільний нерухомий об'єм, $\partial\Omega$ — його межа; S — довільна нерухома орієнтована поверхня, ∂S — замкнений контур, що її обмежує, q_{Ω} — повний заряд в області Ω .

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.20)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I_S + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.21)$$

де S — довільна нерухома орієнтована поверхня, ∂S — замкнений контур, що її обмежує. I_S — струм через S у додатному напрямку.

В літературі можна зустріти форму рівнянь електродинаміки для об'ємів та поверхонь, що деформуються із часом. Зокрема, замість рівняння (1.20) часто використовують зв'язок між електрорушійною силою, що виникає у рухомому провідникові, та зміною потоку магнітного поля через поверхню, що обмежена контуром цього провідника. Цей зв'язок можна отримати з записаних рівнянь, якщо при обчисленні електрорушійної сили (ЕРС) врахувати також внесок сил, що діють на носії струму з боку магнітного поля.

Сумісність рівнянь Максвелла із законом збереження заряду. Наявність довільного об'єму Ω та довільної поверхні S в рівняннях Максвелла є дещо незвичайним; принаймні, треба перевірити, чи не

призводить це до неоднозначностей. Наприклад, в рівнянні (1.21) ми можемо вибрати різні поверхні S_1 і S_2 , що мають спільну межу ∂S (рис. 1.3).

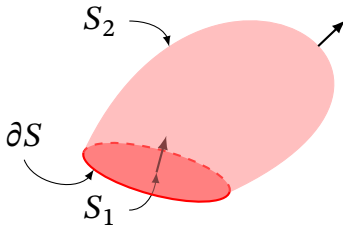


Рис. 1.3. Поверхні інтегрування S_1 та S_2 , що мають спільну межу ∂S .

Тоді з рівняння (1.21) легко отримати:

$$\frac{4\pi}{c}(I_{S_1} - I_{S_2}) + \frac{1}{c} \left(\int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right) = 0 \quad (1.22)$$

Чи суперечить це іншим рівнянням? Виявляється, ні, якщо врахувати закон збереження заряду. Нехай Ω — це область, оточена поверхнями S_1 та S_2 . Межа $\partial\Omega$ має орієнтацію, спільну з однією з цих поверхонь і протилежну до іншої на відповідних ділянках. Тоді рівняння (1.22) можна переписати так:

$$4\pi I_{\partial\Omega} + \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.23)$$

де похідну винесено за знак інтеграла. Оскільки поверхневий інтеграл тут в силу (1.17) пов'язаний із зарядом q_Ω в області Ω , звідси:

$$I_{\partial\Omega} + \frac{dq_\Omega}{dt} = 0. \quad (1.24)$$

Таким чином, рівняння (1.22) тотожно виконується внаслідок рівняння (1.17) та закону збереження заряду (1.24). У разі рівняння (1.20) ми можемо також вибрати різні поверхні інтегрування з однаковою межею; тут аналогічні міркування з огляду на рівняння (1.18) також показують відсутність суперечностей.

Диференціальна форма рівнянь Максвелла. В рівнянні (1.17) за означенням:

$$q_\Omega = \int_{\Omega} \rho d^3\mathbf{r} \quad (1.25)$$

де ρ — об'ємна густина заряду. За теоремою Остроградського-Гауса ліва частина (1.17) також зводиться до об'ємного інтеграла, звідки:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} d^3\mathbf{r} = 4\pi \int_{\Omega} \rho d^3\mathbf{r}$$

зважаючи на довільність області Ω :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.26)$$

Аналогічно, з (1.18) маємо:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.27)$$

В рівнянні (1.20) перетворимо ліву частину за теоремою Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

звідки, з урахуванням довільності S :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.28)$$

Аналогічно, виражаючи також згідно до (1.24) струм у правій частині (1.21) через інтеграл від густини струму \mathbf{j} , отримаємо:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.29)$$

Рівняння (1.26) – (1.29) складають систему мікроскопічних рівнянь Максвелла у диференціальній формі.

З рівнянь Максвелла (1.26), (1.29) можна виразити густини заряду та струму через напруженості полів. Виникає питання, чи не суперечитимуть ці рівняння закону збереження заряду (1.24), де цих напруженостей немає. Це питання вище було розглянуто на основі інтегральної форми рівнянь Максвелла. Покажемо це також за допомогою диференціальної форми рівнянь. Візьмемо дивергенцію від обох частин (1.29) враховуючи, що $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$:

$$0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Підставляючи $\operatorname{div} \mathbf{E}$ з (1.26) отримаємо:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

що збігається з рівнянням неперервності (1.16) — диференціальною формою закону збереження заряду. Зауважимо, що обчислення дивергенції від обох частин (1.28) з урахуванням (1.27) приводить до тотожності.

Умови на поверхні розриву. Досить часто трапляється ситуація, коли поля \mathbf{E} або \mathbf{B} мають розриви першого роду на деякій поверхні S , залишаючись скінченними й неперервними при переміщеннях вздовж цієї поверхні. Це пов'язано з існуванням поверхневих зарядів та струмів на S з густинами σ та \mathbf{i} відповідно.

Для отримання граничних умов на поверхні розриву, розглянемо довільний досить малий елемент поверхні S , котрий можна вважати майже плоским.

Нехай \mathbf{n} — нормаль до площини розриву, що розділяє 1 та 2, причому \mathbf{n} спрямована з 1 в 2

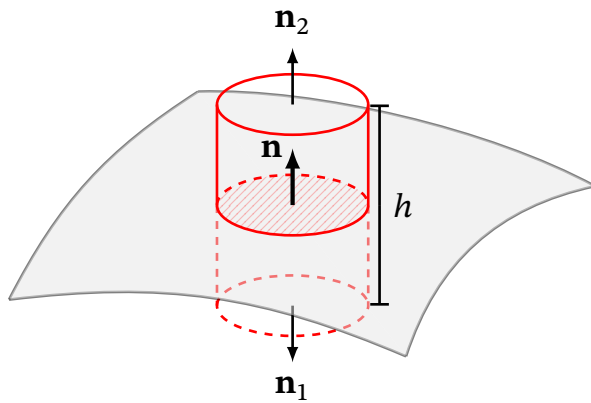


Рис. 1.4. До виведення першої граничної умови.

Нехай Ω — область всередині циліндра (рис. 1.4), з основами S_1 та S_2 , паралельними S , причому S_1 лежить у середовищі 1, S_2 — в 2, а висота циліндра дорівнює h .

Застосуємо рівняння (1.17) розбиваючи інтеграл по $\partial\Omega$ на частини, що відповідають S_1 , S_2 та бічній поверхні циліндра $\partial\Omega'$:

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\partial\Omega'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q_{\Omega},$$

де повний заряд всередині Ω складається в загальному випадку з неперервно розподіленого об'ємного заряду з інтегрованою об'ємною густиною ρ та поверхневого заряду з поверхневою густиною σ на S :

$$q_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho d^3\mathbf{r} + \int_S \sigma dS.$$

Якщо висота $h \rightarrow 0$, об'єм та бічна поверхня циліндра також прямують до нуля, а з ними й інтеграли по об'єму та по бічній поверхні. Відкидаючи ці інтеграли, отримаємо:

$$\int_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q_{\Omega}.$$

Оскільки:

$$\int_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n} dS, \quad \int_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} dS,$$

де враховано напрямки нормалей до $\partial\Omega$ на S_1 та S_2 , звідки:

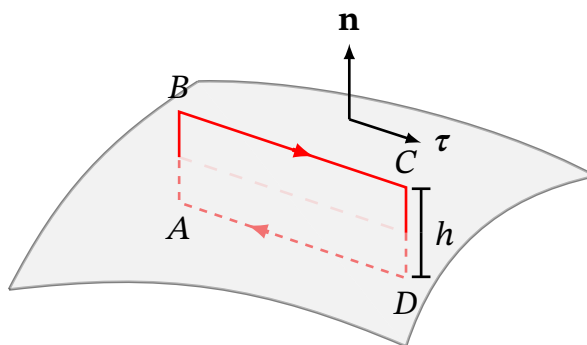
$$\int_S (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \int_S \sigma dS.$$

Завдяки довільності S , дістаємо співвідношення в будь-якій точці поверхні розриву:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma, \quad (1.30)$$

яке пов'язує нормальні до поверхні розриву складові напруженості електричного поля з обох боків розриву.

Рис. 1.5. До виведення другої граничної умови



Щоб отримати зв'язок тангенціальних компонент \mathbf{E} , звернемося до рівняння (1.20). Розглянемо прямокутний контур, дві сторони BC і AD (рис. 1.5) якого паралельні до поверхні розриву.

З рівняння (1.20):

$$\int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{CD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{DA} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Інтеграл по S (за умови неперервності $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$) прямує до нуля при $h \rightarrow 0$. Тому, враховуючи напрямок обходу контуру, що визначає знак інтегралів по BC і AD , можна записати:

$$\int_{BC} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} d\ell = 0$$

де $\boldsymbol{\tau}$ — тангенціальний одиничний вектор вздовж BC . Звідси, завдяки довільності вибору контуру $ABCD$,

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (1.31)$$

Очевидно, це співвідношення справедливе, якщо τ — довільний тангенціальний до поверхні S одиничний вектор. Легко перевірити, розглядаючи (1.31) для двох незалежних напрямків τ на поверхні S , що еквівалентна формі граничних умов для тангенціальних складових може бути записана так:

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0$$

Таким чином, тангенціальна складова напруженості електричного поля не має розриву на S .

З рівняння Максвелла (1.18) отримуємо співвідношення для нормальних компонент індукції магнітного поля аналогічно (1.30):

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.32)$$

тобто нормальна компонента індукції магнітного поля не має розривів. Це є наслідком відсутності магнітних зарядів, в такому випадку, поверхневих.

На відміну від цього, тангенціальна компонента \mathbf{B} може мати розриви за наявності поверхневого струму з поверхневою густиною \mathbf{i} .

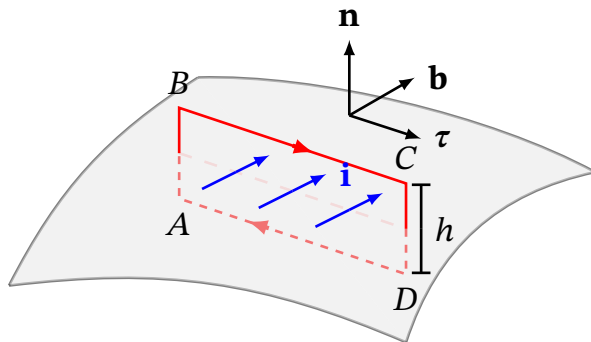


Рис. 1.6. До виведення другої граничної умови для \mathbf{B}

Нехай \mathbf{n} — вектор нормалі до поверхні, проведений з 1 в 2, τ — тангенціальний одиничний вектор вздовж BC , а \mathbf{b} — вектор, що перпендикулярний до τ та \mathbf{n} й утворює разом з ними праву трійку. Запишемо:

$$\mathbf{B} = B_n \mathbf{n} + B_\tau \tau + B_b \mathbf{b},$$

де напрямок одиничного вектора \mathbf{b} відповідає напрямку \mathbf{i} , напрямок одиничного вектора τ перпендикулярний до \mathbf{n} та \mathbf{b} . З рівняння (1.21) для контуру $ABCD$ при $h \rightarrow 0$, враховуючи, що за цієї умови інтеграли за сторонами AB і CD прямують до нуля, маємо:

$$\int_{BC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} + \int_{DA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_{BC} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \tau d\ell = \frac{4\pi}{c} I_{BC},$$

де $I_{BC} = \int_{BC} \mathbf{i} \cdot \mathbf{b} d\ell$ — поверхневий струм через BC . Звідси:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.33)$$

Розглядаючи (1.33) для двох незалежних напрямків $\boldsymbol{\tau}$ можемо написати:

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \quad (1.34)$$

1.3. Закони збереження

Збереження енергії електромагнітного поля. В електромагнітному полі на заряд q , що рухається із швидкістю \mathbf{v} діє сила Лоренца (1.2). Потужність, що витрачає ця сила, є:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Якщо концентрація зарядів є n , маємо $\mathbf{j} = qn\mathbf{v}$; тоді потужність, що витрачає електричне поле в одиничному об'ємі, є:

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.35)$$

Легко перевірити, що ця формула зберігається у разі загального розподілу різних зарядів за швидкостями.

З рівняння (1.29):

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

звідси, за формулами векторного аналізу:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \\ &= -\operatorname{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \right) + \frac{c}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \right) \end{aligned}$$

Завдяки рівнянню (1.28):

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= -\operatorname{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \right) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \right) = \\ &= -\operatorname{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{8\pi} \mathbf{B}^2 \right) \end{aligned}$$

Звідси отримуємо важливе співвідношення:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} = 0, \quad (1.36)$$

де величину:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \quad (1.37)$$

називають вектором Пойнтінга; як буде видно далі, він має зміст густини потоку енергії.

Співвідношення (1.36) виражає енергетичний баланс в одиниці об'єму. Проінтегруємо його по деякій області Ω , перетворюючи інтеграл з дивергентним членом в інтеграл по (замкненій) поверхні $\partial\Omega$, що оточує Ω :

$$\int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{r} + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} d^3\mathbf{r} = 0. \quad (1.38)$$

Перший доданок в (1.38) — це робота, яку виконує поле за одиницю часу в об'ємі Ω , другий — потік енергії через поверхню $\partial\Omega$, останній доданок — швидкість зміни енергії електромагнітного поля в об'ємі Ω . Величина:

$$W = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} d^3\mathbf{r} \quad (1.39)$$

являє собою енергію поля в об'ємі Ω , а підінтегральний вираз — це густина енергії електромагнітного поля.

Закон збереження імпульсу. Імпульс, що передає поле зарядам в одиниці об'єму, визначається силою Лоренца (1.2):

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}].$$

З рівняння Максвелла (1.26):

$$\rho\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E},$$

або для k -ої компоненти:

$$4\pi\rho E_k = E_k \partial_i E_i = \partial_i (E_i E_k) - E_i \partial_i E_k.$$

Запишемо рівняння (1.28) $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ покомпонентно:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t},$$

помножимо його на ε_{pqi} та підсумуємо по i :

$$\varepsilon_{pqi} \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = -\varepsilon_{pqi} \frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t},$$

або, за допомогою формули згортки:

$$\partial_p E_q - \partial_q E_p = -\varepsilon_{pq i} \frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t}.$$

Враховуючи це співвідношення, дістанемо:

$$\begin{aligned} 4\pi\rho E_k &= \partial_i (E_i E_k) - E_i \partial_k E_i - \frac{1}{c} \varepsilon_{kij} E_i \frac{\partial B_j}{\partial t} = \\ &= \partial_i \left(E_k E_i - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ik} \right) - \frac{1}{c} \left[\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]_k. \end{aligned}$$

З останнього рівняння Максвелла (1.29) $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, тоді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_k &= \frac{1}{c} \varepsilon_{kij} j_i B_j = \frac{1}{c} \varepsilon_{kij} \left[\frac{c}{4\pi} \varepsilon_{ipq} \partial_p B_q - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E_i}{\partial t} \right] B_j = \\ &= \frac{1}{4\pi} (\delta_{kq} \delta_{jp} - \delta_{kp} \delta_{jq}) B_j \partial_p B_q - \frac{1}{4\pi c} \varepsilon_{kij} \frac{\partial E_i}{\partial t} B_j = \\ &= \frac{1}{4\pi} (B_j \partial_j B_k - B_j \partial_k B_j) - \frac{1}{4\pi c} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right]_k. \end{aligned}$$

Це можна подати як:

$$\frac{4\pi}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_k = \partial_j \left(B_k B_j - \delta_{kj} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) - \frac{1}{4\pi c} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right]_k.$$

Маємо результат для балансу імпульсу в одиниці об'єму:

$$f_k + T_{kj,j} + \frac{\partial \pi_k}{\partial t} = 0, \quad \pi = \frac{\mathbf{P}}{c^2}, \quad (1.40)$$

де

$$T_{kj} = \frac{1}{4\pi} (E_k E_j + B_k B_j) - \frac{1}{8\pi} \delta_{kj} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$$

максвеллівський тензор натягу.

Інтегральне співвідношення:

$$\int_{\Omega} f_k d^3 \mathbf{r} + \oint_{\partial \Omega} T_{kj} n_j dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \pi_k d^3 \mathbf{r} = 0 \quad (1.41)$$

пов'язує зміну імпульсу в об'ємі Ω з дією зовнішніх сил та потоком через бічну поверхню; тут π_k — імпульс поля в одиниці об'єму.

Закон збереження моменту імпульсу. Виходимо з рівнянь:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{f}].$$

Момент сили, що діє на заряди в одиниці об'єму, ϵ , за означенням,

$$M_k = \epsilon_{kij} x_i f_j.$$

Використовуючи співвідношення, отримані для балансу імпульсу, маємо:

$$\epsilon_{ijk} x_j f_k + \epsilon_{ijk} x_j T_{kl,l} + \frac{\partial L_i}{\partial t} = 0, \quad \text{де } L_i = \epsilon_{ijk} x_j \pi_k$$

можна інтерпретувати як густину моменту імпульсу поля.

Завдяки симетрії T_{kl} по індексах:

$$\epsilon_{ijk} x_j T_{kl,l} = \partial_l (\epsilon_{ijk} x_j T_{kl}) - \epsilon_{ijk} \delta_{lj} T_{kl} = \partial_l (\epsilon_{ijk} x_j T_{kl}).$$

Звідси дістаємо локальне співвідношення для зміни моменту імпульсу:

$$M_i + \partial_l (\epsilon_{ijk} x_j T_{kl}) + \frac{\partial L_i}{\partial t} = 0. \quad (1.42)$$

Рівняння балансу моменту імпульсу в об'ємі Ω має вид:

$$\int_{\Omega} M_i d^3\mathbf{r} + \oint_{\partial\Omega} \epsilon_{ijk} x_j T_{kl} n_l dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} L_i d^3\mathbf{r} = 0. \quad (1.43)$$

1.4. Межі застосовності класичної електродинаміки

Квантова механіка та електродинаміка. На сучасному рівні знань найбільш фундаментальним є квантовий розгляд фізичних процесів, який і визначає межі застосовності класичної теорії. Електродинамічна система складається з заряджених частинок та електромагнітного поля; тут необхідно визначити, яка з цих складових (або уся система в цілому) допускає класичний опис. Широке коло фізичних задач потребує квантового опису руху частинок в класичному електромагнітному полі. Основні зміни, у порівнянні з класичною механікою, тут стосуються рівнянь (1.1), (1.2) та інших, пов'язаних із поняттями траєкторії, сили, другим законом Ньютона тощо. Перегляд цих понять у дослідженнях атомів та молекул — прерогатива квантової механіки, яка аналізує мікрооб'єкти з розмірами $10^{-8} \div 10^{-7}$ см. Однак деякі мікропроцеси відзначають властивості твердих тіл і рідин також на макроскопічних масштабах. Хоча рух заряджених частинок в цих задачах визначається законами квантової механіки, досить часто залишаються незмінними класичні поняття про

напруженість електричного поля та магнітну індукцію; наприклад, в рівнянні Шредінгера для електрона в атомі водню фігурує класичний кулонівський потенціал поля ядра. Звичайно, що для визначення цих полів ми не завжди можемо прямо скористатися формулою (1.2), що пов'язана з механікою точкової частинки. Але зберігається класичний опис електромагнітного поля.

Квантова будова випромінювання. За певних умов стає необхідним враховувати квантові властивості самого електромагнітного поля. Вивчення рівноважного електромагнітного випромінювання, а також фотоелектричних явищ (М. Планк, 1900; А. Айнштейн, 1905) привело до висновку, що електромагнітне випромінювання має корпускулярні властивості й може розглядатися як сукупність окремих квантів-фотонів з енергією $h\nu$, де h — стала Планка, ν — частота випромінювання. Коли фотонів багато, можливий класичний опис поля, проте у слабких пучках дискретність енергії стає визначальною, а сучасна техніка дозволяє їх поодинокую реєстрацію. Разом з енергетичною дискретністю існують і просторові межі застосування класичної електродинаміки, які визначаються комптонівською довжиною хвилі $\lambda_C = h/m_e c \approx 2.4 \cdot 10^{-10}$ см. На масштабах, сумірних із λ_C , спроба локалізувати електромагнітну взаємодію входить у суперечність із принципом невизначеності, що робить класичне поняття «точкового заряду» нефізичним.

Теоретичну базу для опису таких процесів дає квантова електродинаміка (КЕД), яка передбачає суттєві зміни характеру взаємодії також в області дуже сильних полів. В електричному полі з напруженістю $E \sim \frac{m_e^2 c^3}{\hbar e} \approx 10^{20}$ В/м робота поля на відстані порядку λ_C стає порівнянною з енергією спокою електрон-позитронної пари, що робить необхідним врахувати процеси їх народження та знищення. В цих умовах електромагнітне поле не може розглядатися окремо від електрон-позитронного поля навіть при поширенні хвилі у вакуумі. Складна взаємодія цих полів робить ефективні рівняння для класичних величин E та B нелінійними; завдяки цьому стає можливим процес розсіювання фотона фотоном. У цьому розумінні вакуум набуває властивостей середовища, а класичний принцип суперпозиції порушується.

Електродинаміка і гравітація. Взаємодію гравітаційного та електромагнітного полів розглядає загальна теорія відносності. Сильне гравітаційне поле не міняє класичний характер електричного та магнітного полів, але вносить корективи в рівняння електродинаміки на фоні викривлення простору-часу. Вплив гравітаційних ефектів можна оцінити за допомогою параметра $\mu = |U|/c^2$, де U — порядок

зміни ньютонівського гравітаційного потенціалу в конкретній задачі. Наприклад, при проходженні променів світла біля Сонця $\mu = 10^{-6}$, відповідний порядок величини має кут зміщення віддаленого джерела променів, що його спостерігають з Землі. Гравітаційно-релятивістські ефекти в Сонячній системі необхідно враховувати для правильної інтерпретації найбільш точних астрометричних спостережень.

Задачі

1.2. Всередині кулі радіуса R густина заряду стала і дорівнює ρ ; зовні зарядів немає. Знайти модуль напруженості зовні та усередині кулі.

Відповідь:

$$E = 4\pi\rho R^3/(3r^2), \quad r > R; \quad E = 4\pi\rho r/3, \quad r < R.$$

1.3. Всередині нескінченного циліндра радіуса R густина заряду стала і дорівнює ρ ; зовні зарядів немає. Знайти модуль напруженості електричного поля на відстані r від осі циліндра.

Відповідь:

$$E = 2\pi\rho R^2/r, \quad r > R; \quad \text{та } E = 2\pi\rho r, \quad r < R.$$

1.4. Поверхнева густина заряду на нескінченній площині стала і дорівнює σ . Знайти модуль напруженості електричного поля.

Відповідь:

$$E = 2\pi\sigma.$$

1.5. На площині $z = 0$ декартових координат розподіл струму однорідний з поверхневою густиною $\mathbf{i} = i_0(1, 0, 0)$. Знайти індукцію магнітного поля при $z > 0$ (гаусова система одиниць).

Відповідь:

$$\mathbf{B} = -2\pi i_0 c^{-1}(0, 1, 0).$$

1.6. Вздовж нескінченного циліндра радіуса R тече струм з густиною $\mathbf{j} = j\mathbf{n} = \text{const}$, де одиничний вектор \mathbf{n} спрямований вздовж осі циліндра. Зовні струмів немає. Знайти індукцію магнітного поля на відстані r від осі циліндра.

Відповідь:

$$\mathbf{B} = 2\pi j c^{-1}[\mathbf{n} \times \mathbf{r}], \quad r < R, \quad \mathbf{B} = 2\pi j R^2 c^{-1}[\mathbf{n} \times \mathbf{r}] r^{-2}, \quad r > R.$$

де \mathbf{r}' — вектор, перпендикулярний осі циліндра і спрямований від осі до точки спостереження.

2

Розв'язки рівнянь Максвелла

Рівняння Максвелла є системою восьми скалярних диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно шести компонент полів \mathbf{E} та \mathbf{B} . Попри те що система є перевизначеною, безпосереднє розв'язання її в загальному випадку є непростою задачею. У цьому розділі розглядаються два підходи до побудови розв'язків.

Перший підхід — метод електромагнітних потенціалів — зводить вихідну систему до двох незалежних хвильових рівнянь (рівнянь Даламбера) відносно скалярного ϕ та векторного \mathbf{A} потенціалів. Вибір зручної *калібрувальної умови* (Лоренца, Гамільтона або Кулона) дозволяє суттєво спростити структуру рівнянь. Для ізольованої системи зарядів і струмів розв'язки цих рівнянь набувають вигляду *запізнюючих потенціалів*, що відображають скінченну швидкість поширення електромагнітних збурень.

Другий підхід — постановка *задачі Коші* — дозволяє однозначно визначити еволюцію електромагнітного поля з заданих початкових умов. Доводиться, що початкові умови, задані на множині просторових точок, визначають поле лише в межах відповідного «конуса минулого» — ще один прояв принципу причинності в електродинаміці.

2.1. Потенціали електромагнітного поля

Існує досить багато методів аналізу рівнянь Максвелла (1.26) — (1.29), серед яких одним з найбільш поширених є введення потенціалів, що дозволяють дещо зменшити число невідомих функцій.

З умови соленоїдальності магнітного поля (1.27) випливає, що існує деяке векторне поле \mathbf{A} , таке, що:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.1)$$

Підставляючи це в (1.28), після елементарних перетворень маємо:

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

звідки випливає існування скалярного поля ϕ , такого, що

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi,$$

або

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Таким чином, якщо шукати електромагнітне поле у вигляді (2.1), (2.2), рівняння (1.27), (1.28) виконуються автоматично.

Калібрувальна інваріантність. Формули (2.1), (2.2) не визначають потенціали однозначно. Розглянемо перетворення $(\phi, \mathbf{A}) \rightarrow (\phi', \mathbf{A}')$:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (2.3)$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Підставляючи в (2.1), (2.2), бачимо, що напруженості електромагнітного поля виражаються через ϕ' , \mathbf{A}' подібно до ϕ , \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}', \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Таким чином, потенціали (ϕ, \mathbf{A}) містять деякі ступені свободи, що ніяк не впливають на фізичну ситуацію. Цю обставину називають *калібрувальною інваріантністю* рівнянь поля, а перетворення (2.3), (2.4), або інші, що не впливають на спостережувані величини (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , називають *калібрувальними перетвореннями*.

Калібрувальна умова Лоренца. Калібрувальна інваріантність дозволяє накладати додаткові умови на потенціали (ϕ, \mathbf{A}) , за допомогою яких можна звести рівняння до зручнішого вигляду.

Розглянемо умову Лоренца для (ϕ, \mathbf{A}) :

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (2.6)$$

Цю умову можна задовольнити за допомогою перетворень (2.3), (2.4). Дійсно, припустимо, що:

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = f \neq 0,$$

та перейдемо до нових потенціалів (ϕ', \mathbf{A}') за формулами (2.3), (2.4). Тоді:

$$\text{div } \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \nabla^2 \chi.$$

Підбираючи функцію χ таким чином, щоб $f = \square \chi$ (де $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Даламбера), бачимо, що нові потенціали (ϕ', \mathbf{A}') задовольняють калібрувальній умові Лоренца (2.6).

Отримаємо рівняння для (ϕ, \mathbf{A}) , припускаючи тепер, що умова (2.6) виконана. З подальшого буде видно, що розв'язки рівнянь, з якими матимемо справу, дійсно задовольняють цій умові. З урахуванням співвідношень (2.2) та (2.6) маємо:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \left(-\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi.$$

Тоді з рівняння (1.26) маємо:

$$\square \phi = -4\pi\rho. \quad (2.7)$$

Підставимо (2.1) та (2.2) в (1.29):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \left(-\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

В лівій частині:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \nabla \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

де враховано умову Лоренца (2.6). Оскільки члени зі скалярним потенціалом ϕ в останній формулі скорочуються, отримуємо:

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.8)$$

Перевіримо, чи сумісні рівняння (2.7) та (2.8) з умовою Лоренца (2.6). Комбінування рівнянь $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ (2.7) + div (2.8) дає:

$$\square \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right). \quad (2.9)$$

За умови Лоренца права частина дорівнює нулю, тобто закон збереження заряду є необхідною умовою існування розв'язку. Навпаки, якщо цей закон виконується, то:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (2.10)$$

Співвідношення (2.10), якщо його розглядати як рівняння для: $f = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$, само по собі не гарантує $f \equiv 0$, оскільки розв'язок рівняння:

$$\square f = 0 \quad (2.11)$$

не є єдиним (воно має, наприклад, хвильові розв'язки). Але за умови відсутності зовнішнього випромінювання, коли розглядається обмежена система зарядів і струмів, рівняння (2.11) має тільки тривіальний розв'язок $f = 0$. Ця ситуація відповідає запізнюючим розв'язкам рівнянь (2.7) та (2.8), що розглядаються нижче.

Калібрування Гамільтона. Розглянемо іншу калібрувальну умову Гамільтона:

$$\phi = 0. \quad (2.12)$$

Це співвідношення також завжди можна задовольнити за допомогою калібрувальних перетворень (2.3), (2.4). Тоді за умови (2.12) рівняння поля (1.26) переписеться, з урахуванням (2.2), так:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{A}) = -4\pi\rho. \quad (2.13)$$

Рівняння (1.29) переписеться, з урахуванням (2.1) та (2.2), так:

$$\square \mathbf{A} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.14)$$

Перевіримо, чи сумісні рівняння ці рівняння. Застосування дивергенції до лівої частини останнього рівняння дає:

$$\operatorname{div}(\square \mathbf{A} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{A}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{A} + \nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{A},$$

або

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{A}) \right] + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.15)$$

Якщо врахувати (2.14), маємо:

$$\frac{4\pi}{c} \left[\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] = 0,$$

тобто закон збереження заряду (1.16) є необхідною умовою розв'язку (2.14), (2.15) за умови (2.12).

Калібрування Кулона. Кулонівське калібрування накладає умову:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (2.16)$$

також може бути виконана за допомогою підбору калібрувального перетворення.

За умовою (2.16) з (1.26) маємо рівняння Пуассона для потенціалу ϕ :

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad (2.17)$$

аналогічно електростатиці.

З іншого рівняння Максвелла (1.29) дістаємо:

$$\square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.18)$$

Для перевірки сумісності (2.17) та (2.18) обчислимо з останнього рівняння з урахуванням (2.16):

$$\square \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right),$$

де підставлено $\nabla^2 \phi$ з (2.17). Знову рівняння неперервності — закон збереження заряду — виступає як необхідна умова існування розв'язку при заданій калібрувальній умові. Навпаки, якщо виконується рівняння неперервності, для розв'язку (2.18) маємо $\square \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ і за відповідних граничних умов дістанемо (2.16).

2.2. Потенціали ізолюваної системи зарядів і струмів

В цьому розділі нас цікавитиме поле обмеженої системи, яка є ізолювана. Це означає, що протягом усієї історії системи, починаючи з нескінченного минулого, зовнішніх впливів немає; тобто немає джерел на нескінченності чи якогось зовнішнього випромінювання. На відміну від задачі Коші, коли поля розглядають за $t > 0$, а при $t = 0$ задають початкові умови (разом з граничними умовами на нескінченності), у разі ізолюваної системи будемо розглядати поля за усіх часів, припускаючи, що функції $\rho(t, \mathbf{r})$ та $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ задані на усій дійсній осі t . Це, зокрема, дозволяє оперувати з перетворенням Фур'є цих функцій за часом.

Для ізолюваної системи буде отримано розв'язок рівнянь (2.7), (2.8) у вигляді запізнюючих (загаювальних) потенціалів, який застосовується для розгляду різноманітних задач теорії випромінювання.

Перетворення Фур'є та рівняння Гельмгольца. Позначимо:

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \phi(t, \mathbf{r}). \quad (2.19)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}). \quad (2.20)$$

— перетворення Фур'є для потенціалів. Оскільки диференціювання за часом індукує множення Фур'є-образів на $(-i\omega)$, аналог калібрувальної умови Лоренца (2.6) має вигляд:

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}} - \frac{i\omega}{c} \tilde{\phi} = 0. \quad (2.21)$$

З закону збереження заряду (1.16) маємо:

$$-i\omega\tilde{\rho} + \operatorname{div}\tilde{\mathbf{j}} = 0, \quad (2.22)$$

де

$$\tilde{\rho}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \rho(t, \mathbf{r}), \quad (2.23)$$

$$\tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{j}(t, \mathbf{r}). \quad (2.24)$$

Далі розглянемо рівняння для потенціалів саме за умови Лоренца (2.6) або (2.3). З рівнянь (2.7), (2.8), де друга похідна за часом індукує множення на $-\omega^2$ Фур'є-образів, отримаємо рівняння Гельмгольца:

$$\Delta\tilde{\phi} + k^2\tilde{\phi} = -4\pi\tilde{\rho}, \quad \text{де } k = \frac{\omega}{c}. \quad (2.25)$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{A}} + k^2\tilde{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}}. \quad (2.26)$$

Умова випромінювання для ізольованої системи. Систему зарядів і струмів називатимемо ізольованою, якщо вона зосереджена в обмеженій області за відсутності зовнішнього випромінювання, що йде з нескінченності. Зосередимось на пошуку розв'язку рівняння (2.7) та його Фур'є-образу (2.25) для скалярного потенціалу ϕ . Зараз ми зацікавлені у знаходженні розв'язку, що описує поле ізольованої системи джерел. Розглянемо спочатку розв'язок, що відповідає сферично симетричному точковому джерелу, та задовольняє рівнянню:

$$\square\phi = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\chi(t, \mathbf{r}_0),$$

де $\chi(t, \mathbf{r}_0) = 4\pi\rho(t, \mathbf{r}_0)$. Очевидно, розв'язок (2.7) можна подати, як суперпозицію таких розв'язків з різними \mathbf{r}_0 .

Нехай $\mathbf{r}_0 = 0$. Поле, що створюється точковим джерелом у точці \mathbf{r} , є сферично-симетричним $\phi = \phi(t, r)$, $r = |\mathbf{r}|$. Завдяки сферичній симетрії:

$$\square\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right).$$

Покладемо $\phi = \frac{\psi}{r}$, тоді за $r > 0$:

$$\square\phi = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) = 0.$$

Це одновимірне хвильове рівняння, яке має загальний розв'язок:

$$\psi = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right),$$

де f_1 та f_2 — довільні функції однієї змінної. Тут f_1 описує хвилі, що випромінюються джерелом, а f_2 — хвилі, що приходять з нескінченності. За відсутності зовнішнього випромінювання слід покласти $f_2 = 0$.

Звідси:

$$\phi = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Якщо джерело знаходиться у точці $\mathbf{r}_0 \neq 0$, очевидно:

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} f_1\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}\right). \quad (2.27)$$

Умова випромінювання і рівняння Гельмгольца. Для Фур'є-образів розв'язку (2.27) маємо:

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \frac{f_1\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\exp\left[i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \tilde{f}_1(\omega), \quad (2.28)$$

де $\tilde{f}_1(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\xi e^{i\omega\xi} f_1(\xi)$.

На великих відстанях

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) \sim \frac{e^{i\omega(r - \mathbf{n}\mathbf{r}_0)/c}}{r} + O(r^{-2}).$$

Очевидно, для будь-якого сферично-симетричного розв'язку рівняння Гельмгольца (2.25) зовні області, де права частина цього рівняння відмінна від нуля, за умови відсутності зовнішнього випромінювання

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) \sim \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.29)$$

Розв'язок рівняння Гельмгольца, що задовольняє умовам випромінювання, у випадку обмеженої системи джерел має бути суперпозицією розв'язків типу (2.29) з різними \mathbf{r}_0 і мати асимптотику

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) \approx C(\mathbf{n}) \frac{e^{i\omega r/c}}{r} + O(r^{-2}),$$

де амплітуда $C(\mathbf{n})$ залежить лише від кутів.

Запізнюючі потенціали. Умови випромінювання однозначно задають поля ізольованої системи струмів і розв'язки хвильових рівнянь (2.7), (2.8) для потенціалів, а також рівнянь Гельмгольца (2.25), (2.26) для їх Фур'є-перетворень. Розв'язки (2.7), (2.8) можна отримати безпосередньо, використовуючи сферично-симетричний розв'язок (2.27). Але ми проведемо аналогічний розгляд з використанням сферично-симетричного розв'язку рівнянь Гельмгольца, а потім перейдемо до розв'язків (2.7), (2.8) через перетворення Фур'є.

Розглянемо рівняння для скалярного потенціалу (2.25) і шукатимемо фундаментальний розв'язок $\tilde{G}(\mathbf{r})$ оператора в лівій частині (2.25):

$$\nabla^2 \tilde{G} + k^2 \tilde{G} = \delta(\mathbf{r})$$

Поле, створюване сферично-симетричним точковим джерелом, також є сферично-симетричним, тому можна покласти

$$\tilde{G}(\mathbf{r}) = \frac{g(r)}{r}$$

Тоді з (2.29) за $r > 0$ маємо

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + k^2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad g = C_1(k)e^{ikr} + C_2(k)e^{-ikr}.$$

Враховуючи умову випромінювання, слід покласти $C_2(k) = 0$:

$$\tilde{G}(r) = C_1(k) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \text{за } r > 0.$$

Залишається визначити $C_1(k)$. Коли $r \rightarrow 0$, поведінку розв'язку визначає співмножник C_1/r , а в лівій частині рівняння (2.29) домінує доданок $\Delta\phi$. Тому асимптотика розв'язку за $r \rightarrow 0$ повинна збігатися з розв'язком рівняння Пуассона для точкового заряду:

$$\Delta\left(\frac{q}{r}\right) = -4\pi q \delta(\mathbf{r}). \quad (2.30)$$

Зіставлення за $r > 0$ дає:

$$\tilde{G}(r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (2.31)$$

Більш послідовний розгляд фундаментальних розв'язків операторів Даламбера та Гельмгольца з погляду узагальнених функцій див. додаток **Е**.

З урахуванням (2.31), за принципом суперпозиції розв'язки рівнянь (2.19), (2.20) за умови випромінювання можна подати згортками:

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) = \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp\left[i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right] \tilde{\rho}(\omega, \mathbf{r}'), \quad (2.32)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{r}) = \int \frac{dV'}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp\left[i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right] \tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{r}'). \quad (2.33)$$

За допомогою оберненого до (2.19), (2.20) перетворення Фур'є маємо:

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) d\omega, \quad (2.34)$$

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{\rho}(\omega, \mathbf{r}) d\omega. \quad (2.35)$$

Звідси та з (2.32)

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \tilde{\rho}(\omega, \mathbf{r}') = \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(t_{\text{ret}}, \mathbf{r}'), \quad (2.36)$$

де $t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

Остаточно запишемо:

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho\left(t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}'\right), \quad (2.37)$$

а також, аналогічно, для розв'язку (2.8):

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}\left(t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}'\right). \quad (2.38)$$

Формули (2.37), (2.38) подають запізнюючі розв'язки рівнянь (2.7), (2.8), що задовольняють умовам випромінювання в разі обмеженої ізольованої системи зарядів та струмів.

Зауважимо, що (2.37), (2.38) можна записати у вигляді згортки фундаментального розв'язку оператора Даламбера з правими частинами рівнянь (2.7), (2.8) (див. додаток Е). Цей фундаментальний розв'язок має вигляд:

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi c} \delta(t^2 - r^2/c^2) \theta(t). \quad (2.39)$$

Згортка з правою частиною (2.7):

$$\phi(t, \mathbf{r}) = 4\pi \int dt' dV' G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(t', \mathbf{r}'). \quad (2.40)$$

Підставимо (2.39):

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{r}) &= \frac{2}{c} \int dt' dV' \delta\left[(t - t')^2 - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{c^2}\right] \theta(t - t') \rho(t', \mathbf{r}') = \\ &= \frac{1}{c} \int dV' \int \delta\left[t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right] \frac{\rho(t', \mathbf{r}')}{|t - t'|} dt', \end{aligned}$$

що збігається з (2.37) після інтегрування по t' .

Аналогічно:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \int dt' dV' G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{j}(t', \mathbf{r}'). \quad (2.41)$$

Перевіримо виконання калібрувальної умови Лоренца для розв'язків (2.40), (2.41):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} &= \\ &= \frac{4\pi}{c} \int dt' dV' \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \rho(t', \mathbf{r}') + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) j_i(t', \mathbf{r}') \right] = \\ &= -\frac{4\pi}{c} \int dt' dV' \left[\left(\frac{\partial}{\partial t'} G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \rho(t', \mathbf{r}') + \left(\frac{\partial}{\partial x'_i} G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) j_i(t', \mathbf{r}') \right] = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int dt' dV' \left[G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial t'} \rho(t', \mathbf{r}') + G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x'_i} j_i(t', \mathbf{r}') \right] = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int dt' dV' G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[\frac{\partial}{\partial t'} \rho(t', \mathbf{r}') + \operatorname{div}' \mathbf{j}(t', \mathbf{r}') \right] = 0 \end{aligned}$$

де $\mathbf{r} = \{x_i\}$, $\mathbf{r}' = \{x'_i\}$, в останньому перетворенні проведено інтегрування частинами по t' та по x'_i з урахуванням обмеженості області, де густини зарядів та струмів відмінні від нуля.

Таким чином, виконання умови Лоренца для (2.40), (2.41) забезпечено законом збереження заряду.

2.3. Задача Коші для рівнянь Максвелла

Як зазначено на початку попереднього розділу, задача Коші, на відміну від розгляду ізольованої системи, оперує лише з полями $t \geq t_0$. Поведінка джерел та полів за $t < t_0$, яка може впливати на стан системи за $t \geq t_0$, є невідомою. Тому, на відміну від п. 2.2, окрім задання функцій $\rho(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ за $t \geq t_0$ необхідно задавати певні початкові умови.

Далі для простоти виберемо відлік часу так, що початковий момент $t_0 = 0$. Поля \mathbf{E} , \mathbf{B} визначають стан електромагнітного поля, якщо вони задані в усьому просторі. З'ясуємо, чи дозволяють рівняння Максвелла однозначно передбачати стан поля при $t > 0$, якщо цей стан відомий за $t = 0$. Розподіли густини заряду $\rho(t, \mathbf{r})$ та густини струму $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ за $t \geq 0$ вважаємо заданими, причому $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. При $t = 0$ задаємо поля \mathbf{E} , \mathbf{B} , причому вони мають задовольняти рівняння:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.42)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.43)$$

Еволюцію полів \mathbf{E} та \mathbf{B} визначає інша пара рівнянь Максвелла, що містить похідні за часом:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{B} - 4\pi \cdot \mathbf{j} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \quad (2.45)$$

З будови системи рівнянь видно, що ми можемо задати електромагнітне поле при $t = 0$, яке задовольняє рівнянням (2.42) та (2.43), і розв'язувати потім рівняння (2.44) та (2.45) при $t > 0$. Однак виникає питання, чи зберігаються при цьому рівняння (2.42) та (2.43) також і при $t > 0$?

Покажемо, що це дійсно так. З рівняння (2.44) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi \cdot \operatorname{div} \mathbf{j} = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

де враховано закон збереження заряду, або:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0.$$

Звідси видно, що співвідношення (2.42) справедливо при $t > 0$, якщо воно відбувається при $t = 0$.

З рівняння (2.45) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

звідки видно, що рівняння (2.43) також зберігається при $t > 0$.

Єдиність розв'язків. Покажемо, що початкові умови, задані при $t = 0$ всередині кулі (див. рис. 2.1):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq c^2 T^2 \quad (2.46)$$

однозначно визначають напруженості поля у точці $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ в момент $t = T$. Припустимо, що існують два розв'язки рівнянь Максвелла $\{\mathbf{E}(t, \mathbf{r}), \mathbf{B}(t, \mathbf{r})\}$ та $\{\mathbf{E}'(t, \mathbf{r}), \mathbf{B}'(t, \mathbf{r})\}$ з однаковими початковими умовами в області (2.46) та розглянемо їхню різницю $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E} - \mathbf{E}'$, $\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}'$, яка, очевидно, задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot}(\Delta \mathbf{B}), \quad \frac{\partial \Delta \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot}(\Delta \mathbf{E}).$$

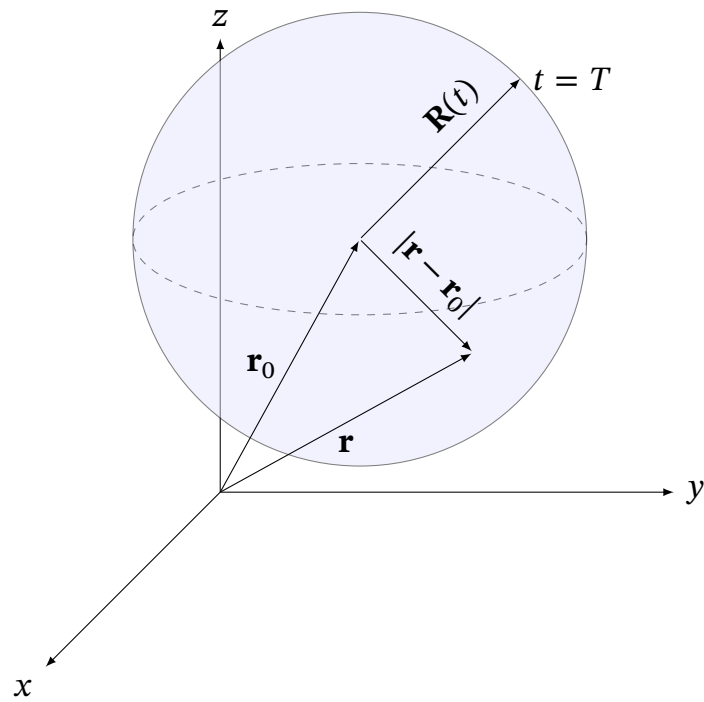


Рис. 2.1

Обчислюючи похідну з урахуванням цих рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \mathbf{E}^2 + \Delta \mathbf{B}^2) &= \frac{1}{4\pi} \left(\Delta \mathbf{E} \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial t} + \Delta \mathbf{B} \frac{\partial \Delta \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{c}{4\pi} (\Delta \mathbf{E} \operatorname{rot}(\Delta \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} \operatorname{rot}(\Delta \mathbf{E})) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}] \quad (2.47) \end{aligned}$$

маємо співвідношення, аналогічне закону збереження енергії в диференціальній формі:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}],$$

де $W = \frac{1}{8\pi} (\Delta \mathbf{E}^2 + \Delta \mathbf{B}^2)$.

Розглянемо невід'ємну величину:

$$U(t) = \int_{K(t)} W dV, \quad (2.48)$$

де областю інтегрування $K(t)$ є куля з центром у точці $\{\mathbf{r}_0\} = \{x_0, y_0, z_0\}$:

$$K(t) = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq R(t)\}, \quad \text{де } R(t) = c(T - t), \quad t \leq T.^1$$

Перейдемо в інтегралі (2.48) до сферичних координат з центром у \mathbf{r}_0 :

¹Сукупність точок $\{t, \mathbf{r}\}$ чотиривимірного простору, для яких виконуються ці умови, належать до так званого конуса минулого точки $\{0, \mathbf{r}_0\}$.

$$U(t) = \int d\Omega \int_0^{R(t)} r^2 W(t, r, \theta, \varphi) dr,$$

де інтегрування по кутовій частині $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ виконується по усій одиничній сфері. Враховуючи (2.47), обчислимо:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -cR^2(t) \int d\Omega W(t, R(t), \theta, \varphi) + \int_{K(t)} \frac{\partial W}{\partial t} dV = \\ &= -cR^2 \int d\Omega W(t, R(t), \theta, \varphi) - \frac{c}{4\pi} \int_{K(t)} \operatorname{div}[\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}] dV = \\ &\quad (\text{за формулою Остроградського-Гауса}) \\ &= -cR^2 \int d\Omega W - \frac{c}{4\pi} \int_{\partial K(t)} (d\mathbf{S} \cdot [\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}]) = \\ &= -cR^2 \int d\Omega W - \frac{c}{4\pi} \int d\Omega R^2(t) [\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}, \quad (2.49) \end{aligned}$$

де $\partial K(t)$ — поверхня сфери $r = R(t)$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}$ — одиничний вектор нормалі до цієї поверхні; $d\mathbf{S} = \mathbf{n}R^2 d\Omega$.

Оскільки:

$$|[\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}| \leq |\Delta \mathbf{E}| \cdot |\Delta \mathbf{B}| \leq \frac{\Delta \mathbf{E}^2 + \Delta \mathbf{B}^2}{2} \leq 4\pi W,$$

з (2.49) випливає:

$$\frac{dU}{dt} = -cR^2 \int d\Omega \left[W + \frac{1}{4\pi} [\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} \right] \leq 0. \quad (2.50)$$

Якщо початковий момент $t = 0$ поля збігаються:

$$\Delta \mathbf{E}(0, \mathbf{r}) = \Delta \mathbf{B}(0, \mathbf{r}) \equiv 0,$$

тому $U(0) = 0$. За означенням $U(t) \geq 0$, тому нерівність (2.50) означає, що $U(t) \equiv 0$, тобто $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ у будь-якій кулі $K(t)$, $t \in [0, T]$.

Таким чином, розв'язки з однаковими початковими умовами збігаються, тобто ці умови, задані в області (2.46), однозначно задають поле у будь-якій кулі $K(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Як видно з наведених міркувань, зміни початкових умов за $t = 0$ поза областю (2.46) не впливають на поле у точці \mathbf{r}_0 . Це очевидний наслідок скінченості швидкості поширення взаємодій. Аналогічно, збурення поля, що відбуваються в момент t поза кулею $K(t)$, не встигають поширитися до точки \mathbf{r}_0 за час $R(t)/c = T - t$. Чим ближче t до T , тим меншою є область впливу на цю точку.

Природно, що для визначення поля при $t = T$ в усьому просторі треба задавати початкові умови також в усьому просторі. Поля, що задають у початковий момент, мають задовольнити рівнянням (2.42) та (2.43); тому стан поля та його майбутня еволюція визначаються чотирма функціями від трьох просторових змінних. Наприклад, можна незалежно задати дві компоненти електричного поля та дві — магнітного.

Задачі

2.1. Вектор-потенціал стаціонарного магнітного поля обмеженої системи струмів на великих відстанях можна наближено подати як $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr^3} \int dV \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')$. Записати цей вираз через магнітний момент $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int dV [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]$. Відповідь: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\mathbf{m} \times \mathbf{r}]/r^3$.

2.2. Знайти загальний сферично симетричний розв'язок $\tilde{\phi} \equiv \tilde{\phi}(k, r)$ рівняння Гельмгольца в вакуумі:

$$\Delta \tilde{\phi} + k^2 \tilde{\phi} = 0 \quad \text{в області } r \geq R > 0.$$

Що в цьому розв'язку залишиться після врахування умови випромінювання (тобто за відсутності зовнішніх хвиль, що приходять до центру)?

2.3. Знайти розв'язок $\tilde{\phi} \equiv \tilde{\phi}(k, r)$ рівняння Гельмгольца:

$$\Delta \tilde{\phi} + k^2 \tilde{\phi} = -4\pi \tilde{\rho}$$

у випадку сферичної симетрії $\tilde{\rho} \equiv \tilde{\rho}(k, r)$, за умови відсутності зовнішнього випромінювання. Функція $\tilde{\rho} \equiv \tilde{\rho}(k, r)$ відмінна від нуля лише в області $r < R$. Розв'язок подати у вигляді квадратур. Показати, що при $R \rightarrow 0$ за умови фіксованого $\int dV \tilde{\rho}(k, r) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \tilde{\rho}(k, r) = q$, матимемо $\tilde{\phi}(k, r) = q \exp(ikr)/r$.

3

Вільне електромагнітне поле

В цьому розділі розглянуто питання, що стосуються вільних електромагнітних полів у вакуумі, тобто за відсутності зарядів та струмів. Основним методом аналізу є розклад поля за допомогою перетворення Фур'є, що дозволяє перейти від опису поля як функції часу до його спектральних характеристик. Такий підхід природно веде до поняття плоских хвиль та монохроматичних полів, для яких особливо зручним є комплексний формалізм при обчисленні енергетичних співвідношень. Розділ завершується розкладом вільного поля на незалежні моди, які формально описуються як гармонічні осцилятори, що є відправною точкою для квантової теорії електромагнітного поля.

3.1. Спектральний розклад і плоскі хвилі

Зведення до додатних частот. Нехай $\phi(t)$ — будь-яка функція, пов'язана з електромагнітним полем (наприклад, компонента електричного поля), для якої існує образ Фур'є:

$$\tilde{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \phi(t) \quad (3.1)$$

Обернене перетворення дозволяє обчислити $\phi(t)$ по функції $\tilde{\phi}(\omega)$:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega) \quad (3.2)$$

Для функцій $f(t)$, $g(t)$ та їх образів Фур'є $\tilde{f}(\omega)$, $\tilde{g}(\omega)$ виконується рівність Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\tilde{g}^*(\omega)d\omega \quad (3.3)$$

Практично будь-який реальний сигнал можна подати у вигляді суперпозиції монохроматичних сигналів. За допомогою технічних пристроїв можна виділяти, підсилювати чи послабляти певні ділянки спектра сигналу, що відповідають певній області частот. При цьому формальний запис гармонічних сигналів, пропорційних $\sim e^{i\omega t}$ та $\sim e^{-i\omega t}$, відповідає однаковій частоті $\omega > 0$. Тому переписемо усі співвідношення через додатні значення ω , враховуючи, що фізичні напруженості полів описуються дійсними функціями.

Якщо $\phi(t)$ — дійсна функція, то:

$$\tilde{\phi}^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \phi(t) = \tilde{\phi}(-\omega) \quad (3.4)$$

Завдяки цьому формулу (3.2) можна переписати так:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega) + \int_{-\infty}^0 d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\omega (\hat{\phi}(\omega)e^{-i\omega t} + \hat{\phi}^*(\omega)e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

В цю формулу входять значення $\tilde{\phi}(\omega)$ лише з додатними частотами, які можна задавати незалежно на відміну від $\phi(-\omega)$ при $\omega > 0$, які пов'язані з $\phi(\omega)$ формулою (3.4). Формулу зведення до додатних частот можна переписати так:

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Re \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega) \quad (3.5)$$

З урахуванням (3.4) для дійсної функції $f(t)$ можна записати:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Енергетичні співвідношення. Повна енергія, що проходить через поверхню, що оточує об'єм Ω за весь час випромінювання:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} dt = \frac{c}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \cdot dt d\mathbf{S} =$$

$$= \frac{c}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{\mathbf{E}}(\omega) \times \tilde{\mathbf{B}}^*(\omega)] d\omega$$

де $\tilde{\mathbf{E}}(\omega), \tilde{\mathbf{B}}(\omega)$ — спектральні характеристики дійсних полів $\mathbf{E}(t), \mathbf{B}(t)$.
Аналогічно (3.4):

$$\tilde{\mathbf{E}}(-\omega) = \tilde{\mathbf{E}}^*(\omega), \quad \tilde{\mathbf{B}}(-\omega) = \tilde{\mathbf{B}}^*(\omega).$$

Тоді, розбиваючи інтеграл по $d\omega$ на два доданки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \{ \dots \} = \int_0^{\infty} d\omega \{ \dots \} + \int_{-\infty}^0 d\omega \{ \dots \},$$

кожне з яких є комплексним спряженням іншого, аналогічно (3.5), маємо:

$$\mathcal{E} = \frac{c}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \cdot \Re \int_0^{\infty} [\tilde{\mathbf{E}}(\omega) \times \tilde{\mathbf{B}}^*(\omega)] d\omega \quad (3.6)$$

де фігурують вже тільки додатні частоти.

Якщо експериментальна техніка дає змогу виділяти внесок окремих інтервалів частот, доцільно ввести спектральну густину енергії випромінювання.

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{c}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \cdot \Re [\tilde{\mathbf{E}}(\omega) \times \tilde{\mathbf{B}}^*(\omega)], \quad \omega > 0$$

Тоді з (3.6):

$$\mathcal{E} = \int_0^{\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} d\omega$$

Комплексний формалізм та енергетичні співвідношення для монохроматичних полів. В попередніх співвідношеннях комплексні величини $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{B}}$ — це образи Фур'є відповідних дійсних полів. Доцільно розглядати також комплексні поля, які є розв'язками рівнянь Максвелла. Завдяки лінійності рівнянь, дійсні та уявні частини комплексних розв'язків також є розв'язками, але розрахунки з комплексними величинами часто є більш зручними. При розгляді ж спостережних величин або нелінійних (наприклад, енергетичних) співвідношень слід повернутися до дійсних частин розв'язків, які мають фізичний зміст.

Проілюструємо це на прикладі комплексних монохроматичних полів, тобто таких, що залежать від часу як $e^{-i\omega t}$, $\omega \neq 0$. Нехай електричне та магнітне поля є монохроматичними, тобто

$$\mathbf{E}_{\text{real}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}'_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \alpha), \quad \mathbf{B}_{\text{real}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}'_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \alpha)$$

Ми зіставляємо їм комплексні поля

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\alpha}e^{-i\omega t} \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{-i\alpha}e^{-i\omega t},$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}'_0(\mathbf{r})e^{-i\alpha}, \quad \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{B}'_0(\mathbf{r})e^{-i\alpha},$$

дійсні частини яких збігаються з полями \mathbf{E}_{real} , \mathbf{B}_{real} .

Вектор Пойнтінга густини потоку енергії виражаємо, як звичайно, через дійсні частини полів¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= \frac{c}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{E} + \mathbf{E}^*}{2} \times \frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^*}{2} \right] = \\ &= \frac{c}{8\pi} \left(\frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*]}{2} + \frac{[\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}]}{2} \right) + \frac{c}{16\pi} ([\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + [\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}^*]). \end{aligned}$$

Складові другого доданку осцилюють як $e^{\pm 2i\omega t}$; їх середнє за часом дорівнює нулю. Усереднюючи за часом, маємо:

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle_t = \frac{c}{8\pi} \Re [\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] \quad (3.7)$$

де символ $\langle F(t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T}^T F(t) dt \right\}$ означає усереднення за часом. Фактично, (3.7) — це вираз для середньої за часом густини потоку енергії через амплітуди монохроматичних електричного та магнітного полів.

Аналогічним чином легко отримати середнє за часом значення густини енергії електромагнітного поля:

$$\langle W \rangle_t = \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2}{16\pi} \quad (3.8)$$

Зауважимо, що формули (3.7), (3.8) не змінять свого вигляду у випадку суперпозиції монохроматичних хвиль з різними частотами. Це очевидно, коли врахувати, що $\langle e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \rangle_t = 0$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

Розглянемо *монохроматичні плоскі хвилі*:

¹Дійсна частина комплексного числа $z \in \Re(z) = \frac{z+z^*}{2}$ (зірочка означає комплексне спряження).

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Підставимо це в рівняння Максвелла. За відсутності зарядів та струмів, маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= i[\mathbf{k} \times \mathbf{B}] = \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}, \end{aligned}$$

а також умову поперечності:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0 \end{aligned}$$

З першого рівняння:

$$[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}k^2 = \frac{\omega}{c} [\mathbf{k} \times \mathbf{B}] = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}$$

Завдяки умові поперечності маємо:

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

— зв'язок між хвильовим вектором та частотою, який називають дисперсійним рівнянням.

Таким чином:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$$

де $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ визначає напрям поширення хвилі.

Плоскі хвилі у загальному випадку. Монохроматичні плоскі хвилі є частковим видом плоских хвиль, що визначаються, як розв'язки рівнянь електродинаміки, параметри яких не змінюються при переміщеннях вздовж деякої площини — фронту хвилі, нормаль до якої \mathbf{n} не змінюється з часом. Інакше, просторова залежність цих розв'язків зводиться до залежності від деякої змінної $\zeta = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$, $\mathbf{n}^2 = 1$. Тоді $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\zeta, t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\zeta, t)$.

Підставляючи в рівняння Максвелла, маємо:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.11)$$

Обчислимо $\operatorname{rot}((3.9))$:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

З (3.9):

$$-\operatorname{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

тобто:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

Підставляючи сюди вираз для плоских хвиль $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\zeta, t)$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Заміна $U = \zeta - ct$, $V = \zeta + ct$ приводить до рівняння:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial U \partial V} = 0,$$

загальним розв'язком якого є $\mathbf{E} = \mathbf{F}_1(U) + \mathbf{F}_2(V)$, де \mathbf{F}_1 та \mathbf{F}_2 — довільні вектор-функції одної змінної. Розв'язок є суперпозицією двох хвиль, що рухаються в протилежних напрямках.

Якщо $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\zeta, t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\zeta, t)$, з рівняння (3.9) маємо:

$$\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta}$$

Якщо перед фронтом $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$, звідси $\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$, як і в плоскій монохроматичній хвилі.

Аналогічно, з (3.10):

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}], \quad (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) = 0$$

3.2. Випадкові поля випромінювання

Основні характеристики випадкових полів. Монохроматичні хвилі являють дуже ідеалізований випадок хвильового поля. Найчастіше в природі ми зустрічаємось із суперпозиціями полів, створених випадковими реалізаціями випромінювачів (атомів, молекул тощо). Фізичний опис процесу вимірювання цих величин має справу з обчисленням середніх значень за часом або середніх за деякими просторовими масштабами. Розмір області усереднення в кожному фізичному процесі визначається окремо. Але за певних широких умов цей спосіб усереднення еквівалентний статистичному усередненню, коли замість одного поля розглядають велику кількість реалізацій — ансамбль хвильових полів — і обчислення проводять за допомогою усереднень за ансамблем¹. Цей підхід добре відомий зі статистичної механіки. Його можна застосовувати також при обчисленні електричних та магнітних величин, що вимірюють за допомогою макроскопічних приладів.

Розглянемо спочатку електромагнітне поле, для простоти не звертаючи уваги на ефекти, пов'язані з поляризацією. Тоді це поле можна описувати за допомогою скалярної функції $\phi(t)$, що представляє, наприклад, одну з компонент електричного чи магнітного поля, маючи на увазі, що інші компоненти можна розглянути аналогічно. Будемо користуватися комплексним формалізмом (див. 3.1); нагадаємо, що при цьому в виразі для густини енергії (3.8) фігурують квадрати модулів полів.

Математичний опис стохастичних полів використовує поняття випадкового процесу. Нагадаємо, що випадковий процес $\phi(t)$ заданий, якщо для будь-якого набору $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ заданий спільний розподіл ймовірностей

$$\omega(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N; t_1, t_2, \dots, t_N)$$

величин $\phi(t_1), \phi(t_2), \dots, \phi(t_N)$. Процес називають стаціонарним, якщо спільний розподіл

$$\omega(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau)$$

величин $\phi(t_1 + \tau), \phi(t_2 + \tau), \dots, \phi(t_N + \tau)$ не залежить від часового зсуву τ . Знаючи розподіл ймовірностей значень поля для будь-яких часів $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$, можна обчислювати середні від лінійних, квадратичних за полем величин тощо. Ці середні в цьому підрозділі ми позначаємо знаком $\langle \dots \rangle$. З фізичного погляду процедуру усереднення можна

¹Стаціонарні процеси, для яких часові середні збігаються з середніми за ансамблем, називають ергодичними. Дослідник має вирішити, наскільки модель ергодичного процесу адекватна конкретній фізичній ситуації.

3. Вільне електромагнітне поле

інтерпретувати, як обчислення середньоарифметичних величин за даними великої кількості експериментів-реалізацій. Така інтерпретація часто є цілком достатньою для проведення обчислень.

Для стаціонарного процесу середнє $\langle \phi(t) \rangle \equiv \langle \phi \rangle$. При розгляді випадкових полів випромінювання вважають $\langle \phi \rangle = 0$.

Важливою характеристикою випадкового процесу є кореляційна (автокореляційна) функція²:

$$A(\tau) = \langle \phi^*(t)\phi(t + \tau) \rangle \quad (3.13)$$

Для стаціонарного процесу:

$$A(-\tau) = \langle \phi^*(t)\phi(t - \tau) \rangle = \langle \phi^*(t + \tau)\phi(t) \rangle = A^*(\tau)$$

не залежить від t .

Розглянемо формально перетворення Фур'є випадкової функції:

$$\tilde{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \phi(t)$$

Щоб надати змісту цьому невластному інтегралу в разі стаціонарного випадкового процесу, для кожної реалізації можна розглядати вираз:

$$\tilde{\phi}_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} \phi(t)$$

Обчислимо для стаціонарного процесу:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}(\omega)\tilde{\phi}^*(\omega') \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i(\omega-\omega')t'} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t-t')} \langle \phi^*(t')\phi(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i(\omega-\omega')t'} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t-t')} A(t-t') \end{aligned}$$

Користуючись відомим співвідношенням:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt' e^{i(\omega-\omega')t'} = 2\pi\delta(\omega - \omega')$$

²У деяких підручниках у визначенні (3.13) від правої частини віднімають $\langle \phi(t) \rangle \langle \phi^*(t + \tau) \rangle$.

дістанемо:

$$\langle \tilde{\phi}(\omega) \tilde{\phi}^*(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') S(\omega) \quad (3.14)$$

де

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} A(\tau)$$

називають спектральною густиною (чи спектром потужності) випадкового процесу. Очевидно

$$A(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} S(\omega).$$

Когерентність. Для суперпозиції двох хвильових полів ϕ_1 та ϕ_2 сумарна інтенсивність визначається квадратичною величиною:

$$I = |\phi_1 + \phi_2|^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + 2\Re(\phi_1\phi_2^*),$$

а для середніх:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\Re\langle \phi_1\phi_2^* \rangle \quad (3.15)$$

де $I_i = \langle |\phi_i|^2 \rangle$ — інтенсивності окремих полів, $i = 1, 2$.

Розглянемо дві протилежних ситуації — повної когерентності та некогерентності двох полів.

1. Суперпозиція двох полів, що пов'язані умовою:

$$\phi_2 = \alpha\phi_1 = |\alpha|\phi_1 e^{i\delta}, \quad \text{де } \delta = \text{Arg}(\alpha).$$

В цьому випадку:

$$\langle \phi_1\phi_2^* \rangle = \phi_1\phi_2^* = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Умова зв'язку між ϕ_1 та ϕ_2 є випадком ідеальної корельованості, або *когерентності* цих полів. Такі поля можна отримати при розділенні світлового пучка в інтерферометрі, або, наприклад, у разі двох монохроматичних радіоджерел, що мають однакову частоту.

2. Суперпозиція двох незалежних полів, генерованих двома незалежними випадковими випромінювачами:

$$\langle \phi_1\phi_2^* \rangle = \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2^* \rangle$$

Як правило, для хвильового випадкового поля його середнє значення є нуль:

$$\langle \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 \rangle = 0,$$

тому $\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle = 0$, і загальна інтенсивність є сумою інтенсивностей окремих випромінювачів:

$$I = I_1 + I_2.$$

Випромінювання двох різних природних джерел світла є некогерентним.

Величину $\Gamma = \langle \phi_1 \phi_2^* \rangle$, яку можна вимірювати за допомогою радіофізичних та оптичних пристроїв, називають *функцією взаємної когерентності*. Тут ϕ_1 та ϕ_2 можуть бути двома різними полями, або значеннями одного й того ж поля у різних точках:

$$\phi_1 = \phi(t_1, \mathbf{r}_1), \quad \phi_2 = \phi(t_2, \mathbf{r}_2)$$

Величину

$$\gamma = \frac{\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle}{|\phi_1| |\phi_2|}, \quad \text{де } |\phi_i| \equiv \sqrt{\langle \phi_i \phi_i^* \rangle}, \quad i = 1, 2,$$

називають *ступенем взаємної когерентності*. Саме ця величина визначає контрастність смуг в інтерференційній картині від двох пучків світла.

Оскільки, за нерівністю Коші-Буняковського¹, $|\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle| \leq |\phi_1| |\phi_2|$, маємо $|\gamma| \leq 1$.

Поляризація випромінювання. При розгляді поляризації треба зважати на векторну природу польових функцій, зокрема, напруженості електричного поля. Зауважимо, що для фіксованого напрямку випромінювання досить розглядати лише електричне поле; воно визначає також і вектор напруженості магнітного поля.

Розглянемо поле випромінювання, що поширюється в напрямку осі x_3 , з напруженістю електричного поля $\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0)$, причому будемо вважати, що поле є суперпозицією монохроматичних хвиль $\sim e^{-i\omega t}$ з близькими частотами. Напрямок вектора \mathbf{E} , що є ортогональним напрямку поширення хвилі, визначає поляризацію (рис. 3.1).

Для випадкового поля \mathbf{E} введемо тензор поляризації:

¹Для будь-якого комплексного λ величина $Z = \langle (\phi + \lambda\psi)(\phi^* + \lambda^*\psi^*) \rangle$ — невід'ємна. Покладемо $\lambda = -\langle \psi\phi^* \rangle / \langle |\psi|^2 \rangle$, тоді $Z = \langle |\phi|^2 \rangle - |\langle \psi\phi^* \rangle|^2 / \langle |\psi|^2 \rangle$, звідки й випливає потрібне.

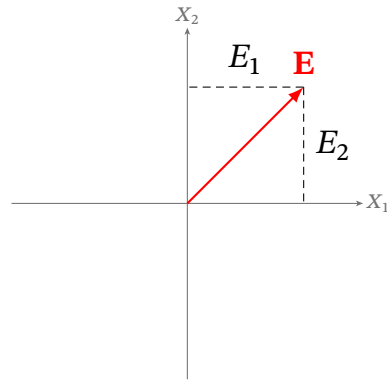


Рис. 3.1. Напрямок вектора \mathbf{E} визначає поляризацію хвилі.

$$\rho_{ij} = \frac{\langle E_i E_j^* \rangle}{\langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.16)$$

Очевидно, матриця $\|\rho\|$ є ермітовою, а її шпур (слід) дорівнює одиниці:

$$\rho_{ji} = \rho_{ij}^*, \quad \rho_{11} + \rho_{22} = 1 \quad (3.17)$$

Для цілком поляризованого випромінювання маємо $E_i = N_i f(t)$, де f може бути випадковою функцією, але вектор N_i , що визначає напрямок поля, є фіксованим. В цьому випадку ρ_{ij} пропорційне $N_i N_j^*$:

$$\det \|\rho\| = 0 \quad (3.18)$$

У випадку природного світла присутні усі можливі поляризації, що є рівноправними, причому $\langle E_1 E_2^* \rangle = 0$, $\langle |E_1|^2 \rangle = \langle |E_2|^2 \rangle$. В цьому разі:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

В загальному випадку визначник матриці $\|\rho\|$ є:

$$\det \|\rho\| = \rho_{11} \rho_{22} - |\rho_{12}|^2 = \frac{\langle |E_1|^2 \rangle \langle |E_2|^2 \rangle - |\langle E_1 E_2^* \rangle|^2}{(\langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle)^2}$$

Оскільки $|\langle E_1 E_2^* \rangle|^2 \leq \langle |E_1|^2 \rangle \langle |E_2|^2 \rangle$, цей визначник додатний:

$$\det \|\rho\| \geq 0$$

З іншого боку, очевидно:

$$\det \|\rho\| \leq \frac{\langle |E_1|^2 \rangle \langle |E_2|^2 \rangle}{(\langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle)^2} \leq \frac{1}{4}$$

Оскільки область значень $\det \|\rho\|$ є відрізком $[0, 1/4]$, можна записати:

$$\det \|\rho\| = \frac{1}{4} (1 - p^2), \quad \text{де } 0 \leq p \leq 1 \quad (3.19)$$

де параметр p називають *ступінню поляризації*; він приймає значення від 0 (неполяризоване світло) до 1.

Завдяки властивості (3.17) (ермітовості), власні числа λ_1, λ_2 матриці ρ_{ij} є дійсними, причому $\det \|\rho\| = \lambda_1 \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Зважаючи на (3.19), добуток власних чисел додатний, тобто вони мають один знак. Звідси легко бачити, що ці числа є додатними. Якщо матриця $\|\rho\|$ — дійсна, її можна привести до діагонального виду $\|\rho\| = \text{diag}(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ за допомогою просторових поворотів. Частку $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$ називають *коефіцієнтом деполіризації*.

Параметри Стокса. Виходячи з властивостей тензора поляризації, поданих формулою (3.16), його компоненти ρ_{ij} можна виразити через три незалежні дійсні параметри Стокса ξ_1, ξ_2, ξ_3 , які приймають значення від -1 до 1 :

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}(1 + \xi_3), \quad \rho_{22} = \frac{1}{2}(1 - \xi_3), \quad \rho_{12} = \frac{1}{2}(\xi_1 - i\xi_2) = \rho_{21}^*$$

Очевидно:

$$\det \|\rho\| = \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)$$

$$p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad 0 \leq \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq 1$$

Розглянемо стани поляризації для деяких полів, що відповідають різним параметрам Стокса.

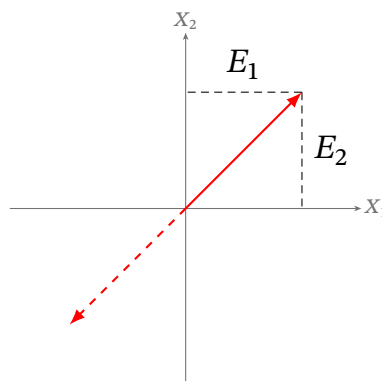
- Лінійна поляризація під кутом 45° , тобто $E_1 = \pm E_2$:

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \frac{1}{2} \rightarrow \xi_3 = 0; \quad \text{Im } \rho_{12} = 0 \rightarrow \xi_2 = 0;$$

Таким чином:

$$\xi_1 = \pm 1, \quad \xi_3 = \xi_2 = 0$$

Рис. 3.2. Лінійна поляризація під кутом 45° (випадок $E_1 = E_2$).



- Колова поляризація $E_1 = Ae^{-i\omega t}$, $E_2 = \pm iE_1$.
Як видно з поведінки дійсних частин компонент, вектор \mathbf{E} обертається в площині $X_1 - X_2$. Маємо:

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{22} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{12} = \mp \frac{i}{2}$$

Звідси:

$$\xi_1 = \xi_3 = 0, \quad \xi_2 = \pm 1$$

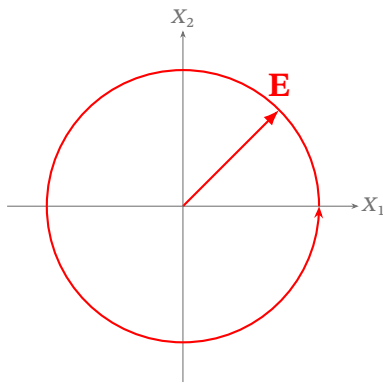


Рис. 3.3. Колова поляризація (випадок $E_2 = iE_1$, обертання вектора \mathbf{E} проти годинникової стрілки).

- Лінійна поляризація вздовж однієї з осей $E_1 \neq 0, E_2 = 0$ або $E_2 \neq 0, E_1 = 0$:

$$\rho_{11} = 1, \quad \rho_{22} = 0 \rightarrow \xi_3 = 1,$$

або

$$\rho_{11} = 0, \quad \rho_{22} = 1 \rightarrow \xi_3 = -1,$$

при цьому $\rho_{12} = 0 \rightarrow \xi_1 = \xi_2 = 0$.

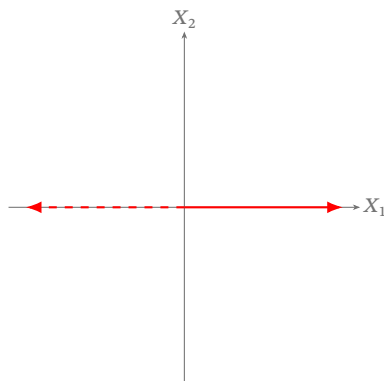


Рис. 3.4. Лінійна поляризація вздовж X_1 (випадок $E_2 = 0$).

Таким чином:

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \pm 1$$

- Еліптична поляризація — загальний випадок: $E_2 = Ae^{i\delta}E_1$ з довільною амплітудою A та зсувом фаз δ . Тоді кінець вектора \mathbf{E} описує еліпс у площині X_1 – X_2 , а компоненти тензора поляризації є нетривіальними:

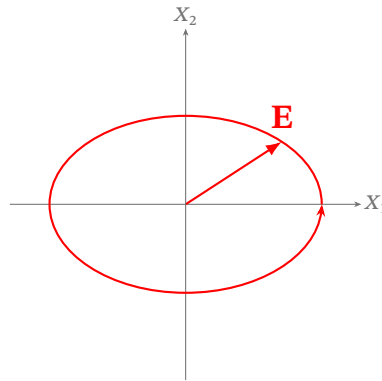
$$\rho_{11} = \frac{1}{1+A^2}, \quad \rho_{22} = \frac{A^2}{1+A^2}, \quad \rho_{12} = \frac{Ae^{-i\delta}}{1+A^2}$$

Звідси всі три параметри Стокса, взагалі кажучи, відмінні від нуля:

$$\xi_3 = \frac{1-A^2}{1+A^2}, \quad \xi_1 = \frac{2A \cos \delta}{1+A^2}, \quad \xi_2 = \frac{2A \sin \delta}{1+A^2}$$

причому $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$. Лінійна ($\delta = 0, \pi$) та кругова ($A = 1, \delta = \pm\pi/2$) поляризації є граничними випадками.

Рис. 3.5. Еліптична поляризація.



Сфера Пуанкаре. Параметри Стокса (ξ_1, ξ_2, ξ_3) зручно інтерпретувати як декартові координати точки на сфері радіуса $r = 1$ (ступінь поляризації). Стан поляризації цілком поляризованого випромінювання ($r = 1$) однозначно задається точкою на одиничній сфері $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ — *сфері Пуанкаре* (рис. 3.6)¹. Лінійні та кругові поляризації займають на ній особливі положення (полюси та точки екватора), тоді як еліптична поляризація відповідає всім решта точкам поверхні. Частково поляризоване світло зображується точкою *всередині* сфери, а неполяризоване — її центром.

Вигляд поляризації у площині X_1 – X_2 повністю визначається двома кутами: кутом нахилу великої осі $\psi \in (-90^\circ, 90^\circ)$ та кутом еліптичності $\chi \in (-45^\circ, 45^\circ)$, де $\text{tg } \chi = b/a$ — відношення малої півосі до великої, зі

¹Сфера Пуанкаре перетворює задачу про поляризацію на *задачу обертань цієї сфери*: дія кожного поляризаційного елемента (фазова пластинка, обертач тощо) описується поворотом сфери на певний кут навколо певної осі. Це дозволяє наочно й без громіздких обчислень передбачати результат дії будь-якої оптичної системи на поляризоване світло.

знаком що визначає напрямок обертання ($\chi > 0$ — проти годинникової стрілки). Зв'язок цих кутів з параметрами Стокса:

$$\xi_1 = \cos 2\chi \cos 2\psi, \quad \xi_2 = \sin 2\chi, \quad \xi_3 = \cos 2\chi \sin 2\psi$$

Обернені формули:

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \chi = \frac{1}{2} \arcsin \xi_2$$

Таким чином, кути ψ і χ грають роль довготи й широти на сфері Пуанкаре. Граничні випадки: $\chi = 0$ — лінійна поляризація під кутом ψ ; $\chi = \pm 45^\circ$ — кругова.

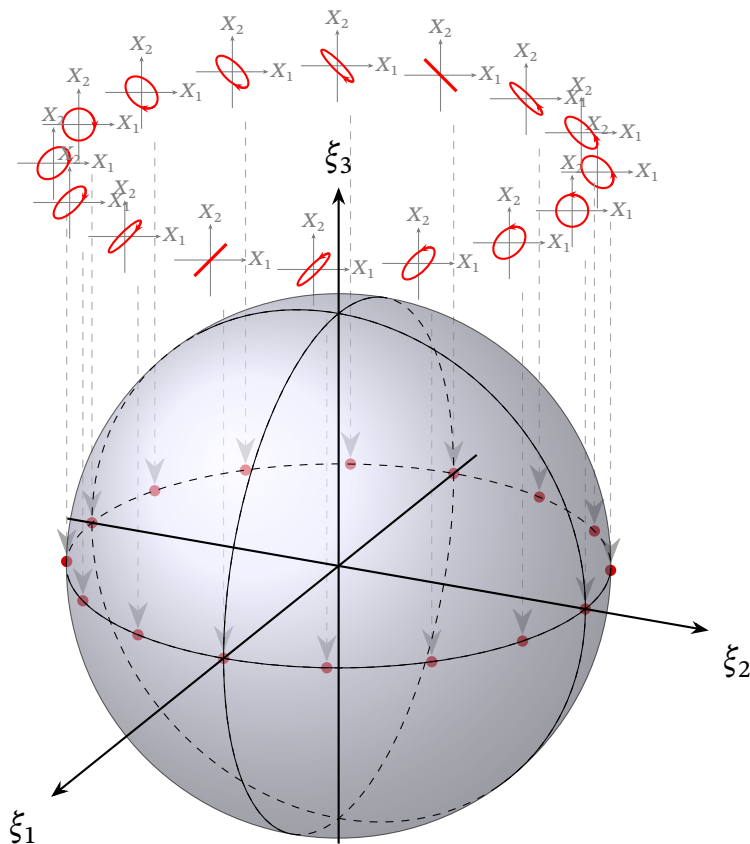


Рис. 3.6. Сфера Пуанкаре: геометричне представлення параметрів Стокса. Координати (ξ_1, ξ_2, ξ_3) визначають точку на сфері для повністю поляризованого світла ($p = 1$). На рисунку показано як змінюється характер поляризації вздовж екватора.

3.3. Співвідношення між тривалістю сигналу та шириною його спектру

Міркування цього розділу застосовні до будь-яких сигналів чи хвильових полів, що можна аналізувати за допомогою перетворення

Фур'є, зокрема, до хвильових пакетів, які є суперпозицією плоских хвиль з різними частотами.

Нехай маємо деякий сигнал (чи хвильове поле у деякій фіксованій точці), який описуємо за допомогою функції $\phi(t)$ (взагалі кажучи, комплексної) від дійсної змінної t , причому для цієї функції існує перетворення Фур'є:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.20)$$

Вважатимемо, що $\phi(t)$ та $\tilde{\phi}(\omega)$ досить швидко спадають, якщо відповідно $|t| \rightarrow \infty$ та $|\omega| \rightarrow \infty$.

Введемо величини, що характеризують тривалість сигналу Δt та ширину його спектру $\Delta\omega$. Середні значення фізичних величин, що відповідають $\phi(t)$, обчислюватимемо з вагою $|\phi(t)|^2$ в t -просторі, а в ω -просторі — з вагою $|\tilde{\phi}(\omega)|^2$, причому, не зменшуючи загальності, приймемо умову нормування¹:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt = 1. \quad (3.21)$$

Звідси, за рівністю Парсеваля (3.3) маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\phi}(\omega)|^2 d\omega = 1,$$

тобто спектр $\tilde{\phi}(\omega)$ також є нормованим.

Означимо середнє значення часу процесу:

$$\langle t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\phi(t)|^2 dt.$$

Зручно вибрати відлік часу таким чином, щоб $\langle t \rangle = 0$.

Природно оцінити тривалість процесу $\phi(t)$ через середньоквадратичне відхилення $\sqrt{\langle t^2 \rangle}$, де

$$\langle \Delta t^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |\phi(t)|^2 dt \quad (3.22)$$

¹Умова (3.21) не зменшує загальності. Якщо її не накладати, усі міркування проводяться аналогічно, але у визначеннях середніх потрібно було б ділити на

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt.$$

У ω -просторі середнє значення частоти ϵ :

$$\langle \omega \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\tilde{\phi}(\omega)|^2 d\omega,$$

а ширину спектра частот опишемо величиною

$$\langle \Delta\omega^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |\tilde{\phi}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.23)$$

Покажемо, що існує спільне обмеження на величини $\langle \Delta t^2 \rangle$ та $\langle \Delta\omega^2 \rangle$. Для цього перепишемо (3.22) через перетворення Фур'є.

$$t\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \cdot i \left(\frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} \right) \tilde{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \cdot e^{-i\omega t} \left(-i \frac{d\tilde{\phi}}{d\omega} \right),$$

тобто помноження на t індукує диференціювання у просторі частот. Тоді формулу (3.22) можна переписати так:

$$\langle \Delta t^2 \rangle = \int dt \cdot t^2 |\phi(t)|^2 = \int d\omega \left| \frac{d\tilde{\phi}}{d\omega} \right|^2 \quad (3.24)$$

де застосовано рівність Парсеваля (3.3).

Для будь-якого дійсного x :

$$0 \leq \int d\omega \left| x \frac{d\tilde{\phi}}{d\omega} + (\omega - \omega_a) \tilde{\phi} \right|^2 \equiv \int d\omega \left(x \frac{d\tilde{\phi}}{d\omega} + (\omega - \omega_a) \tilde{\phi} \right) \left(x \frac{d\tilde{\phi}^*}{d\omega} + (\omega - \omega_a) \tilde{\phi}^* \right).$$

Звідси, після застосування усереднення, за допомогою (3.23) та (3.24), маємо:

$$0 \leq x^2 \langle \Delta t^2 \rangle + \langle \Delta\omega^2 \rangle + x \int d\omega (\omega - \omega_a) \left[\frac{d\tilde{\phi}}{d\omega} \tilde{\phi}^* + \frac{d\tilde{\phi}^*}{d\omega} \tilde{\phi} \right].$$

Вираз у квадратних дужках в останньому доданку є повною похідною, тому інтеграл у правій частині нерівності перетворимо так:

$$\int d\omega (\omega - \omega_a) \frac{d}{d\omega} (\tilde{\phi} \tilde{\phi}^*) = - \int d\omega |\tilde{\phi}|^2 \frac{d}{d\omega} (\omega - \omega_a) = - \int d\omega |\tilde{\phi}|^2 = -1.$$

Таким чином:

$$x^2 \langle \Delta t^2 \rangle + \langle \Delta\omega^2 \rangle - x \geq 0.$$

Це співвідношення має виконуватися для будь-яких x , тому дискримінант квадратного тричлена має бути від'ємним. Звідси маємо нерівність:

$$\langle \Delta t^2 \rangle \cdot \langle \Delta \omega^2 \rangle \geq \frac{1}{4}, \quad (3.25)$$

яку часто називають *співвідношенням невизначеностей*¹.

Слід підкреслити, що співвідношення невизначеностей (3.25) було отримано для конкретних оцінок тривалості процесу (3.22) та ширини спектра частот (3.23). З цього співвідношення випливає, що сигнал, близький до монохроматичного, тобто такий, що має малий розкид частот, має бути досить тривалим. Навпаки, короткочасний сигнал має широкий спектр частот. Нерівність, аналогічну (3.25), можна отримати для довжини хвильового пакета у певному напрямі та ширини інтервалу відповідних хвильових векторів.

3.4. Загальний розв'язок рівнянь вільного поля

Далі буде отримано загальний розв'язок рівнянь Максвелла за відсутності джерел ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$). В цьому разі система рівнянь поля є однорідною й описує вільні електромагнітні хвилі. *Загальний розв'язок неоднорідних рівнянь* Максвелла (за наявності зарядів та струмів) може бути побудований як суперпозиція *загального розв'язку однорідних рівнянь вільного поля та часткового розв'язку неоднорідних рівнянь*.

Скористуємось калібруванням Гамільтона (2.12):

$$\phi = 0 \quad (3.26)$$

З рівняння (3.11) за умови $\rho = 0$ маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{A}) = 0$$

Відкидаючи ненульові розв'язки, які не залежать від часу (що описують статичні поля, а не електромагнітні хвилі), дістанемо:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (3.27)$$

За цією умовою рівняння (2.14) зводиться до однорідного хвильового рівняння:

¹У квантовій механіці співвідношення (3.25) має аналог у вигляді зв'язку між тривалістю процесу та невизначеністю енергії. У випадку довжини пакета та розкиду хвильових векторів квантовий відповідник (3.25) — співвідношення невизначеностей для імпульсу та координати.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (3.28)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (3.28) в усьому просторі за допомогою просторового перетворення Фур'є:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{r} \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \quad (3.29)$$

Обернене перетворення:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) \quad (3.30)$$

дозволяє знайти напруженості електромагнітного поля за формулами (2.1) та (2.2) за відомим $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$.

Дія оператора Лапласа:

$$\nabla^2 \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \nabla^2 (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (-k^2) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$$

індукує домноження Фур'є-образу на $(-k^2)$. Тому з рівняння (3.28) дістаємо:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (3.31)$$

де $\omega_{\mathbf{k}} = ck = c|\mathbf{k}|$.

Рівняння (3.27) дає умову поперечності:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (3.32)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.31) запишемо у вигляді:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{C}_1(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} + \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (3.33)$$

де в силу (3.32):

$$\mathbf{C}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$$

Звідси розв'язок хвильового рівняння (3.28) має вигляд:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} (\mathbf{C}_1(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} + \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (3.34)$$

Оскільки вихідне поле $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ є дійсним, функції $\mathbf{C}_1(\mathbf{k})$ та $\mathbf{C}_2(\mathbf{k})$ не є незалежні. Маємо:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{A}^*(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} (\mathbf{C}_1^*(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{C}_2^*(\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

Після заміни $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ легко отримати:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \{ \mathbf{C}_1^*(-\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{C}_2^*(-\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

де враховано $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}| = \omega(-\mathbf{k})$.

Порівнюючи це з (3.34) і беручи до уваги незалежність $e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$ та $e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}$, отримаємо:

$$\mathbf{C}_1^*(-\mathbf{k}) = \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) \quad \text{або} \quad \mathbf{C}_1(\mathbf{k}) = \mathbf{C}_2^*(-\mathbf{k}), \quad (3.35)$$

причому $\mathbf{C}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$.

Подамо цей розв'язок у дещо іншій формі, виділивши лоренц-інваріантні комбінації $\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$.

У першому доданку в (3.34) за допомогою заміни $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ зробимо очевидні перетворення:

$$\int \mathbf{C}_1(\mathbf{k})e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}d^3\mathbf{k} = \int \mathbf{C}_1(-\mathbf{k})e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}d^3\mathbf{k} = \int \mathbf{C}_2^*(\mathbf{k})e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}d^3\mathbf{k}.$$

Позначаючи $\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) = \mathbf{C}_1^*(-\mathbf{k})$, маємо представлення розв'язку у вигляді:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + \mathbf{a}^*(\mathbf{k})e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}) d^3\mathbf{k} \quad (3.36)$$

Формула (3.36) з умовою поперечності $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) = 0$ подає загальний розв'язок хвильового рівняння (3.28) з умовою (3.27).

Доданок, що містить $e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, називають додатно-частотною частиною поля, а комплексно-спряжений йому доданок — від'ємно-частотною частиною. Представлення (3.36) називають *розбиттям на додатно-частотні та від'ємно-частотні компоненти*¹.

Як бачимо з (3.36), стан вільного електромагнітного поля визначається, з огляду на умову поперечності $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$, двома комплексними функціями від трьох змінних \mathbf{k} , або — еквівалентно — чотирма дійсними функціями від \mathbf{k} . Кількість цих незалежних функцій (яка відповідає степеням вільності поля) така ж, як у задачі Коші згідно з п. 2.3.

Кожному \mathbf{k} відповідає плоска хвиля $\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ — частковий розв'язок рівняння (3.28), причому напрямок вектора $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ задає поляризацію.

¹Розбиття сигналу на додатно-частотні та від'ємно-частотні компоненти використовують у цифровій обробці сигналів.

Розклад поля на осцилятори. За допомогою заміни $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ у від'ємно-частотній частині перепишемо (3.36) у вигляді:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} (\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{a}^*(-\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (3.37)$$

Згідно з (2.2), (2.1) та калібрувальною умовою (3.26):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} - \mathbf{a}^*(-\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (3.38)$$

Обчислимо енергію електричного поля за допомогою формули Парсеваля:

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 dV = \\ &= \frac{1}{8\pi c^2} \int d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}}^2 |\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} - \mathbf{a}^*(-\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}|^2 = \\ &= \frac{1}{8\pi c^2} \int d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}}^2 [\mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) + \mathbf{a}^*(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k}) - \\ &\quad - 2\Re(\mathbf{a}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t})] \end{aligned}$$

Оскільки:

$$\int d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}^*(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}),$$

маємо:

$$W_E = \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}}^2 [\mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) - \Re(\mathbf{a}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t})] \quad (3.39)$$

Аналогічно:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} [\mathbf{k} \times (\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{a}^*(-\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

а енергія магнітного поля:

$$W_B = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{k} \times (\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{a}^*(-\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t})|^2 d^3\mathbf{k}$$

Оскільки $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) = 0$, маємо:

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k})|^2 = \mathbf{k}^2 \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}),$$

а також:

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k})] \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{a}(-\mathbf{k})] = \mathbf{k}^2 \mathbf{a}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k}).$$

Звідси, аналогічно (3.39):

$$W_B = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{k} \mathbf{k}^2 [\mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) + \Re(\mathbf{a}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t})] \quad (3.40)$$

Оскільки $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$, загальна енергія вільного електромагнітного поля:

$$W = W_E + W_B = \frac{1}{2\pi c^2} \int d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) \quad (3.41)$$

Подано цей вираз через нові змінні:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2c\sqrt{\pi}} [\mathbf{a}^*(\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}] \quad (3.42)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2ic\sqrt{\pi}} [\mathbf{a}^*(\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} - \mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}] \quad (3.43)$$

Звідси:

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}) = c\sqrt{\pi} \left[\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} - i\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \right] e^{i\omega_{\mathbf{k}}t},$$

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{k}) = c\sqrt{\pi} \left[\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} + i\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \right] e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}.$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

За допомогою цих співвідношень отримаємо такий вираз для загальної енергії поля (3.41):

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2), \quad (3.44)$$

що має вигляд гамільтоніана континуальної системи осциляторів з частотою $\omega_{\mathbf{k}}$. Цю формулу називають *розкладом поля на осцилятори*. Зауважимо, що для кожного \mathbf{k} :

$$\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{P}_{\mathbf{k}}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}.$$

що впливає як з гамільтонової форми рівнянь руху відповідно до (3.41), так і безпосередньо з рівнянь (3.42), (3.43). «Координати» задовольняють рівнянням:

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = 0$$

та описують коливання поля з частотою $\omega_{\mathbf{k}}$ ¹.

Це означає, що, кожна мода поля з хвильовим вектором \mathbf{k} поводить-ся як незалежний гармонічний осцилятор з частотою $\omega_{\mathbf{k}}$. Хоча таке представлення електромагнітного поля в класичній електродинаміці видається не більш ніж зручним математичним описом, але воно має принципове значення при переході до квантової теорії. Поле набу-ває вигляду суми незалежних осциляторів, що дозволяє застосувати стандартну процедуру квантування, відпрацьовану для систем зі скінченним числом ступеней свободи.

Задачі

3.1. У хвильовому полі

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{k} \Phi(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)}$$

закон дисперсії заданий рівнянням

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_0 + \mathbf{V} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0).$$

Покажіть, що модуль поля має вид

$$|\phi(t, \mathbf{r})| = F(\mathbf{r} - \mathbf{V}t).$$

3.2. Знайти умову на поле $\varphi(t)$ (див. п. 3.3), коли співвідношення невизначеностей (3.25) перетворюється на точну рівність:

$$\langle \Delta t^2 \rangle \langle \Delta \omega^2 \rangle = \frac{1}{4}.$$

¹Ці рівняння повністю збігаються з рівняннями гармонічного осцилятора з класичної механіки:

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2 q, \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0.$$

4

Випромінювання

Як було показано в розділі 3, рівняння Максвелла допускають розв'язки, що описують поля, які існують незалежно від своїх джерел і поширюються у вакуумі зі швидкістю світла. Поле ж нерухомого заряду або заряду, що рухається рівномірно, спадає на великих відстанях як $\frac{1}{r^2}$, і потік енергії крізь замкнену поверхню дорівнює нулю. Протилежна ситуація виникає, коли заряд рухається з прискоренням: тоді з'являється складова поля, що спадає як $\frac{1}{r}$ і переносить ненульовий потік енергії на нескінченність. Саме цей процес і називають випромінюванням.

З цієї причини нас насамперед цікавитиме характер поля на великих відстанях від системи: $r \gg \lambda$, де $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ — довжина хвилі; також вважаємо, що r значно більше за розміри системи, що випромінює. Цю область називають хвильовою зоною, або зоною випромінювання. Тут поле можна подати як суперпозицію сферичних хвиль $\sim \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$, де $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$. Похідні від хвильового поля в основному визначаються експоненціальним співмножником. Зокрема:

$$\nabla \left(\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \right) = i\mathbf{k} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

де позначено:

$$\mathbf{k} = nk = \mathbf{n} \frac{\omega}{c}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Другий доданок у хвильовій зоні значно менший за перший, оскільки $k = \frac{2\pi}{\lambda} \gg \frac{1}{r}$. Відповідно, на поверхні сфери радіуса $r \gg \lambda$ на невеликих, порівняно з r , ділянках хвилі можна наближено вважати плоскими. З рівнянь Максвелла випливають співвідношення, аналогічні формулам для плоских хвиль:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}].$$

Ці співвідношення справедливі у хвильовій зоні будь-якої обмеженої системи з точністю до членів $\frac{1}{r}$ включно; лише ці члени дають нену-

льовий внесок у потік енергії за $r \rightarrow \infty$, і з'являються вони виключно для прискорених зарядів.

Природним відправним пунктом є знаходження поля окремого прискореного заряду. Розв'язок хвильового рівняння для потенціалів, що задовольняє умову причинності, виражається через запізнюючий час і відомий як потенціали Лієнара-Віхерта; з них безпосередньо випливають напруженості полів і формула для потужності випромінювання.

4.1. Поле прискореного заряду

Потенціали Лієнара-Віхерта. Для точкового заряду q з траєкторією $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q(t)$ густина заряду і густина струму мають вигляд:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = q\dot{\mathbf{r}}_q(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)), \quad (4.2)$$

де δ^3 — тривимірна δ -функція.

За загальними формулами (2.39), (2.40), (2.41) для потенціалів:

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{2}{c} \int dt' \int d^3\mathbf{r}' \delta \left[(t - t')^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \right] \theta(t - t') \rho(t', \mathbf{r}'),$$

Враховуючи (4.1), дістанемо:

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{2q}{c} \int dt' \delta \left[(t - t')^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t'))^2 \right] \theta(t - t').$$

Підінтегральна функція відмінна від нуля при $t' = t_q(t, \mathbf{r})$, де t_q є розв'язком рівняння:

$$c(t - t_q) = R_q, \quad R_q = |\mathbf{R}_q|, \quad \mathbf{R}_q = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_q), \quad (4.3)$$

яке пов'язує час випромінювання сигналу t_q (запізнюючий час) у точці $\mathbf{r}_q(t_q)$ та час t приймання сигналу у точці \mathbf{r} (див. рис. 4.1). За властивістю δ -функції від складного аргументу:

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{r}) &= \frac{2q}{c} \left[\frac{d}{dt'} \left((t - t')^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t'))^2 \right) \right]_{t'=t_q}^{-1} = \\ &= \frac{q}{c} \left[(t - t') - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{r}}_q(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')) \right]_{t'=t_q}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Перепишемо це у компактнішому виді, врахувавши зв'язок (4.3):

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{R_q - (\mathbf{R}_q \cdot \mathbf{v}_q)/c}, \quad (4.5)$$

тут і далі позначено $\mathbf{v}_q = \dot{\mathbf{r}}_q(t_q)$.

Аналогічно отримуємо вектор-потенціал:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{v}_q(t_q)}{c[R_q - (\mathbf{R}_q \cdot \mathbf{v}_q)/c]}. \quad (4.6)$$

Формули (4.5), (4.6) подають *потенціали Лієнара-Віхерта* точкового заряду. Звідси, за формулами (2.1), (2.2) отримуємо напруженості полів.

Якщо заряд рухається зі сталою швидкістю $\mathbf{v}_q = \text{const}$, обчислення напруженостей полів виходячи з (4.5), (4.6) дає нульовий потік на нескінченності, оскільки поля спадають, як $1/r^2$. Це найбільш очевидно в системі спокою заряду. Таким чином, випромінювання можливе лише для прискореного руху заряду.

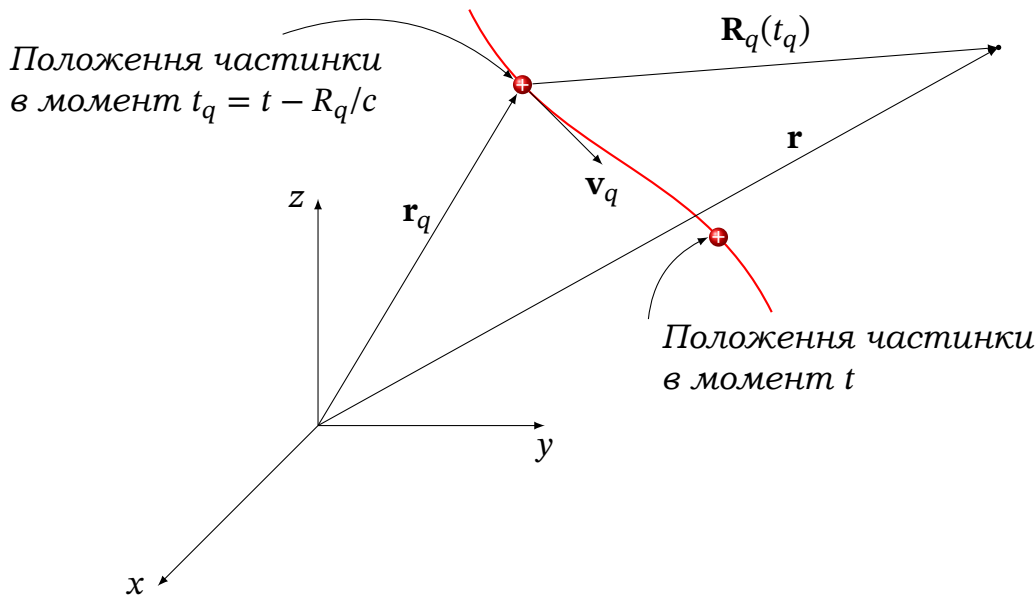


Рис. 4.1. До розрахунку запізнюючих потенціалів

Випромінювання. Нас цікавить лише та частина напруженостей полів, що спадає як $\frac{1}{r}$ на нескінченності. Це значно полегшує обчислення за формулами (2.1), (2.2). Але обчислювати \mathbf{E} за формулою (2.2) нема потреби, оскільки у хвильовій зоні:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} B^2 \mathbf{n},$$

де вектор $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ вказує напрямком випромінювання.

Обчислимо індукцію магнітного поля:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Ненульовий внесок в члени $\sim \frac{1}{r}$ дає лише величина $\mathbf{v}(t_q)$, яка залежить від \mathbf{r} через час запізнення $t_q = t_q(t, \mathbf{r})$. Похідні від t_q визначаються з рівняння (4.3), що задає цю функцію неявно:

$$\nabla t_q = \frac{\mathbf{n}_q}{cZ_q}, \quad (4.7)$$

де позначено:

$$Z_q = 1 - \frac{\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{v}_q}{c}, \quad \mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{R}_q}{R_q}.$$

На великих відстанях, відкидаючи члени порядку $\sim \frac{1}{r^2}$, дістанемо:

$$\mathbf{B} \approx -\frac{q}{c^2 R_q Z_q^3} \left[\mathbf{n}_q \times \left(\dot{\mathbf{v}}_q Z_q + \frac{1}{c} \mathbf{v}_q (\mathbf{n}_q \cdot \dot{\mathbf{v}}_q) \right) \right], \quad (4.8)$$

де $\dot{\mathbf{v}}_q = \frac{d\mathbf{v}_q}{dt_q}$.

Потужність випромінювання в тілесний кут do в напрямку \mathbf{n}_q у фіксований запізнюючий момент часу t_q є:

$$dI = (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) R_q^2 do = \frac{c}{4\pi} B^2 R_q^2 do, \quad R_q \rightarrow \infty.$$

Після дещо громіздких обчислень з використанням (4.8) отримуємо потужність випромінювання в тілесний кут do в напрямку \mathbf{n}_q :

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^2} \left(\frac{2(\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{v}_q)(\mathbf{v}_q \cdot \dot{\mathbf{v}}_q)}{cZ_q^5} + \frac{\dot{\mathbf{v}}_q^2}{Z_q^4} - \frac{\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}_q \cdot \dot{\mathbf{v}}_q)^2}{Z_q^6} \right) do. \quad (4.9)$$

Нагадаємо, що всі величини на траєкторії частинки (що входять з індексом q) обчислюються в момент часу запізнення t_q .

Як було зазначено вище, випромінює лише прискорений заряд. Це також очевидно з формули (4.9).

У випадку *нерелятивістських* рухів $|\mathbf{v}_q/c| \ll 1$:

$$dI(\mathbf{n}) = \frac{q^2}{4\pi c^3} [\dot{\mathbf{v}}_q^2 - (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}_q)^2] do = \frac{q^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \dot{\mathbf{v}}_q^2 do.$$

Повна потужність випромінювання в усіх напрямках:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{4\pi} dI(\mathbf{n}) = \frac{2q^2 \dot{\mathbf{v}}_q^2}{3c^3}. \quad (4.10)$$

В ультрарелятивістському випадку, коли швидкість частинки, що випромінює, близька до швидкості світла, значну роль відіграє вираз $1 - \frac{\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{n}}{c}$ в знаменнику формули (4.9). Якщо $1 - \frac{v_q}{c} \ll 1$, завдяки цьому виразу інтенсивність зосереджена в області малих кутів θ між напрямком швидкості $\mathbf{v}_q(t_q)$ і напрямком випромінювання \mathbf{n}_q . Якщо записати:

$$1 - \frac{\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{v}_q}{c} = 1 - \frac{v_q \cos \theta}{c} \approx 1 - \frac{v_q}{c} + \frac{\theta^2}{2}, \quad v_q = |\mathbf{v}_q|,$$

маємо оцінку кутів, для яких випромінювання найбільш ефективно:

$$\theta \approx \left(1 - \frac{v_q}{c}\right)^{1/2}. \quad (4.11)$$

Для паралельних \mathbf{v}_q та $\dot{\mathbf{v}}_q$ маємо:

$$\mathbf{B} \approx -\frac{q}{c^2 R_q Z_q^3} [\mathbf{n}_q \times \dot{\mathbf{v}}_q],$$

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}_q^2 \sin^2 \theta}{Z_q^6} do. \quad (4.12)$$

В області малих кутів (4.11) маємо:

$$dI \approx \frac{q^2}{4\pi c^3} \dot{\mathbf{v}}_q^2 \left(1 - \frac{v_q}{c} + \frac{\theta^2}{2}\right)^{-6} \theta^2 do.$$

Якщо швидкість та прискорення взаємно перпендикулярні $\mathbf{v}_q \perp \dot{\mathbf{v}}_q$ (наприклад, рух по колу), тоді з (4.9):

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left(\frac{\dot{\mathbf{v}}_q^2}{z^4} - \frac{\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}_q)^2}{z^6} \right) do, \quad (4.13)$$

тут позначено:

$$z = 1 - \frac{\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{n}}{c},$$

де $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — напрямок спостереження; у хвильовій зоні $\mathbf{n} \approx \mathbf{n}_q$, тому $z \approx Z_q$.

Коловий рух. Формулу (4.9) можна застосувати у разі руху частинки в одній площині по колу під дією однорідного магнітного поля. В цьому разі випромінювання концентрується у площині руху в межах кутів, що визначаються формулою (4.11). Внаслідок того що релятивістська частинка випромінює переважно в напрямку руху,

випромінювання складатиметься з дуже коротких імпульсів, період повторення яких дорівнює періоду обертання.

Для колового руху в магнітному полі \mathbf{B} частота обертання¹:

$$\omega_c = \frac{v_q}{r_q} = \frac{qB}{mc} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}},$$

прискорення:

$$\dot{\mathbf{v}}_q = \frac{q}{\gamma mc} [\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}] = \frac{q}{mc} \sqrt{1 - \frac{v_q^2}{c^2}} [\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}].$$

Систему координат виберемо таким чином, що:

$$\{\mathbf{v}_q(t_q)\} = v_q \{\sin \omega t_q, \cos \omega t_q, 0\}, \quad \omega = \omega_c;$$

і зафіксуємо напрямок $\mathbf{n}_q = \{\sin \theta, 0, \cos \theta\}$.

Середнє значення інтенсивності випромінювання можна отримати за допомогою інтегрування формули (4.13) по dt , причому слід перейти до інтегрування по часу запізнення:

$$dt_q = \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_q}{c}\right) dt,$$

де $t_q = t_q(t)$ неявно задано формулою (4.4).

Після тривалих обчислень дістанемо середнє (за часом) значення інтенсивності в тілесний кут $d\Omega$ в напрямку під кутом θ до площини орбіти:

$$\langle dI \rangle = \frac{q^4 B^2 v_q^2}{8\pi m^2 c^5} \left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right) \left[\frac{2 - \cos^2 \theta - \frac{v_q^2}{4c^2} \left(1 + \frac{3v_q^2}{c^2}\right) \cos^4 \theta}{\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{7/2}} \right] d\Omega.$$

4.2. Випромінювання малих систем

Дипольне випромінювання. Розглянемо систему зарядів, розмір якої L значно менший за довжину хвилі:

$$\lambda \gg L. \quad (4.14)$$

За цією умовою сигнал встигає поширитися всередині системи значно раніше, ніж відбудуться суттєві зміни у розподілі зарядів. Обчислимо потік енергії, виходячи з формули для вектор-потенціалу:

¹Ця частота, ще називається *циклотронною*, або *гіромагнітною* частотою.

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}, \mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (4.15)$$

де вважаємо, що початок координат знаходиться в області, де розташована система струмів.

Густина потоку енергії подається вектором Пойнтінга:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}].$$

На великій відстані від системи зарядів, що випромінює, можна користуватися співвідношеннями для плоских хвиль, тому:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{B}^2 \mathbf{n}, \quad (4.16)$$

де $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ — напрямок поширення хвилі.

Наша мета — оцінити головні внески в напруженості поля, що спадають як $\frac{1}{r}$, завдяки чому маємо ненульовий потік енергії через сферу великого радіуса $r \rightarrow \infty$:

$$|\mathbf{\Pi}| = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{B}|^2 \sim \frac{1}{r^2}, \quad \int \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \int r^2 \mathbf{B}^2 d\omega \neq 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Практично умова $r \rightarrow \infty$ означає, що обчислення виконують в зоні випромінювання, яка визначена умовою $r \gg \lambda$.

За умови $r \gg r'$ маємо:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

звідки

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}, \mathbf{r}'\right) dV'.$$

Розкладемо запізнюючий аргумент по малій величині $\frac{r\mathbf{n}}{r}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{дип}} + \mathbf{A}_1, \quad (4.17)$$

де утримано два перших члени розкладу:

$$\mathbf{A}_{\text{дип}} = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(t_r, \mathbf{r}') dV', \quad (4.18)$$

де $t_r = t - \frac{r}{c}$ не залежить від змінної інтегрування \mathbf{r}' ,

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(t_r, \mathbf{r}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') dV'. \quad (4.19)$$

Перетворимо (4.18), користуючись тотожністю $\operatorname{div}(x_j \mathbf{j}) = J_j + x_j \operatorname{div} \mathbf{j}$ і законом збереження заряду $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Звідси:

$$j_j = \frac{\partial}{\partial t}(x_j \rho) - \operatorname{div}(x_j \mathbf{j}).$$

Проінтегруємо це співвідношення:

$$\int j_i dV = \int x_i \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

де враховано, що поза межами системи, що розглядається, $\mathbf{j} = 0$, і на межі області, де струми відмінні від нуля, $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Підстановка цього співвідношення в (4.18) дає:

$$\mathbf{A}_{\text{дип}} = \frac{\dot{\mathbf{d}}(t_r)}{cr}, \quad (4.20)$$

де $\mathbf{d}(t) = \int \mathbf{r} \rho(t, \mathbf{r}) dV$ – дипольний момент системи.

Оскільки $\nabla t_r = \nabla \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{\mathbf{n}}{c}$, звідси:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_{\text{дип}} = -\frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}(t_r)]}{cr}.$$

З урахуванням (4.16) дістанемо потік енергії системи через сферу радіуса $r \gg \lambda$:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \dot{\mathbf{d}}^2 \sin^3 \theta = \frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{d}}^2(t_r). \quad (4.21)$$

Якщо випромінює система з $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$, тоді усереднена за часом потужність випромінювання пропорційна четвертому степеню частоти:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_t = \frac{\omega^4 \mathbf{d}_0^2}{3c^3}.$$

Квадрупольне і магнітодипольне випромінювання. Якщо дипольний момент системи відсутній, основний внесок у вектор-потенціал (4.17) дає наступний після дипольного член розкладу (4.19).

Скористаємося співвідношенням:

$$\operatorname{div}(x_i x_j \mathbf{j}) = x_i j_j + x_j j_i + x_i x_j \operatorname{div} \mathbf{j} = x_i j_j + x_j j_i - x_i x_j \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Для обмеженої системи струмів інтеграл від лівої частини дорівнює нулю. Звідси:

$$\int dV(x_i j_j + x_j j_i) = \int dV x_i x_j \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Диференціюючи за часом:

$$\int dV(j_i x_j + j_j x_i) = \int dV x_i x_j \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Тоді:

$$\int dV \cdot j_i x_j = \frac{1}{2} \int dV(j_i x_j - j_j x_i) + \frac{1}{2} \int dV(j_i x_j + j_j x_i).$$

Зауважимо, що перший доданок містить компоненти магнітного моменту:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dV.$$

З отриманих співвідношень та формули (4.19) випливає:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{маг.-дип.}} + \mathbf{A}_{\text{квадруп.}},$$

де:

$$\mathbf{A}_{\text{маг.-дип.}} = \frac{[\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}]}{cr}, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{A}_{\text{квадруп.}} = \{A_{\text{квадруп.},i}\}, \quad A_{\text{квадруп.},i} = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int x'_i(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})\rho' dV', \quad (4.23)$$

де штрихом позначено величини, що залежать від змінної інтегрування \mathbf{r}' . Останній доданок можна виразити через тензор квадрупольного моменту:

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})\rho dV, \quad \sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0. \quad (4.24)$$

Тоді можна записати:

$$\mathbf{A}_{\text{квадруп.}} = \frac{1}{6c^2 r} \ddot{\mathbf{D}}(t_r) + \frac{\mathbf{r}}{6c^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r^2 \rho dV, \quad (4.25)$$

де введено позначення:

$$D_i = Q_{ij} n_j, \quad \mathbf{D} = \{D_i\}. \quad (4.26)$$

Другий доданок в (4.25) виглядає як $\mathbf{r}f(r)$, тобто це градієнт від деякої функції; він не впливає на обчислення напруженості $\mathbf{B} =$

$\text{rot } \mathbf{A}$. Цей доданок можна знищити за допомогою калібрувального перетворення, тоді:

$$\mathbf{A}_{\text{квадруп.}} = \frac{\mathbf{D}(t_r)}{6c^2 r}. \quad (4.27)$$

Повний вектор-потенціал (4.18) є сумою дипольної, магніто-дипольної й квадрупольної складової:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{дип.}} + \mathbf{A}_{\text{маг.-дип.}} + \mathbf{A}_{\text{квадруп.}}$$

де відповідні співвідношення подано формулами (4.20), (4.22), (4.25).

Нехтуючи членами вищого порядку по $\frac{1}{r}$ при обчисленні $\text{rot } \mathbf{A}$, з (4.20), (4.22), (4.25), маємо:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2 r} \left([\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}] + [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}}]] + \frac{1}{6c} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{D}}] \right). \quad (4.28)$$

В цій формулі залежність від кутів входить лише через n_i , в тому числі в $D_i = Q_{ij} n_j$, де $\{n_i\} \equiv \left\{ \frac{x_i}{r} \right\} = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}$ — одиничний вектор. Інтегруючи по кутових змінних ($do = \sin \theta d\theta d\varphi$) дістанемо, через симетрію:

$$\int do \cdot n_i n_j = 0, \quad i \neq j; \quad \int do \cdot n_1^2 = \int do \cdot n_2^2 = \int do \cdot n_3^2.$$

Оскільки $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, інтегруючи по do отримаємо суму трьох однакових доданків $= 4\pi$; звідси:

$$\int do \cdot n_i n_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}. \quad (4.29)$$

Це легко перевірити й прямим обчисленням.

Очевидно,

$$\int do \cdot n_i = 0, \quad \int do \cdot n_i n_j n_k = 0 \quad (4.30)$$

(підінтегральний вираз змінює знак при зміні напрямку координатних осей, а результат інтегрування по кутах має бути незалежним від такої зміни).

Обчислимо тензор:

$$X_{ijkl} = \int do \cdot n_i n_j n_k n_l, \quad (4.31)$$

що є симетричний за усіма індексами.

Очевидно, тут можливі лише два ненульових значення компонент: коли усі індекси збігаються, наприклад $X_{3333} = \frac{4\pi}{5}$, та коли серед індексів є дві різні пари, наприклад $X_{1133} = \frac{4\pi}{15}$.

Тензор, що задовольняє цим умовам, легко побудувати шляхом симетризації квадратичних комбінацій символів Кронекера:

$$X_{ijkl} = \frac{4\pi}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (4.32)$$

Для перевірки відзначимо, що подвійна згортка дає:

$$X_{iijj} = 4\pi = \int do \cdot 1.$$

Обчислимо потік через сферу великого радіуса r , виходячи з (4.28). Квадрат першого (дипольного) доданку в (4.28) дає внесок, що вже обчислено і подано формулою (4.21). При обчисленні \mathbf{V}^2 добуток першого (дипольного) доданку в (4.28) на інші в кінцевому результаті дасть нуль в силу (4.30), оскільки тут під інтегралом з'являються лише непарні комбінації компонент n_i (нагадаємо, що квадрупольний доданок в (4.28) містить квадратичні комбінації цих компонент).

Також:

$$\begin{aligned} \int [\mathbf{n} \times [\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}]] \cdot [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{D}}] do &= \int (m_i - n_i n_j m_j) (\varepsilon_{ipq} n_p \ddot{Q}_{qr} n_r) do = \\ &= \int \ddot{m}_i \varepsilon_{ipq} n_p \ddot{Q}_{qr} n_r do = \frac{4\pi}{c} \varepsilon_{ipq} n_p \ddot{Q}_{qr} \ddot{m}_i = 0 \end{aligned}$$

де враховано симетрію Q_{qr} та формули (4.29) та (4.32). Таким чином, потужність є сумою окремих потужностей дипольного, магнітодипольного та квадрупольного внесків.

Далі маємо:

$$\int [\mathbf{n} \times [\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}]]^2 do = \int (\ddot{\mathbf{m}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{m}})^2) do = \frac{8\pi}{3} \ddot{\mathbf{m}}^2.$$

За допомогою (4.29) та (4.32) дістанемо:

$$\int [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{D}}]^2 do = \int [\ddot{\mathbf{D}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{D}})^2] do = \frac{4\pi}{5} \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl}.$$

Звідси потужність випромінювання:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{m}}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl}.$$

4.3. Розсіювання електромагнітних хвиль

Загальні поняття. Коли електромагнітна хвиля падає на систему зарядів, вони починають рухатися і стають джерелами вторинного випромінювання. Оскільки загальна енергія зберігається, це означає,

що частина енергії хвилі, що падає, переходить в енергію вторинних хвиль. Цей процес називають *розсіюванням*. Він може також супроводжуватися *поглинанням* енергії, коли частина енергії хвилі, що падає, втрачається в розсіювачі, трансформуючись в інші види енергії.

Для опису цих процесів вводять *диференціальний переріз розсіювання в тілесний кут* $d\sigma$:

$$d\sigma = \frac{dI}{\Pi}, \quad (4.33)$$

де dI — середня (за часом) енергія вторинного випромінювання за одиницю часу в тілесний кут $d\sigma$, Π — середня густина потоку енергії хвилі, що падає, яка визначається вектором Пойнтінга.

Повний переріз розсіювання σ :

$$\sigma = \int d\sigma, \quad (4.34)$$

де інтеграл береться по усіх можливих напрямках розсіяного випромінювання.

Перерізом поглинання називають величину:

$$\sigma_a = \frac{Q}{\Pi}, \quad (4.35)$$

де Q — середня енергія, що поглинається системою за одиницю часу.

Розсіювання електромагнітних хвиль точковим вільним зарядом. Опис процесу розсіювання складається з двох частин: визначаємо рух заряду під дією електромагнітної хвилі, а потім обчислюємо потужність вторинного, тобто розсіяного, випромінювання.

Нехай електричне поле хвилі, що падає, ϵ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (4.36)$$

в точці, де розташований заряд.

Будемо вважати рух заряду *нерелятивістським* ($v \ll c$), що дає змогу знехтувати магнітним полем у формулі для сили Лоренца, що діє на заряд з боку електромагнітної хвилі. Силою реакції розсіяного випромінювання також знехтуємо. Якщо інших сил тут немає, основний рух заряду буде періодичним з амплітудою:

$$r \sim \frac{v}{\omega} \ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Ця умова дозволяє відкинути доданок $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ під аргументом косинуса в (4.36). Звідси з рівнянь руху:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E},$$

отримуємо:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{q\mathbf{E}}{m\omega^2}.$$

Дипольний момент системи:

$$\mathbf{d} = q\mathbf{r} = -\frac{q^2\mathbf{E}}{m\omega^2},$$

причому:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{q^2\mathbf{E}}{m}. \quad (4.37)$$

Для нерелятивістського руху можна скористатися співвідношеннями для дипольного випромінювання. Це дає інтенсивність, випромінєну в напрямку \mathbf{n} в тілесний кут do :

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\theta, \quad (4.38)$$

де θ — кут між $\ddot{\mathbf{d}}$ та напрямком спостереження \mathbf{n} . Враховуючи (4.37):

$$dI = \frac{q^4 E^2}{4\pi m^2 c^3} \sin^2 \theta d\theta.$$

Оскільки вектор Пойнтінга хвилі, що падає, є:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}],$$

де \mathbf{n}_0 — напрямок хвилі, що падає, за визначенням перерізу (4.33) маємо:

$$d\sigma = \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta do. \quad (4.39)$$

Цікаво, що цей вираз не залежить від частоти. Повний переріз отримаємо, інтегруючи (4.39) по усіх напрямках:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2. \quad (4.40)$$

(формула Томсона). Ця формула втрачає силу, коли $\hbar\omega \gtrsim mc^2$, в цьому разі потрібно враховувати квантово-електродинамічні ефекти.

Неполяризована хвиля. Формула (3.15) дає диференціальний переріз розсіювання для фіксованого напрямку поляризації хвилі, що падає. У природному світлі присутні усі напрямки \mathbf{E} . Будемо припускати, що усі ці напрямки еквівалентні, а значить, згідно з (4.37), рівноймовірними є усі напрямки дипольного моменту з (3.15).

Зафіксуємо напрямки спостереження:

$$\mathbf{n} = \{\sin \theta_0 \cos \varphi, \sin \theta_0 \sin \varphi, \cos \theta_0\}$$

та напрямком падіння хвилі:

$$\mathbf{n}_0 = \{0, 0, 1\}.$$

Відповідно, напрямком $\mathbf{d} = \mathbf{n}_d |\dot{\mathbf{d}}|$ визначимо формулою:

$$\mathbf{n}_d = \{\cos \varphi', \sin \varphi', 0\},$$

де усі значення $\varphi' \in [0, 2\pi]$ рівноймовірні.

Для кута θ між \mathbf{n}_d та \mathbf{n} маємо:

$$\begin{aligned} \langle \sin^2 \theta \rangle &= \langle 1 - \cos^2 \theta \rangle = \langle 1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2(\varphi - \varphi_0) \rangle = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta_0). \end{aligned}$$

Звідси з (3.15) та за визначенням (4.33):

$$\langle d\sigma \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta_0) do,$$

де $do = \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi$.

Розсіювання на малих макроскопічних частинках. Якщо довжина плоскої хвилі λ , що падає, значно більша за розміри макроскопічних частинок, можна вважати поле в околі частинок однорідним. Припустимо також, що частота хвилі ω значно менша за резонансні частоти усіх складових частинки. Це дає змогу обчислювати поляризованість α частинки, яка дає зв'язок між дипольним моментом:

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}, \quad (4.41)$$

та зовнішнім однорідним полем \mathbf{E} в наближенні електростатики, тобто α не залежить від ω . Тоді за формулами дипольного випромінювання:

$$d\sigma = \frac{\omega^4 \alpha^2}{c^4} \sin^2 \theta do, \quad (4.42)$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4 \alpha^2}{c^4}. \quad (4.43)$$

Якщо поле хвилі можна вважати однорідним, але умова квазістатичності не виконується, поляризованість α залежатиме від частоти й може бути комплексною. В цьому разі:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3c^4} |\alpha|^2 \omega^4.$$

Задачі

4.1. Яка має бути просторова залежність полів у хвильовій зоні $r \gg \lambda$ за наявності випромінювання?

4.2. Чому при розгляді потужності дипольного випромінювання можна обмежитися обчисленням вектор-потенціалу \mathbf{A} та магнітної індукції \mathbf{B} на великих відстанях, не обчислюючи напруженість електричного поля?

4.3. Заряд рухається по коловій орбіті. Як зміниться потужність дипольного випромінювання при зміні частоти обертання вдвічі без зміни радіуса орбіти?

4.4. Повністю неполяризована електромагнітна хвиля розсіюється нерелятивістським зарядом під кутом ϑ до початкового напрямку поширення цієї хвилі. Знайти коефіцієнт деполаризації розсіяної хвилі. Відповідь: $\cos^2 \vartheta$.

4.5. На прискорену точкову частинку із зарядом q діє сила реакції її власного випромінювання. Усі сили, що діють на частинку, із силою реакції включно, забезпечують її фінітний рух з обмеженою швидкістю та прискоренням. Відомо, що сила реакції має вид $\mathbf{f} = \alpha \ddot{\mathbf{r}}_q$, де $\mathbf{r}_q(t)$ — траєкторія частинки. Знайти коефіцієнт α за допомогою формули для потужності випромінювання.

Вказівка: розглянути усереднені за великим періодом часу значення роботи сили \mathbf{f} та потужності випромінювання.

Відповідь: $\alpha = \frac{2q^2}{3c^3}$

Частина II

Чотиривимірне формулювання класичної електродинаміки

Рівняння Максвелла інваріантні відносно перетворень Лоренца — саме тому їх і можна записати красиво.

Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. II,
Ch. 25

5

Перетворення Лоренца як наслідок постулатів Айнштейна

У цьому розділі викладено основні поняття спеціальної теорії відносності (СТВ) та їх найбільш важливі наслідки, що охоплюють діапазон від субатомних до астрономічних масштабів. З базових принципів СТВ виведено перетворення Лоренца згідно з оригінальною роботою Айнштейна 1905 р., показано інваріантність квадрата інтервалу, розглянуто перетворення довжини та об'єму.

5.1. Простір-час, системи відліку

Спеціальна теорія відносності (СТВ) переглянула фундаментальні поняття класичної фізики. Щоб з'ясувати, у чому полягає цей перегляд, необхідно відштовхуватися від найбільш елементарних уявлень про вимірювання часу й відстаней. Виявляється, що не усі припущення ньютонівської теорії, зокрема, стосовно існування абсолютного часу та поняття одночасності, наповнені фізичним змістом.

Одним з вихідних у теорії відносності є поняття *події*, яку характеризують однією часовою та трьома просторовими координатами у певній системі відліку. Це елементарне, базове поняття, яке розкривається через взаємовідношення з іншими базовими поняттями так само як поняття точки в геометрії. Уявлення про простір-час як множину подій, яка має властивості многовиду, дозволяє розглядати в ньому кількісні співвідношення й використовувати потужний апарат математичного аналізу і диференціальної геометрії.

Будемо говорити, що визначена *система відліку* (СВ), якщо відома фізична процедура, що дозволяє однозначно зіставити будь-якій події четвірку координат — часову й три просторові координати. Практично СВ реалізують за допомогою певних технічних засобів та алгоритмів, що дозволяють визначати координати за даними спостережень, як, наприклад, в астрометричних СВ геоцентричній та геліоцентричній тощо. Поняття СВ співзвучне поняттю системи координат, але відрізняється від нього, оскільки передбачає певні, інколи ідеалізовані, фізичні дії, вимірювання тощо. У класичній (тобто, не-квантовій) теорії поля припускають, що ці вимірювання можуть бути

виконані як завгодно точно, хоча на практиці вони підлягають певним обмеженням і виконуються з певною точністю.

Далі ми будемо вважати, що **простір і час є однорідними**, а **простір є ізотропним**. Однорідність простору і часу означає, що результати будь-яких фізичних експериментів не залежать ні від розташування лабораторії, ані від часу проведення. Ізотропія означає таку незалежність від просторової орієнтації лабораторії. Однорідність простору часу та ізотропія простору — це певна ідеалізація, яка порушується, зокрема, за наявності гравітаційних полів, що вивчає загальна теорія відносності (ЗТВ). Задача фізика — визначити, наскільки ця ідеалізація можлива в умовах конкретного експерименту.

Наступна ідеалізація — *інерціальні системи відліку*, тобто такі, в яких виконується закон інерції: *декартові координати матеріальної точки, на яку не діють зовнішні сили (або сума сил дорівнює нулю), є лінійними функціями часу*. Ми припускаємо, що інерціальні системи існують, а просторові співвідношення в інерціальних СВ відповідають аксіомам евклідової геометрії. Евклідова аксіоматика (знов-таки, *за відсутності гравітаційних ефектів, які вивчає ЗТВ*) підтверджується високоточними експериментами. В кожній інерціальній СВ визначені інтервали часу та відстані між будь-якими двома подіями, і відповідні вимірювальні процедури не призводять до суперечностей. Евклідовість простору дозволяє, зокрема, застосовувати прямокутні декартові системи координат в інерціальних СВ, де квадрат довжини відрізка прямої дорівнює, за теоремою Піфагора, сумі квадратів проєкцій відрізка на координатні осі.

Інерціальну систему відліку в СТВ можна уявити як сукупність спостерігачів з годинниками, що щільно заповнюють простір і є нерухомими один відносно одного, причому годинники синхронізовані¹. Нерухомість спостерігачів один відносно одного можна перевірити, вимірюючи час від часу затримку сигналів, що генерують передавачі біля кожного спостерігача. Це також дає змогу визначити відстань між спостерігачами, знаючи швидкість світла у вакуумі c , яка є однаковою в усіх інерціальних системах — це один з базових постулатів СТВ, який перевірено численними експериментами. Але це не означає, що числове значення відстані між спостерігачами буде одне й те саме в різних СВ, що рухаються одна відносно іншої.

Спеціальна теорія відносності розглядає передусім усі СВ, які вважаємо інерціальними². При розгляді перетворень між інерціальними

¹Тут робиться припущення, що існують добре визначені процедури, які визначають відносну нерухомість спостерігачів та синхронізацію; вони обговорюються далі. Це припущення нетривіальне; ці процедури, наприклад, не завжди можливі в ЗТВ за наявності гравітаційних полів.

²Проте, рівняння СТВ можна узагальнити на довільні СВ та координатні системи;

системами, які розглянуто далі, також зазвичай вважаємо, що просторові координати подій в інерціальних СВ визначені в прямокутній декартовій системі.

Однакові нерухомі відносно деякої СВ годинники вважаються синхронізованими, якщо в них визначений спільний початок відліку. Синхронізацію в заданій СВ можна провести, наприклад, за допомогою електромагнітних сигналів. Розглянемо одну з можливих процедур синхронізації (за Айнштайном). Нехай події Π_1 та Π_2 супроводжуються світловими спалахами, а спостерігач, нерухомий відносно СВ, що знаходиться на прямій посередині¹ між просторовими точками подій, реєструє ці спалахи. Тоді події Π_1 та Π_2 є одночасними в даній СВ, якщо цей спостерігач реєструє сигнали від спалахів одночасно.

Розглянемо інший, еквівалентний, спосіб синхронізації за допомогою світлових сигналів. Нехай спостерігачі A та B зі своїми годинниками нерухомі відносно деякої СВ. Зафіксуємо початок відліку годинника A та виправимо відліки годинника B , щоб можна було вважати його синхронізованим з A . Щоб зіставити покази годинників A та B , спостерігач A у точці x_A посилає світловий сигнал в момент t_{A1} (за своїм годинником). Цей сигнал відбивається від дзеркала біля спостерігача B (подія Π_1). Спостерігач A реєструє відбитий сигнал у своєму околі в момент t_{A2} . Позначимо $t_{A0} = (t_{A1} + t_{A2})/2$. Будемо вважати, що, за означенням, подія Π_1 є одночасною з подією Π_2 . Досі тут ніде не фігурували покази годинника B . Але тепер можна встановити початок відліку годинника B так, щоб події Π_2 за його показами також відповідав час t_{A0} . Описана процедура дає змогу встановити однаковий початок відліку годинників усіх спостерігачів, нерухомих один відносно одного. Підкреслимо, що *процедура синхронізації стосується тільки однієї СВ*.

Наприкінці відзначимо важливі відмінності СТВ від ньютонівської теорії:

- (i) в СТВ події, що є одночасними в одній інерціальній СВ, можуть не бути одночасними в іншій інерціальній СВ;
- (ii) якщо двоє спостерігачів рухаються один відносно одного, їх годинники неможливо синхронізувати.

Це суттєво відрізняє СТВ від ньютонівського підходу з абсолютним часом, загальним для усіх систем відліку. Але саме СТВ узгоджується з фізичним досвідом.

однак при цьому вигляд рівнянь може змінитися.

¹Як зазначено вище, спостерігач може вимірювати відстані між нерухомими точками за допомогою світлових сигналів та порівнювати їх між собою.

5.2. Перетворення Лоренца для одновимірних рухів систем відліку

Перейдемо до перетворень, що пов'язують координати події (x, y, z, t) та (x', y', z', t') у двох інерціальних системах S та S' . Як зазначено вище, вважаємо, що просторові координати (x, y, z) та (x', y', z') в S та S' визначені у прямокутній декартовій системі. Нехай осі абсцис в S та S' збігаються. Для початку обмежимося **одновимірним** випадком, коли події відбуваються на осях OX, OX' , тобто перетворюються лише x і t ($y' = y = 0, z' = z = 0$) (рис. 5.1).

$$x' = f(x, t), \quad t' = g(x, t) \quad (5.1)$$

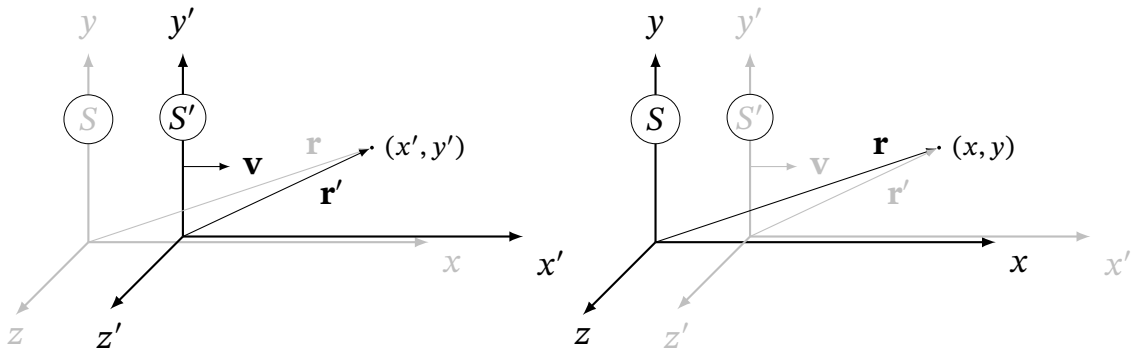


Рис. 5.1. Дві інерціальні системи відліку S й S' , де S' рухається вздовж осі x зі швидкістю v відносно S . Показано радіус-вектори події \mathbf{r} і \mathbf{r}' та відповідні координати (x, y, z) і (x', y', z') . На рисунку для зручності показані осі OY та OY' .

Для малих змін координат dx та dt

$$dx' = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt, \quad dt' = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial t} dt.$$

Величини dx, dt, dx', dt' можна вимірювати відповідно в S та S' . Це дає принципову можливість експериментально визначити частинні похідні від f та g . Наприклад, розглядаючи дві події з координатами (x, t) та $(x + dx, t)$ в S , одночасні в цій системі, та вимірюючи dx' та dt' в S' , з рівнянь для диференціалів визначимо $f_x(x, t)$ та $g_x(x, t)$ і так далі. Результати такого визначення можуть залежати від відносної швидкості систем відліку, але не повинні залежати від положення та часу вимірювань згідно з гіпотезою про однорідність простору-часу. Тому ці похідні є константами й **перетворення (5.1) є лінійним**. Запишемо його у вигляді

$$x' = ax + bt + c_1 \quad (5.2)$$

$$t' = ex + ht + c_2 \quad (5.3)$$

де a, b, e, h, c_1, c_2 — константи.

Очевидно, цілком аналогічні міркування доводять лінійність і в більш загальному, ніж одновимірний, випадку. Лінійність перетворень, що пов'язують координати подій в інерціальних СВ, є наслідком однорідності простору-часу.

Проаналізуємо перетворення (5.2), (5.3), постулюючи принцип відносності:

Усі інерціальні системи рівноправні.

Це означає, що всі фізичні процеси виглядають однаково для різних інерціальних спостерігачів, що рівномірно рухаються зі сталими швидкостями й знаходяться в різних просторово-часових областях, тобто **усі процеси в різних інерціальних системах відліку можна описати однаковими рівняннями** незалежно від відносної швидкості цих систем. Неможливо встановити «абсолютну» СВ, відносно якої загальні фізичні закони мали б якусь специфіку, якої немає в інших СВ. З погляду принципу відносності, який узгоджується з усіма спостереженнями, сама постановка задачі про пошук «абсолютної» СВ беззмістовна, як і не мають фізичного сенсу поняття про абсолютний спокій чи рух.

Сформульований принцип дуже загальний і для просування далі необхідна додаткова інформація, яка, зокрема, може міститися в рівняннях динаміки полів чи частинок. Сам по собі принцип відносності можна узгодити навіть з ньютонівськими уявленнями про єдиний час для усіх інерціальних систем, при цьому, якщо рівняння ньютонівської динаміки були б правильними, тоді б перетворення, що пов'язують різні системи відліку, мали вигляд перетворень Галілея, а не перетворень Лоренца, що будуть виведені далі. Додаткову інформацію, що конкретизує зв'язок інтервалів часу та відстаней найпростішим чином, дає другий постулат — умова інваріантності швидкості світла в усіх інерціальних системах:

Швидкість світла у вакуумі є універсальною сталою, вона однакова в усіх інерціальних системах відліку і не залежить від швидкості джерела.

Як побачимо далі, спираючись на цей постулат разом із принципом відносності та гіпотезою про однорідність простору-часу та ізотропію простору, можна отримати зв'язок координат в різних інерціальних системах, не звертаючись до рівнянь Максвелла чи якихось інших рівнянь теорії поля. Спочатку перетворення, що описують цей зв'язок, з'явилися в роботах Лоренца та Пуанкаре саме на основі аналізу рівнянь Максвелла. Однак саме Айнштайн запропону-

вав розглядати принцип відносності разом з вимогою інваріантності швидкості світла і надав цим твердженням фундаментальний зміст. Постулати відносності та інваріантності швидкості світла, якщо їх розглядати разом, відомі як спеціальний принцип відносності Айнштейна.

Твердження про інваріантність швидкості світла заперечує існування виділеної системи відліку, пов'язаної з ефіром — особливим середовищем, збудження якого обумовлюють поширення електромагнітних хвиль. За уявленнями, що панували на початку 20 століття до створення СТВ, система спокою ефіру займає виділене положення, час, визначений в цій «абсолютній» СВ, є однаковим в усіх інерціальних СВ, а події, що є одночасними в одній інерціальній системі, є одночасними в усіх таких системах. Але гіпотеза про існування ефіру була спростована багатьма експериментами. Ньютонівська механіка не узгоджується зі спостереженнями, хоча для швидкостей, малих у порівнянні зі швидкістю світла, ця механіка працює досить точно, а відповідні релятивістські поправки (тобто поправки СТВ) до ньютонівських розрахунків спостережуваних величин мають порядок $O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$. Щодо рівнянь Максвелла, які самі по собі не вимагають наявності ефіру, то вони чудово узгоджуються зі спеціальним принципом відносності.

Використаємо спеціальний принцип відносності для встановлення явного вигляду координатних перетворень (5.2), (5.3), що пов'язують інерціальні системи. Обмежимося **однорідними перетвореннями**, коли подія з координатами $(0, 0)$ в S має також координати $(0, 0)$ в S' , тобто $c_1 = c_2 = 0$. Цього можна завжди домогтися перевизначенням початку відліку часу та просторових координат.

Нехай, наприклад, початок координат системи S' віддаляється від початку координат S зі швидкістю v , тобто S' рухається в додатному напрямку осі x .

Якщо в S' траєкторія деякої точки, що покоїться в цій системі, визначається співвідношенням $x' = 0$ при усіх t' , то в S маємо $x = vt$. Звідси з (5.2) маємо $b = -av$, і замість (5.2) можна записати

$$x' = a(v)(x - vt) \quad (5.4)$$

Аналогічно, сукупність подій з координатою $x = 0$ в S (траєкторія частинки, що покоїться відносно S') відповідає траєкторії $x' = -vt'$ в S' ; звідси визначаємо $h = a$ і замість (5.3) маємо

$$t' = e(v)(x + at) \quad (5.5)$$

Врахуємо, що швидкість світла в S та S' однакова. Це означає, що траєкторія світлового сигналу, задана рівнянням $x(t) = ct$ в S , матиме такий самий вигляд $x'(t') = ct'$ в S' .

Підставимо це в (5.4), (5.5), звідки отримуємо $e = va/c^2$.

Таким чином, для будь-якої події (x, t) її координати в S' визначаються з формул

$$\begin{cases} x' = a(v)(x - vt) \\ t' = a(v)(t - xv/c^2) \end{cases}, \quad (5.6)$$

Обернений зв'язок отримуємо, розв'язуючи ці рівняння відносно x, t :

$$\begin{cases} x = a'(x' + vt') \\ t = a'(t' + vx'/c^2) \end{cases}, \quad (5.7)$$

де

$$a' = [a(v)(1 - v^2/c^2)]^{-1}. \quad (5.8)$$

Зауважимо, що $a'(v) = a(-v)$, оскільки перетворення (5.6) повинні мати загальний характер, а перехід від координат в S' до S відповідає оберненому знаку швидкості v .

Поки що невідомо, чи $a(-v)$ збігається з $a(v)$. Щоб це з'ясувати, згадаємо припущення про ізотропію простору. Поміняємо напрямок просторових осей (OX в S та OX' в S'), тобто вводимо системи \tilde{S} з координатами $\tilde{t} = t, \tilde{x} = -x$ та систему \tilde{S}' , де $\tilde{t}' = t', \tilde{x}' = -x'$. Взаємне розташування \tilde{S} відносно \tilde{S}' таке ж як і S' відносно S (початок координат \tilde{S} віддаляється від початку координат \tilde{S}' так само як і S' відносно S), тому вигляд координатних перетворень $\tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}$ має бути такий самий, як (5.6):

$$\begin{cases} \tilde{x} = a(v)(\tilde{x}' - v\tilde{t}') \\ \tilde{t} = a(v)(\tilde{t}' - \tilde{x}'v/c^2) \end{cases},$$

підставляючи $\tilde{t} = t, \tilde{x} = -x$ та $\tilde{t}' = t', \tilde{x}' = -x'$, отримуємо перехід від S' до S :

$$\begin{cases} x = a(v)(x' + vt') \\ t = a(v)(t' + vx'/c^2) \end{cases},$$

Порівнюючи це з (5.7), маємо $a' = a(v)$, звідки, враховуючи (5.8),

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5.9)$$

Формально тут є ще одна можливість, коли $a(v) = -(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Цей варіант перетворення координат є добутком перетворення з множником (5.9) та інверсії часової та просторової координат. Нас

цікавить, однак, неперервна залежність $a(v)$, причому маємо отримати тотожне перетворення при $v = 0$. Тому варіант з від'ємним a відкидаємо.

Дамо наочніший аналіз умови ізотропії на прикладі процесу випромінювання, що виникає внаслідок квантових переходів в атомі водню, з погляду спостерігачів, пов'язаних з S та S' . Нехай відносна швидкість систем v . Отримаємо зв'язок між a , a' виходячи з (5.6), (5.7). Відраховуючи певну кількість періодів коливань квантової системи, можна створити атомний годинник (еталон часу), який генерує спалахи світла з власним періодом T_0 . Нехай цей годинник та спостерігач поблизу нього, що реєструє спалахи, покояться в системі S' у точці $x'_0 = 0$. Розглянемо дві події реєстрації спалахів з координатами $(0, x'_0)$ в S' та (T_0, x'_0) . Для спостерігача в іншій системі S (з таким самим годинником) інтервал часу між цими подіями визначається згідно (5.7):

$$T = a'(T_0 + vx'_0/c^2) - a'(vx'_0/c^2) = a'T_0.$$

Таким чином, відношення $a' = a(-v) = T/T_0$ може бути визначено експериментально.

Розглянемо тепер аналогічне вимірювання в S' та S , але нехай тепер годинник покоїться в S і інтервал T_0 в цій системі визначають тією самою кількістю коливань, що й раніше. Цей експеримент відрізняється від попереднього лише напрямком швидкості між системами, яка, на вимогу ізотропії, несуттєва. Враховуючи (5.6), аналогічно матимемо $a = a(v) = T/T_0$, тобто $a = a(v) = a' = a(-v)$.

Запишемо остаточний результат

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - xv/c^2), \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad (5.10)$$

а також обернене перетворення

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma(t' + x'v/c^2). \quad (5.11)$$

Прямою підстановкою легко перевірити, що внаслідок (5.10) або (5.11)

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2.$$

Досі розглядалися лише події, що відбуваються на осях абсцис систем S та S' . Але усі міркування легко поширити на довільні події; однак відносну орієнтацію систем S та S' , просторові осі яких паралельні, поки що залишимо як раніше. Завдяки інваріантності швидкості світла та ізотропії простору, фронт світлової хвилі повинен мати однакову сферичну форму в обох системах S та S' :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2,$$

звідки $y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2$ для довільних y, z . Звідси випливає, що координати, осі яких перпендикулярні напрямку відносного руху, залишаються незмінними:

$$y = y', \quad z = z', \quad (5.12)$$

де ми, аналогічно попередньому, відкидаємо варіант з інверсією просторових осей. Перетворення (5.10), (5.11) називають на честь Лоренца, який отримав їх, вивчаючи інваріантність рівнянь Максвелла. Далі називатимемо перетворення (5.10), (5.11) **одновимірними перетвореннями Лоренца**¹, щоб відрізнити їх від загальних перетворень, що пов'язують інерціальні системи відліку з довільною орієнтацією просторових осей та довільним напрямком відносного руху.

Відносність одночасності. Покажемо, що одночасні події в S з координатами (t, x_1) , (t, x_2) , які відбуваються у різних просторових точках ($x_1 \neq x_2$), не є одночасними в S' . Підставляючи координати подій в (5.10), маємо

$$t'_1 = \gamma(t - x_1 v/c^2) \neq t'_2 = \gamma(t - x_2 v/c^2),$$

$$t'_2 - t'_1 = -\gamma \frac{(x_2 - x_1)v}{c^2} \neq 0.$$

Таким чином, події з різними значеннями координати x , одночасні в одній інерціальній системі S , не є одночасними в іншій системі S' , що рухається відносно першої вздовж OX з ненульовою швидкістю v . Однак одночасність зберігається для подій з однаковими x , але різними координатами y або z . Дійсно, в перетворення часової змінної y', z' чи y, z не входять. Тому, наприклад, одночасні події на осі OY в S є одночасними й в S' .

Додавання швидкостей. Перетворення Лоренца пов'язують координати будь-яких подій в інерціальних СВ S та S' , де S' рухається відносно S зі сталою швидкістю v . Якщо розглядається рух частинки вздовж осі OX системи S з деякою швидкістю $u = dx/dt$, то в системі S' , яка рухається відносно S зі швидкістю v , маємо

$$dx' = a(v)(dx - vdt) = a(v)(u - v)dt, \quad dt' = a(v) \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) dt$$

¹В літературі одновимірні перетворення Лоренца також називають бустами (від англ. boost — поштовх, прискорення). Термін «буст» підкреслює, що йдеться про перетворення, яке пов'язує дві інерціальні системи відліку, що рухаються одна відносно одної з постійною швидкістю вздовж однієї просторової осі.

маємо швидкість в S'

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Аналогічно

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Це — формула релятивістського додавання швидкостей у випадку руху вздовж однієї осі.

Нехай тепер деяке тіло A рухається зі швидкістю u_A відносно спостерігача, а тіло B — зі швидкістю u_{BA} відносно A (в одному напрямку). Рухи вважаємо інерціальними. За формулою релятивістського додавання швидкостей тіло B рухається відносно спостерігача зі швидкістю

$$u_B = \frac{u_A + u_{BA}}{1 + \frac{u_A u_{BA}}{c^2}}$$

Розглянемо добуток

$$\frac{1 + u_A/c}{1 - u_A/c} \cdot \frac{1 + u_{BA}/c}{1 - u_{BA}/c} = \frac{1 + \frac{u_A + u_{BA}}{c} + \frac{u_A u_{BA}}{c^2}}{1 - \frac{u_A + u_{BA}}{c} + \frac{u_A u_{BA}}{c^2}} = \frac{1 + u_B/c}{1 - u_B/c}$$

Звідси видно, що в разі одновимірних рухів величина

$$\ln \frac{1 + u/c}{1 - u/c}, \quad (5.13)$$

яку називають *бистротою* (від англ. *rapidity*), є адитивною¹.

5.3. Власний час

Нехай точкове тіло рухається зі сталою швидкістю u вздовж осі x . Розглянемо СВ S_0 , яка рухається разом із тілом, тобто в якій тіло покоїться. Таку систему називають **власною** для даного тіла. Розглянемо дві послідовні події на траєкторії частинки (t_0, x_0) і $(t_0 + d\tau, x_0)$, де x_0 — положення тіла в S_0 , $d\tau$ — інтервал власного часу, тобто часу, що вимірюється годинниками у власній СВ. Величина $d\tau$, очевидно, не залежить, відносно якої СВ ми розглядаємо рух частинки.

¹Також вживають термін «швидкісний параметр» (див. секцію «Загальні та власні перетворення Лоренца» нижче).

Нехай у системі S координати цих подій є $(t, x(t))$, $(t + dt, x(t + dt))$, а тіло рухається зі швидкістю $u = dx/dt$. Записуючи зв'язок між координатами подій в S_0 й S згідно до (5.11), маємо

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \text{або } d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot dt.$$

Числове значення величина $\sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot dt = d\tau$ визначається у власній системі тобто є інваріантом. Інакше кажучи, якщо розглянути іншу систему S' , відносно якої швидкість тіла буде іншою ($u' = dx'/dt'$), отримаємо

$$\sqrt{1 - u'^2/c^2} dt' = \sqrt{1 - u^2/c^2} dt = d\tau. \quad (5.14)$$

Ця формула дає змогу обчислювати власний час по траєкторії частинки, що задана в будь-якій інерціальній СВ.

Виникає питання: чи застосовна формула (5.14) у випадку неінерціальних рухів? Цей результат не впливає з СТВ. Адже якби формула для власного часу містила поправку, пропорційну прискоренню, яка зникає у випадку інерційних рухів, це не суперечило б наведеним вище міркуванням, що привели до (5.14). **Відповідь дають численні експерименти, які показують, що власний час (5.14) не залежить від прискорення.** Тому для будь-якої ділянки траєкторії частинки $\{t, \mathbf{r}(t)\}$, $t \in [t_1, t_2]$, її власний час обчислюється за формулою

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} dt, \quad |\dot{\mathbf{r}}| < c, \quad (5.15)$$

яка застосовна також у випадку неінерціальних рухів. Підкреслимо, що в (5.15) рух частинки може бути прискореним, **але траєкторія частинки має описуватися в інерціальній СВ.** В неінерціальних СВ формулу (5.15) слід модифікувати.

Перепишучи (5.15) для диференціалів $ds = cd\tau$, маємо

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2.$$

Цю величину називають квадратом інтервалу; тут він записаний для подій, що мають місце на траєкторії деякої частинки, швидкість якої менша за швидкість світла.

5.4. Квадрат інтервалу

Узагальнимо твердження про інваріантність квадрата інтервалу на довільні відносні рухи інерціальних систем. Нехай (t_1, x_1) , (t_2, x_2) — координати будь-яких подій в СВ S , а (t'_1, x'_1) , (t'_2, x'_2) — відповідні

координати в S' , яка рухається в напрямку осі OX відносно S . Позначаємо $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$, в S та $\Delta x' = x'_2 - x'_1$, $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ в S' , маємо, за формулами (5.10):

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \Delta x \cdot v/c^2), \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t).$$

Ураховуючи цей зв'язок, отримаємо

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2. \quad (5.16)$$

У більш загальному випадку, коли S' рухається відносно S зі швидкістю \mathbf{v} у довільному напрямку, розглянемо події з координатами (t_1, x_1, y_1, z_1) , (t_2, x_2, y_2, z_2) в S та відповідними їм (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) , (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) в S' . Порівняємо в обох системах квадрат інтервалу, який, за визначенням, дорівнює

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \\ \Delta s'^2 &= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Очевидно, $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$, а значить і Δs^2 , не змінюється при просторових обертаннях декартової системи координат, тобто при переході в систему відліку \tilde{S} , що рухається разом з S , але декартові просторові осі якої повернуті відносно S . Це ж справедливо для S' та системи \tilde{S}' , що рухається разом з S' , але з іншим напрямком декартових просторових осей. Тепер можна зорієнтувати просторові координати в \tilde{S}' та \tilde{S} так, щоб обидві осі абсцис були колінеарні напрямку швидкості відносного руху. При переходах $S \rightarrow \tilde{S}$ чи $S' \rightarrow \tilde{S}'$ відповідні квадрати інтервалу залишаються незмінними, а зв'язок між квадратами інтервалу для систем \tilde{S} та \tilde{S}' в разі їх колінеарних осей OX та OX' можна встановити за формулами одновимірних перетворень (5.16).

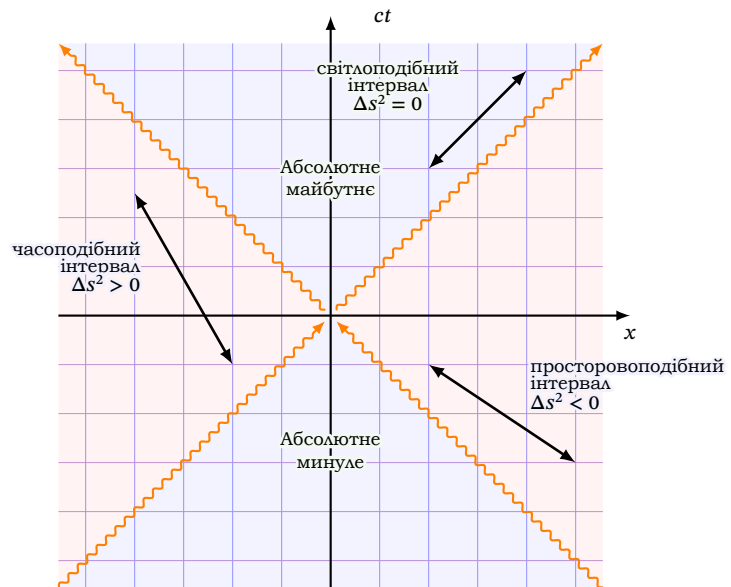
Таким чином, **величина квадрата інтервалу є незмінною для довільних відносних рухів інерціальних систем відліку: $\Delta s^2 = \Delta s'^2$.**

Кажуть, що дві події пов'язані **часоподібним інтервалом**, якщо $\Delta s^2 > 0$, та **просторовоподібним інтервалом**, якщо $\Delta s^2 < 0$. Легко бачити, що нескінченно близькі події вздовж 4-траєкторії частинки (світової лінії) пов'язані часоподібним інтервалом, оскільки

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = (c^2 - \dot{\mathbf{r}}^2) dt^2 > 0$$

внаслідок умови $|\dot{\mathbf{r}}| < c$. Відповідно, таку траєкторію називають часоподібною. Якщо частинка рухається зі швидкістю c , маємо $\Delta s^2 = 0$ і траєкторію називають **світлоподібною** чи **ізотропною** (рис. 5.2).

Рис. 5.2. Конус світла у просторі-часі Мінковського. Часоподібні інтервали між подіями ($\Delta s^2 > 0$) мають нахил, менший за 45° відносно осі ct , просторовоподібні ($\Delta s^2 < 0$) — більший за 45° , світлоподібні ($\Delta s^2 = 0$) — рівно 45° .



5.5. Перетворення довжини та об'єму

Повернемося знов до систем, що пов'язані перетвореннями (5.10), (5.11). Нехай S' є власною системою для деякого стрижня довжиною Δl . Порівняємо довжину стрижня в різних системах, вважаючи, що він орієнтований вздовж осі абсцис.

Стрижень рухається відносно лабораторної системи S , тому події, що відповідають вимірюванням координат кінців стрижня в цій системі, мають відбуватися одночасно. Позначимо відповідні координати (t, x_1) , (t, x_2) , $x_2 - x_1 = \Delta l$ — довжина стрижня в S . У власній системі кінці стрижня мають весь час постійні координати, тому можна не турбуватися, що тут події вимірювання не одночасні. Просторові координати подій в S'

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt), x'_2 = \gamma(x_2 - vt),$$

звідси

$$\Delta l = \Delta l_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (5.18)$$

Обчислення нагадують виведення формули для інтервалів часу

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.19)$$

однак у випадку (5.18) розглядаються події з однаковими **часовими** координатами в лабораторній системі, відносно якої стрижень рухається, а при виведенні (5.19) розглядаються події з однаковими **просторовими** координатами у власній системі годинника.

Нехай S' з координатами $\{x', y', z'\}$; є власною системою для паралелепіпеда

$$x' \in [x'_0, x'_0 + \Delta x'], \quad y' \in [y'_0, y'_0 + \Delta y'], \quad z' \in [z'_0, z'_0 + \Delta z'];$$

відповідний елемент об'єму $\Delta\tilde{V} = \Delta x' \Delta y' \Delta z'$. Враховуючи, що $\Delta y' = \Delta y$, $\Delta z' = \Delta z$, маємо в лабораторній системі, відносно якої об'єм рухається зі швидкістю v ,

$$\Delta V = \Delta V_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (5.20)$$

В разі зарядженого середовища, отримаємо зв'язок густин заряду в різних інерціальних системах. Нехай ρ_p — густина заряду у власній системі, відносно якої заряди покояться, dV_0 — об'єм в цій системі з сумарним зарядом q , dV — об'єм цього ж заряду у системі, відносно якої заряд рухається зі швидкістю v . Нагадаємо, що заряд має одну й ту ж саму величину в різних системах. Це дає

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dq}{dV_0} = \frac{\rho_p}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.21)$$

Звідси випливає інваріантність величини $\rho \sqrt{1 - \beta^2} = \rho_p$.

Задачі

5.1. Показати прямим обчисленням, що добуток одновимірних перетворень Лоренца, що відповідають швидкостям v_1, v_2 , є також перетворенням Лоренца з новою швидкістю

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}.$$

5.2. Частинки рухаються в одному напрямку вздовж прямої; кожна k -та частинка рухається зі швидкістю v відносно $(k - 1)$ -ої; $k = 2, \dots, N$. Знайти швидкість N -ої частинки відносно першої.

Вказівка: скористайтеся адитивністю величини $\ln \frac{1+u/c}{1-u/c}$ при одновимірних перетвореннях Лоренца.

5.3. Відносно інерціальної системи S з координатами $\{x, y, z, t\}$ рухається зі швидкістю \mathbf{v} інша інерціальна система S' з координатами $\{x', y', z', t'\}$. Записати відповідне перетворення $S \rightarrow S'$. Напрямок тривимірного вектора \mathbf{v} — довільний.

Вказівка: Тривимірний вектор $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ розбити на поздовжню та поперечну відносно \mathbf{v} частини:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}, \quad \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{v} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2},$$

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{v} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2}.$$

Перетворення:

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}.$$

5.4. Показати *прямим обчисленням*, що перетворення координат $S \rightarrow S'$ з попередньої вправи зберігає квадрат інтервалу.

5.5. Знайти закон перетворення прискорення для одновимірних рухів.

Відповідь. Перехід в систему $\{t', x'\}$, що рухається зі швидкістю v відносно системи $\{t, x\}$:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - v\dot{x}/c^2)^3} \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Навпаки,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 + v\dot{x}'/c^2)^3} \frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad \dot{x}' = \frac{dx'}{dt'}.$$

5.6. Швидкість ракети, що рухається вздовж прямої, завжди менша за c . Чи можлива з погляду СТВ ситуація, коли радіосигнал, що поширюється за ракетою у тому ж напрямку, не наздоганяє її? Розгляньте приклад, коли космонавт у ракеті має завжди сталу вагу, як на Землі; за початкові умови візьміть $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Розв'язання. Прискорення в інерціальній системі, швидкість якої в деякий момент збігається зі швидкістю ракети ($v = \dot{x}$), дорівнює прискоренню вільного падіння поблизу земної поверхні g . Згідно з результатом вправи 5.5:

$$g = \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - v\dot{x}/c^2)^3} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{(1 - \dot{x}^2/c^2)^{3/2}} \frac{d^2x}{dt^2}$$

Інтегруючи це рівняння з урахуванням початкових умов, отримаємо

$$\frac{\dot{x}}{(1 - \dot{x}^2/c^2)^{1/2}} = gt$$

(очевидно, швидкість завжди менша за c !), звідки

$$x(t) = \frac{c^2}{g} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2} - 1 \right].$$

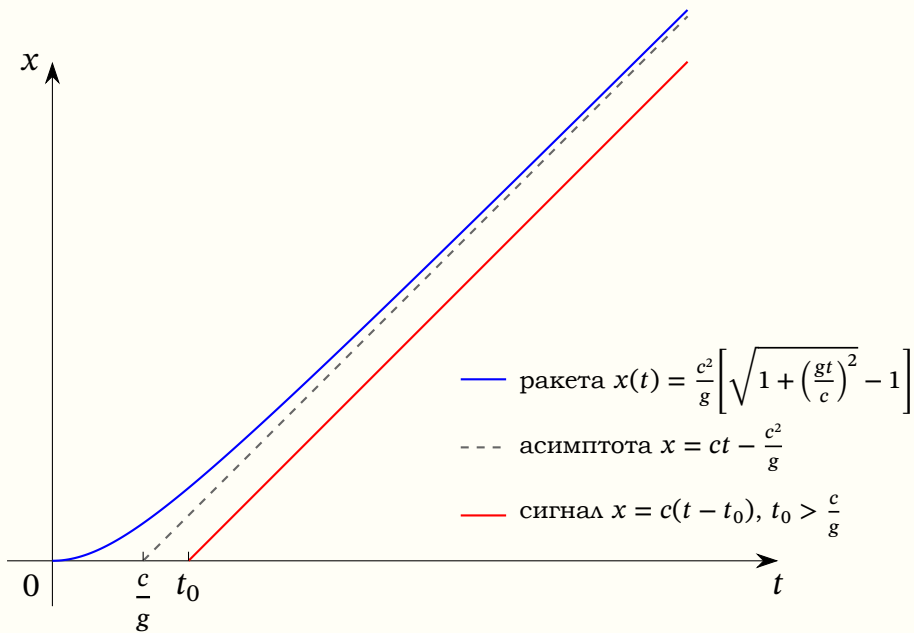


Рис. 5.3. Графік при $c = g = 1$; осі x і t в одиницях c^2/g та c/g відповідно. Траєкторія ракети (синя) має асимптоту $x = ct - c^2/g$ (штрихова). Радіосигнали $x = c(t - t_0)$, випромінені при $t_0 > c/g$ (червоні), не наздоганяють ракету.

З графіка функції $x(t)$, що має асимптоту $ct - \frac{c^2}{g}$, видно, що траєкторії радіосигналів $x = c(t - t_0)$, випромінених з точки $x = 0$ в момент $t_0 > \frac{c}{g}$, не перетинають траєкторії ракети.

5.7. Спостерігач вимірює кут θ між зірками А та Б. Знайти кут θ' між А та Б, який вимірює космонавт, що рухається зі сталою швидкістю v відносно спостерігача в напрямку зірки Б.

Розв'язання. Нехай вісь Ox спрямована на зірку Б. Спостерігач та космонавт вимірюють траєкторії променів, що йдуть від А. Швидкість світла однакова в усіх інерціальних системах, тому проекція на вісь Ox променя є

$$x = -ct \cos \theta + \text{const} \rightarrow v_x = -c \cos \theta$$

в системі нерухомого спостерігача, і

$$x' = -ct' \cos \theta' + \text{const} \rightarrow v'_{x'} = -c \cos \theta'$$

в системі космонавта. За допомогою формули додавання швидкостей отримаємо відповідь:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}, \quad \beta = v/c.$$

Звідси видно, що з погляду космонавта джерела випромінювання зміщуються до зірки Б, в напрямку якої він рухається.

5.8. Розподіл далеких зорь на небесній сфері в системі спостерігача є ізотропним. Знайти розподіл зірок, що бачить космонавт, який рухається зі швидкістю v відносно спостерігача.

Відповідь:

$$\frac{dN}{d\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi} \frac{d \cos \theta}{d \cos \theta'} = \frac{N_0}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta')^2}$$

N_0 — повне число зірок, $\beta = v/c$.

5.9. Розподіл далеких зорь в системі спостерігача є ізотропним. Космонавт рухається зі сталою швидкістю v відносно спостерігача. Знайти відношення числа зірок, що спостерігає космонавт у передній напівсфері, до числа зірок у задній напівсфері.

Вказівка: скористатися безпосередньо результатом вправи 5.7.

Відповідь: $\frac{1 + \beta}{1 - \beta}$, $\beta = v/c$.

5.10. Розпад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ відбувається ізотропно у власній системі π^0 -мезонів, що рухаються зі швидкістю v відносно лабораторної системи. Знайти відношення γ -квантів, що реєструються у лабораторній системі в передній напівсфері, до числа γ -квантів у задній напівсфері.

Застереження: на відміну від вправи 1.8, тут фотони рухаються в напрямку від точки розпаду, тому тут навпаки

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}$$

(штрих позначає власну систему π^0 -мезона).

Відповідь: $\frac{1 + \beta}{1 - \beta}$, $\beta = v/c$.

6

Співвідношення СТВ у просторі Мінковського

Рівняння СТВ набувають найбільш елегантної форми в чотиривимірному формулюванні. Для цього використовується апарат тензорного аналізу і ми припускаємо, що читач вже прослухав відповідний курс. Але деякі елементи тензорного аналізу нагадаємо нижче.

Елементи тензорного аналізу. Позначення, що використовують в СТВ, відрізняються від тривимірної електродинаміки. Деякі з позначень пов'язані з вимогами зручності, деякі — історичними та інколи суб'єктивними причинами. Читач, що починає вивчення теорії відносності, може бути дещо збентежений тим різноманіттям позначень в різних посібниках, що стосуються вибору індексів (грецькі чи римські у відповідних ситуаціях) та сигнатури метричного тензора. Тому, перш ніж перейти до основної частини розділу, рекомендуємо звертати на це увагу.

1. Індeksi. Далі усі грецькі індекси (штриховані та нештриховані) пробігають значення 0, 1, 2, 3; латинські індекси — 1, 2, 3.

2. Координати. Індекс у координат пишемо згори, наприклад, x^μ . Набори диференціалів dx^μ утворюють контраваріантний вектор. В СТВ, як правило, $x^0 = ct$, де t — координатний час інерціальної системи відліку; x^1, x^2, x^3 — просторові координати. Коли йдеться про вектори в чотиривимірному просторі Мінковського, досить часто вживають термін «чотиривектор» або «4-вектор». Також, коли треба виділити просторову частину координат (при інтегруванні тощо) пишемо $d^3\mathbf{r}$.

3. Похідні. Частинні похідні за відповідними координатами:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Якщо ϕ — скалярна функція, то набори цих похідних в різних координатних системах утворюють коваріантний вектор. Похідні від вектора чи тензора, наприклад $\partial_\mu A^\nu$, вже не утворюють тензорних величин в разі загальних перетворень. Але, якщо обмежитися групою лінійних перетворень координат (наприклад, групою Лоренца,

яка визначена нижче), при диференціюванні тензорні властивості зберігаються.

4. Правило підсумовування. Наявність двох однакових індексів — обов'язково одного верхнього та одного нижнього — означає суму за цими індексами (правило Айнштейна)¹. Ці індекси називають *німими*. Наприклад:

$$A^\mu B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu.$$

Зауважимо, що у фізичній літературі, яка не пов'язана із теорією відносності, часто відходять від цього правила і пишуть обидва німих індекси унизу чи згори.

5. Запис правил перетворення векторів та тензорів. Нехай координатні системи x^μ та $x'^{\mu'}$ пов'язані взаємно-однозначним диференційовним зв'язком, у загальному випадку, нелінійним. Розглянемо контраваріантний вектор, заданий в точці m чотиривимірного многовиду, причому набори A^μ та $A'^{\mu'}$ ($\mu' = 0, 1, 2, 3$), є компонентами цього вектора в x^μ та $x'^{\mu'}$, тобто

$$A'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} A^\mu \quad \text{або} \quad A'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha,$$

де похідні обчислюються в точці m у відповідних координатних системах. У обчисленнях це зручно переписати, замінивши деякі з індексів на штриховані, що пробігають ті ж самі значення:

$$A'^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad \text{або} \quad A'^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\beta} A^\beta.$$

В разі векторного поля ці співвідношення мають виконуватися в будь-якій точці простору-часу. Здебільшого за контекстом зрозуміло, в якій точці обчислюються похідні в формулах для перетворення, тому відповідну позначку в похідних, як правило, опускаємо:

$$A'^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad \text{або} \quad A'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\nu} A^\nu.$$

Тензором називають сукупність компонент, які перетворюються як прямий добуток відповідної кількості коваріантних та контраваріантних векторів.

¹Цю операцію називають згорткою по парі індексів, див. **Вектори і тензори в просторі Мінковського**

Наприклад, для один раз коваріантного та двічі контраваріантного тензорного поля²

$$T'^{\alpha'\gamma'}_{\beta'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} T^{\alpha\gamma}_{\beta}.$$

6. Контраваріантні індекси — завжди верхні, коваріантні — нижні.

7. Як правило, ми позначаємо V — область тривимірного простору, Ω — область чотиривимірного простору; $\partial\Omega$ — межа області Ω .

8. Нехай $g_{\mu\nu}$ — двічі коваріантний тензор, $\det \|g_{\mu\nu}\| \neq 0$. Утворимо в усіх системах координат обернену матрицю $g^{\mu\nu}$, тобто $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$. Покажемо, що обернена матриця $g^{\mu\nu}$ — двічі контраваріантний тензор. Нехай

$$g'_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} g_{\alpha\beta}, \quad g'^{\alpha'\beta'} g'_{\beta'\gamma'} = \delta^{\alpha'}_{\gamma'}.$$

У другому з цих співвідношень використаємо закон перетворення тензора $g_{\alpha\beta}$: $g'_{\alpha'\beta'} = \dots$, й після використання тотожностей та згортки отримаємо $g'^{\alpha'\gamma'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}} g^{\alpha\gamma}$, що і треба довести.

Аналогічно можна довести, що коли $g^{\mu\nu}$ — двічі контраваріантний тензор, $\det \|g^{\mu\nu}\| \neq 0$, то обернена до нього матриця є двічі коваріантним тензором.

Далі позначатимемо координати подій в інерціальних системах так: x^{μ} , $x^0 = ct$ — час, x^1, x^2, x^3 — просторові декартові координати, або $x^{\mu} = (ct, \mathbf{r})$. Часто індекси у координат подій не пишуть, де це не викликає проблем.

6.1. Загальні та власні перетворення Лоренца

З урахуванням нових позначень можна записати квадрат інтервалу між довільними точками x_1^{μ} та x_2^{μ} чотиривимірного простору-часу так:

$$(x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1^3 - x_2^3)^2 \equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu},$$

де $\Delta x^{\mu} = x_1^{\mu} - x_2^{\mu}$, а матриця

²Введення штрихованих індексів (відповідно до штригованих координат) не-принципове, але це зручно в обчисленнях.

$$\|\eta_{\mu\nu}\| \equiv \|\eta\| \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

має назву **тензора Мінковського**. Матриця $\|\eta_{\mu\nu}\|$ збігається зі своєю оберненою, тому тензор Мінковського можна писати також з верхніми індексами: $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Забігаючи вперед, відзначимо, що завдяки п. 8 можливість такого запису обумовлена тим, що $\eta_{\mu\nu}$ **є одночасно двічі коваріантним і двічі контраваріантним тензором відносно перетворень групи Лоренца та групи Пуанкаре**.

Як було з'ясовано у попередньому розділі, при переході від однієї інерціальної системи з координатами x^μ до іншої з координатами $x'^{\mu'}$ ці координати пов'язані лінійними співвідношеннями, причому числове значення квадрата інтервалу залишається тим самим в обох системах. Інваріантність квадрата інтервалу при перетворенні координат $x^\mu \rightarrow x'^{\mu'}$:

$$\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \eta_{\mu'\nu'} \Delta x'^{\mu'} \Delta x'^{\nu'} \quad (6.1)$$

нагадує умову інваріантності квадрата відстані між точками при просторових поворотах у тривимірному просторі.

Звертаємо увагу на розташування верхніх та нижніх індексів. Щоб запобігти плутанині та помилкам, при опусканні та підйманні індексів слід зберігати їх порядок, залишаючи, коли треба, вільні місця:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu.$$

Якщо розглядаються інерціальні системи зі *спільним початком координат*, зв'язок між ними дається *однорідним* перетворенням

$$x'^{\mu'} = L^{\mu'}_{\mu} x^\mu. \quad (6.2)$$

Більш загальні (неоднорідні) лінійні перетворення містять константи у правій частині (6.2), які — за вимоги однорідності простору-часу — завжди можна прибрати за допомогою зсуву початку координат.

Підстановка (6.2) в (6.1) дає:

$$\eta_{\alpha\beta} = L^{\alpha'}_{\alpha} L^{\beta'}_{\beta} \eta_{\alpha'\beta'}. \quad (6.3)$$

Оскільки $\det \|L\| \neq 0$, існує обернена матриця $\|(L^{-1})^{\mu}_{\mu'}\|$. За означенням оберненої матриці:

$$(L^{-1})^{\mu}_{\mu'} L^{\mu'}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad L^{\mu'}_{\mu} (L^{-1})^{\mu}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}.$$

Помножимо обидві частини (6.2) зліва на $(L^{-1})^{\alpha}_{\mu'}$:

$$(L^{-1})^{\alpha}_{\mu'} x'^{\mu'} = (L^{-1})^{\alpha}_{\mu'} L^{\mu'}_{\mu} x^{\mu}.$$

Згортка $(L^{-1})^{\alpha}_{\mu'} L^{\mu'}_{\mu} = \delta^{\alpha}_{\mu}$, тому

$$(L^{-1})^{\alpha}_{\mu'} x'^{\mu'} = \delta^{\alpha}_{\mu} x^{\mu} = x^{\alpha}.$$

Перейменувавши німий індекс $\alpha \rightarrow \mu$, отримаємо обернене перетворення до (6.2):

$$x^{\mu} = (L^{-1})^{\mu}_{\mu'} x'^{\mu'}, \quad (6.4)$$

Групу¹ всіх лінійних однорідних перетворень, що залишають інваріантним квадрат інтервалу (6.1), називають загальною групою Лоренца (ГЛ). Очевидно, кожний елемент цієї групи однозначно представлений матрицею $\|L^{\mu'}_{\mu}\|$, що задовольняє (6.3). Перетворення з цієї групи називатимемо **(загальними) перетвореннями Лоренца.** Одновимірні перетворення (5.10), (5.11) також належать до загальної групи Лоренца і утворюють її підгрупу.

Оскільки праву частину (6.3) можна подати як добуток матриць², тобто (6.3) подати як $\|L\|^T \cdot \|\eta\| \cdot \|L\| = \|\eta\|$, розглядаючи визначник обох частин цієї рівності отримаємо $(\det \|L\|)^2 = 1$, звідки $\det \|L\| = \pm 1$.

Якщо розписати (6.3) з урахуванням явного виду $\eta_{\mu\nu}$ та покласти $\mu = \nu = 0$, дістаємо

$$(L^{0'}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (L^{i'}_0)^2 = 1,$$

звідки $|L^{0'}_0| \geq 1$.

Звідси видно, що не усі матриці з ГЛ можна отримати з одиничної матриці за допомогою неперервної зміни компонент, не виходячи з цієї групи. Наприклад, перетворенню часової інверсії ($t \rightarrow -t$) відповідає $L^{0'}_0 = -1$; вона задовольняє умові (6.3), але її не можна неперервним чином отримати з одиничної матриці, не порушуючи умову $L^{0'}_0 \geq 1$. Аналогічно всередині ГЛ з одиничної матриці не можна отримати неперервною зміною параметрів матрицю, яка відповідає зміні напрямку однієї з просторових осей на протилежний (наприклад, $x^1 \rightarrow -x^1$). Іншими словами, **загальна ГЛ є незв'язною. Власною групою Лоренца** (або групою власних перетворень Лоренца) **називають зв'язну підгрупу загальної ГЛ, яка містить одиницю**, тобто таку підгрупу загальної ГЛ, кожний елемент котрої можна отримати шляхом неперервної зміни коефіцієнтів матриці $L^{\mu'}_{\mu}$, починаючи від

¹Множина елементів є групою, якщо в ній заданий асоціативний добуток з одиницею, причому кожний елемент має обернений.

²Індекс T позначає транспоновану матрицю.

одиничної матриці і залишаючись всередині підгрупи. Для елементів власної Γ_L

$$\det \|L\| = +1, \quad L^0_0 \geq 1.$$

Оскільки $\det \|L\| = 1$ є якобіаном переходу $x \rightarrow x'$, звідси випливає **інваріантність елементу об'єму** d^4x при перетвореннях власної групи Лоренца.

Приклад власного перетворення Лоренца в одновимірному випадку дають формули (5.10). Якщо система S' рухається відносно системи S з швидкістю v вздовж осі x^1 , ці формули мають такий вигляд:

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x'^2 = x^2; \quad x'^3 = x^3,$$

де $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Відповідна матриця одновимірного перетворення Лоренца (бусту) має вид:

$$\|L_{\text{boost}}\| \equiv \|L^{\mu'}_{\mu}\| = \left\| \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right\| = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Іноді цю матрицю зручно записати через швидкісний параметр ψ , використовуючи співвідношення:

$$\beta = \text{th } \psi, \quad \gamma = \text{ch } \psi, \quad \beta\gamma = \text{sh } \psi.$$

Тоді (6.5) набуде вигляду:

$$\|L_{\text{boost}}\| = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & -\text{sh } \psi & 0 & 0 \\ -\text{sh } \psi & \text{ch } \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

У цьому контексті буст можна назвати **гіперболічним поворотом** (у просторі Мінковського) на кут ψ^1 у площині (x^0, x^1) , а перетворення Лоренца набувають вигляду:

¹На відміну від звичайного (евклідового) повороту, який у площині (x, y) задається матрицею $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ і зберігає відстань $x^2 + y^2$, гіперболічний поворот

(буст) зберігає інтервал $c^2t^2 - x^2$ та описується матрицею $\begin{pmatrix} \text{ch } \psi & -\text{sh } \psi \\ -\text{sh } \psi & \text{ch } \psi \end{pmatrix}$.

$$x'^0 = x^0 \operatorname{ch} \psi - x^1 \operatorname{sh} \psi, \quad x'^1 = -x^0 \operatorname{sh} \psi + x^1 \operatorname{ch} \psi, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3.$$

Ізотропія простору гарантує, що функція $\psi(v)$ є непарною ($\psi(-v) = -\psi(v)$). Крім того, з властивостей гіперболічних функцій випливає **адитивність** швидкісного параметра *при послідовних бустах уздовж однієї осі*:

$$\psi_{13} = \psi_{12} + \psi_{23},$$

що еквівалентно формулі додавання швидкостей (див. розділ 5.2). На відміну від швидкості v , яка обмежена інтервалом $(-c, c)$, швидкісний параметр ψ пробігає всі дійсні значення $(-\infty, +\infty)$.

Можна показати, що будь-яке перетворення власної ГЛ, що описується матрицею $\|L_{\text{proper}}\|$, можна подати як добуток просторових поворотів $\|O_1\|$, $\|O_2\|$ та одновимірного перетворення Лоренца $\|L_{\text{boost}}\|$ (6.5):

$$\|L_{\text{proper}}\| = \|O_1\| \cdot \|L_{\text{boost}}\| \cdot \|O_2\|.$$

Загальна ГЛ містить власну ГЛ як підгрупу, решта перетворень загальної ГЛ є добутками перетворень власної ГЛ та інверсій простору й часу.

Якщо доповнити перетворення групи Лоренца просторовими та часовими зсувами, маємо **групу Пуанкаре**, перетворення якої мають вид

$$x'^{\mu'} = L^{\mu'}_{\mu} x^{\mu} + a^{\mu'}.$$

Очевидно, перетворення тензорів відносно групи Пуанкаре такі самі, як для групи Лоренца.

Множину подій з введеними на ній трансформаційними співвідношеннями для тензорів називають **простором Мінковського**.

6.2. Вектори і тензори в просторі Мінковського

Закони перетворення векторів та тензорів формально такі самі, як і у випадку загальних перетворень координат. Але слід пам'ятати, що далі йдеться про *лінійні* перетворення — з груп Лоренца або Пуанкаре.

Уведемо **операцію підймання та опускання індексів**: за допомогою тензора Мінковського з коваріантного вектора A_{μ} можна отримати контраваріантний вектор¹ $A^{\mu} = \eta^{\mu\nu} A_{\nu}$ (покомпонентно це буде $A^0 = A_0$, $A^i = -A_i$, $i = 1, 2, 3$); легко довести, що A^{μ} дійсно має

¹Результат підймання (опускання) індексів позначають тим самим символом, що й тензор до цієї операції, підкреслюючи, що це один і той самий геометричний об'єкт.

властивості контраваріантного вектора при перетвореннях Лоренца. Аналогічно, $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$ — коваріантний вектор, якщо A^μ — контраваріантний. Перехід від коваріантних до контраваріантних векторів і навпаки є формальним; він обумовлений вимогами зручності і не приводить до нових фізичних сутностей. У СТВ коваріантний та контраваріантний вектор описують один і той самий геометричний об'єкт.

Вектор A^μ (або A_μ) називають **часоподібним**, якщо $\eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu > 0$, **просторовоподібним**, якщо $\eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu < 0$, та **ізотропним** (або **світлоподібним**), якщо $\eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = 0$.

Тензори визначаються набором чисел (компонент), які перетворюються як прямий добуток відповідного числа коваріантних та контраваріантних векторів. Наприклад, двічі коваріантний та один раз контраваріантний тензор $T_{\alpha'\beta'\gamma'}$ при переході, відповідно до (6.2), в іншу систему відліку перетворюється за правилом

$$T_{\alpha'\beta'\gamma'} = (L^{-1})^{\alpha}_{\alpha'} (L^{-1})^{\beta}_{\beta'} L^{\gamma'}_{\gamma} T_{\alpha\beta\gamma}.$$

Нагадаємо **основні властивості тензорів** та операції, що можна здійснювати над ними.

З тензорів однакової будови можна утворювати **лінійну комбінацію**. З довільних тензорів можна утворювати **прямий добуток**.

З формули для перетворення тензорів очевидно, що коли усі компоненти тензора дорівнюють нулю в одній системі, то вони є нульовими в усіх системах. Якщо усі компоненти двох тензорів збігаються в одній системі, то вони збігаються в усіх системах.

Тензор визначений однозначно, якщо задані його компоненти в одній системі координат; компоненти в інших системах обчислюємо за правилами тензорного перетворення.

В силу (6.3) матриця $\eta_{\mu\nu}$ складає **двічі коваріантний тензор** — тензор Мінковського, причому компоненти цього тензора зберігають свої числові значення при перетвореннях. Як вже було відзначено, специфічною властивістю є те, що компоненти матриці $\eta^{\mu\nu}$ **утворюють двічі контраваріантний** тензор ($\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\eta^{00} = 1$, $\eta^{ii} = -1$ ($i = 1, 2, 3$, без підсумовування)): $\eta'^{\mu'\nu'} = L^{\mu'}_{\mu} L^{\nu'}_{\nu} \eta^{\mu\nu} = \eta^{\mu'\nu'}$.

За допомогою тензора Мінковського можна опускати й піднімати індекси тензорів, подібно до аналогічної операції над векторами. Наприклад: $T^{\mu}_{\nu} = \eta^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu}$; $T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}$. Так само як у випадку векторів, з фізичного погляду підіймання та опускання індексів не приводить до якихось нових об'єктів.

Зверніть увагу на положення індексів після підіймання та опускання. Наприклад, в тензорі T^{ν}_{ρ} після підіймання індекс ν залишаємо на першому місці, якщо рахувати по горизонталі від T . Невиконання цього правила може призвести до плутанини, коли $T^{\mu\nu}$ не є симетричним за своїми індексами.

Якщо тензор має один коваріантний та один контраваріантний індекс, прирівнюючи їх та підсумовуючи за ними отримуємо тензор, що має на два індекси менше. Цю операцію називають **згорткою**. Наприклад, згортка T^{μ}_{ν} є коваріантним вектором. Конструкцію типу $A^{\mu}B_{\mu}$ також називають згорткою векторів A_{μ} та B_{μ} , оскільки тут відбувається згортка після підняття індексу у першого або другого вектора. Аналогічно $T^{\mu\nu}_{\nu}$ є згорткою тензора $T^{\mu\nu}_{\lambda}$ з вектором δ^{λ}_{ν} за певними індексами тощо.

Завдяки лінійності перетворень Лоренца, при диференціюванні тензора отримуємо новий тензор. Наприклад, $\partial_{\beta}A^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} \partial_{\beta}A^{\alpha}$, де використано, що $L^{\mu'}_{\mu}$ є константами завдяки лінійності перетворень Лоренца. Таким чином,

$$\frac{\partial A^{\alpha'}}{\partial x'^{\beta'}} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}.$$

Окрім тензора Мінковського, маємо ще один тензор, компоненти якого не змінюються при власних перетвореннях Лоренца. Це **абсолютно антисиметричний символ** (Леві-Чівіта) $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, що змінює знак при перестановках будь-яких двох індексів, причому $\varepsilon^{0123} = 1$. Очевидно, всі компоненти $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ дорівнюють або +1, якщо впорядкована сукупність індексів $\{\mu, \nu, \rho, \sigma\}$ складає парну перестановку чисел $\{0, 1, 2, 3\}$, або -1 у разі непарної перестановки, або 0, якщо хоча б два індекси приймають однакові значення. Знайдемо закон перетворення $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. За означенням детермінанта

$$\det \left\| \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \right\| = \frac{\partial x'^0}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^1}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^2}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^3}{\partial x^{\delta}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

а після перестановки верхніх індексів $\mu'\nu'\rho'\sigma'$ отримаємо

$$\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\sigma'}}{\partial x^{\delta}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\|L\|) \varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}.$$

Сукупність величин, що перетворюються таким чином, називають тензорною густиною. Але відносно власних перетворень Лоренца $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ є чотириіндексним контраваріантним тензором, оскільки для цих перетворень визначник $\det \|L\| = 1$.

Легко бачити, що коваріантний символ Леві-Чівіта дорівнює

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \eta_{\gamma\rho} \eta_{\delta\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

і має аналогічні властивості ($\varepsilon_{0123} = -1$).

6.3. Світові лінії та чотиривектор швидкості

Траєкторії точкових тіл в чотиривимірному просторі-часі, що також називають *світловими лініями*, зручно записувати у параметричному вигляді: $x^\mu = x^\mu(p)$, де p — деякий неособливий параметр, який монотонно зростає з часом t . Зважаючи на те, що швидкості фізичних тіл не перевищують швидкості світла, маємо вздовж світової лінії тіла з ненульовою масою

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} > 0.$$

В цьому разі вектор дотичної dx^μ/dp часоподібний, а траєкторію $x^\mu(p)$ називають *часоподібною*. У випадку протилежного знаку маємо *просторовоподібну* криву. На траєкторії фотонів та інших частинок нульової маси, що рухаються зі швидкістю світла, $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$; тоді траєкторію називають *ізотропною* або *світлоподібною*.

Якщо на часоподібній траєкторії параметром p виберемо часову координату $t = x^0/c$, маємо

$$\frac{dx^\mu}{dp} = c \frac{dx^\mu}{dx^0} = \left(c, \frac{dx^i}{dt} \right).$$

За формулою (5.15):

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt,$$

де $v^2 = \sum_i (dx^i/dt)^2$.

З цих співвідношень видно, що власний час можна обчислити за формулою

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{p_1}^{p_2} \left(\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{1/2} dp. \quad (6.7)$$

Ця формула дає змогу обчислити інтервал власного часу між точками x_i^μ ($i = 1, 2$) для довільної параметризації часоподібної траєкторії. Як зазначено в п. 5.3, формула (6.7) зберігає свій вигляд у разі довільних часоподібних траєкторій, у тому числі й для тих, що описують неінерціальні рухи точкових тіл. Але система відліку, де зберігає свій вигляд формула (6.7), має бути інерціальною. Оскільки dx^μ є контраваріантним вектором, а $\eta_{\mu\nu}$ — двічі коваріантний тензор відносно перетворень Лоренца, величина

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

є інваріантом відносно цих перетворень. Тому власний час тіла, обчислений згідно до (6.7), як і належить бути числовому значенню спостережуваної величини, не залежить від вибору системи відліку. Зазначимо також, що формула (6.7) не залежить від вибору допустимого параметра p .

Часоподібну траєкторію зручно параметризувати за допомогою величини $s = ct$, де вибір константи визначається початком відліку власного часу. На світовій лінії тіла $x^\mu(s)$ введемо контраваріантний **чотиривектор швидкості (чотиришвидкість** або 4-швидкість)

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds},$$

а також відповідний коваріантний вектор $u_\mu = \eta_{\mu\nu}u^\nu$. Ці величини є безрозмірними. Безпосередньо з (6.7) маємо співвідношення

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1 \quad \text{або} \quad \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1, \quad (6.8)$$

яке називатимемо **умовою нормування чотиришвидкості**. Звідси видно, що з чотирьох компонент u^μ незалежними є лише три. У власній системі відліку, де тіло на цей час покоїться, просторові компоненти швидкості дорівнюють нулю ($u^i = 0$, $i = 1, 2, 3$) і $u^0 = 1$, що, очевидно, задовольняє умову нормування. Інколи цю систему називають також системою спокою тіла.

Якщо $x^\mu(p)$ — світлоподібна (наприклад, траєкторія руху фотонів), то у цьому разі замість (6.8) маємо, для будь-якої параметризації,

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0.$$

Задачі

6.1. Записати перетворення Лоренца для контраваріантного чотиривектора $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ у тривимірному векторному вигляді для довільного напрямку швидкості \mathbf{v} нової системи відліку. *Вказівка.* Компоненти контраваріантного вектора в СТВ перетворюються так само як і координати. Подайте \mathbf{A} у вигляді суми паралельної та перпендикулярної до \mathbf{v} складових. Див. Вправу 5.3.

6.2. Контраваріантний вектор $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ — часоподібний. Користуючись результатом Вправи 6.1, знайдіть перетворення Лоренца до системи координат, де просторові компоненти цього вектора дорівнюють нулю.

7

Електродинаміка у просторі Мінковського

Рівняння Максвелла, встановлені задовго до створення СТВ, чудово узгоджуються з принципом відносності. Тому їх можна використати для знаходження зв'язку між напруженостями електричного та індукціями магнітного полів в різних системах відліку, що й буде зроблено далі. Щодо рівнянь руху зарядів, то вони вимагають істотної модифікації у порівнянні з ньютонівською теорією.

7.1. Чотиривимірна форма рівнянь Максвелла

Згідно з експериментом, рівняння Максвелла задовільно описують електродинамічні явища у класичній¹ області. Головними фігурантами рівнянь Максвелла є електричні заряди та напруженості полів². Як відомо, однією з головних властивостей заряду є його інваріантність: величина заряду ізольованого тіла не залежить від руху, вона однакова в усіх інерціальних системах. Тепер треба з'ясувати, як перетворюються напруженості полів. Для цього врахуємо, що за принципом відносності рівняння електромагнітного поля зберігають свій вигляд в усіх інерціальних системах.

Перепишемо рівняння Максвелла у чотиривимірних позначеннях, зручніших для використання в теорії відносності. Нехай ρ — густина електричного заряду деякого елемента середовища; $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ — звичайний тривимірний вектор густини струму; $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — тривимірний швидкість зарядів у точці, що розглядається. Знайдемо трансформаційні властивості величини

$$j^\mu = \rho \frac{ds}{dt} \frac{dx^\mu}{ds}, \quad \{j^\mu\} \equiv \{j^0, \mathbf{j}\}, \quad j^0 = c\rho, \quad j^i = \rho dx^i/dt.$$

З формули для перетворення густини заряду (5.21), яку легко узагальнити на випадок довільного напрямку швидкості, випливає, що величина $\rho\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} = \rho ds/dt$ є інваріантом — це густина заряду у власній системі елемента середовища. Тоді j^μ має ті ж трансформаційні

¹Тут класичній = неквантовій.

²Тобто, напруженість електричного поля та індукція магнітного.

властивості, що й dx^μ/ds , тобто це контраваріантний вектор. Його називають **чотиривектором густини струму**. Цей вектор введено для середовища з неперервним розподілом зарядів та швидкостей, але його можна означити та для точкових зарядів q_i з траєкторіями $x^\alpha = x_{(i)}^\alpha$ (індекс $i = 1, 2, \dots$ нумерує заряди):

$$j^\mu = c \sum_i q_i \int ds_i \delta^{(4)}(x - x_{(i)}(s_i)) \frac{dx_{(i)}^\mu}{ds_i},$$

де інтегрування проводиться вздовж траєкторій зарядів, $\delta^{(4)}(x)$ — чотиривимірна дельта-функція Дірака¹.

Для опису електромагнітного поля введемо антисиметричну матрицю

$$\|F_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

де $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$; E_i — компоненти напруженості електричного поля, B_i — індукції магнітного поля в декартових координатах x^i ($i = 1, 2, 3$). Цю матрицю називають *тензором електромагнітного поля*. Компоненти цього тензора можна означити ще й так:

$$F_{0i} = -F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k,$$

де в останній рівності береться сума по k , причому індекси i, j, k приймають значення 1, 2, 3. Як буде видно далі, $F_{\mu\nu}$ дійсно є двічі коваріантним тензором відносно перетворень групи Лоренца та групи Пуанкаре; відповідно $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$ є двічі контраваріантним тензором.

Рівняння Максвелла в гаусовій системі одиниць, переписані за допомогою F , мають вид:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (7.1)$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad (7.2)$$

де $\partial_\mu f \equiv \partial f / \partial x^\mu$. Зауважимо, що (7.2) можна записати також у вигляді

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0,$$

де $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — абсолютно антисиметричний символ Леві-Чівіта.

¹За визначенням, для будь-якої неперервної функції f : $\int \delta^{(4)}(x - x_0) f(x) d^4x = f(x_0)$.

З антисиметрії $F_{\mu\nu}$ та з (7.1) випливає **закон збереження заряду**:

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0, \quad (7.3)$$

як необхідна умова існування розв'язку рівнянь електромагнітного поля. Оскільки j^{μ} є 4-вектор, а $\partial_{\alpha}j^{\beta}$ — тензор, згортка $\partial_{\mu}j^{\mu}$ є інваріантом. Рівняння (7.3) є інваріантним при перетвореннях Лоренца.

7.1. Встановити прямим обчисленням еквівалентність рівнянь Максвелла у тривимірній та чотиривимірній формі.

Відповідь: Рівняння (7.1) при $\nu = 0$ еквівалентне рівнянню

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

рівняння (7.1) при $\nu = 1, 2, 3$ еквівалентне рівнянню

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

рівняння (7.2) при $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ еквівалентне рівнянню

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

а інші три комбінації α, β, γ , що містять індекс «0», відповідають рівнянню

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

7.2. Встановити тривимірний аналог рівняння (7.3), користуючись означенням j^{μ} .

Відповідь: Рівняння (7.3) є іншим записом рівняння неперервності:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

7.2. Трансформаційні властивості $F_{\mu\nu}$

Досі ми не з'ясували трансформаційні властивості величин $F_{\mu\nu}$, які є розв'язками рівнянь електродинаміки (7.1), (7.2). За певних граничних умов розв'язок цих рівнянь визначений єдиним чином. Для подальшого досить розглянути якусь одну постановку задачі для (7.1), (7.2), що забезпечує єдиність, зокрема, що відповідає розгляду ізольованої системи. Адже фізичні властивості поля, в тому числі та трансформаційні співвідношення, що пов'язують різні інерціальні системи, не залежать від того, яка конфігурація зарядів створює це поле.

Врахуємо, що, за відсутності зовнішнього випромінювання, рівняння (7.1), (7.2) визначають електромагнітне поле $F_{\alpha\beta}$ (а також і $F^{\alpha\beta}$) обмеженої системи зарядів і струмів *однозначно в усьому просторі*, якщо ці рівняння розглядають, починаючи з нескінченного минулого. Відповідний розв'язок для поля ізольованої системи можна подати за допомогою запізнюючих потенціалів (див. далі (7.18) та представлення (7.15) електромагнітного поля через 4-вектор потенціалу), за допомогою яких $F_{\alpha\beta}$ *однозначно* виражається через 4-вектор струму. Ці формули дають змогу явно дослідити трансформаційні властивості $F_{\alpha\beta}$ при переході в іншу інерціальну систему відліку. Але тут ми вчинимо інакше, виходячи безпосередньо з рівнянь Максвелла.

Нехай $F_{\alpha\beta}$, що подає напруженості полів, є розв'язком рівнянь Максвелла в інерціальній системі S з координатами $\{x\}$, а $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ — розв'язком в інерціальній системі S' з координатами $\{x'\}$: $x'^{\alpha'} = L^{\alpha'}_{\alpha} x^{\alpha}$.

Маючи компоненти $F_{\alpha\beta}$ та $F^{\alpha\beta}$ в системі S , можна формально ввести тензор в усіх системах координат відомими співвідношеннями, зокрема, в системі S' це будуть компоненти

$$F'_{\mu\nu} = (L^{-1})^{\alpha}_{\mu} (L^{-1})^{\beta}_{\nu} F_{\alpha\beta}, \quad F'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F'_{\alpha\beta} = L^{\mu}_{\alpha} L^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (7.4)$$

За властивостями тензорів, ці величини можна диференціювати, утворюючи нові тензори, утворювати лінійні комбінації з тензорами аналогічної будови тощо. Оскільки, за припущенням, $F_{\alpha\beta}$ є розв'язком рівнянь Максвелла (7.1), (7.2) в системі S :

$$\frac{\partial F^{\alpha\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{4\pi}{c} j^{\alpha} = 0, \quad \partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda} F_{\mu\nu} = 0,$$

аналогічне співвідношення маємо для тензорів в лівій частині рівнянь і в системі S' :

$$\frac{\partial F'^{\mu\nu}}{\partial x'^{\nu}} - \frac{4\pi}{c} J'^{\mu} = L^{\mu}_{\alpha} \left(\frac{\partial F^{\alpha\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{4\pi}{c} j^{\alpha} \right) = 0,$$

$$\partial'_{\alpha} F'_{\beta\gamma} + \partial'_{\beta} F'_{\gamma\alpha} + \partial'_{\gamma} F'_{\alpha\beta} = (L^{-1})^{\mu}_{\alpha} (L^{-1})^{\nu}_{\beta} (L^{-1})^{\lambda}_{\gamma} (\partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda} F_{\mu\nu}) = 0.$$

Таким чином, тензор $F'_{\alpha\beta}$, що подається співвідношеннями (7.4), є розв'язком рівнянь електромагнітного поля в системі S' . Завдяки єдиності розв'язку цих рівнянь компоненти тензора $F'_{\alpha\beta} = \tilde{F}_{\alpha\beta}$ подають електромагнітне поле в новій системі відліку S' . Таким чином, зв'язок компонент тензора електромагнітного поля в різних системах дійсно можна подати формулами (7.4). Співвідношення, аналогічні (7.4), можна отримати між будь-якими системами відліку. Сукупність компонент $F_{\alpha\beta}$ в усіх системах утворює двічі коваріантний тензор.

7.3. Відносно інерціальної системи відліку S з координатами $\{t, \mathbf{r}\}$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, рухається зі сталою швидкістю \mathbf{v} інша інерціальна система S' з координатами $\{t', \mathbf{r}'\}$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. У деякий момент початки координат збігалися. Перетворення координат $S \rightarrow S'$ мають вид

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \quad (*)$$

де позначки \parallel та \perp відповідають поздовжнім та поперечним компонентам тривимірних векторів. За допомогою закону перетворення для тензора електромагнітного поля покажіть, що відповідні до (*) перетворення поперечних та поздовжніх компонент напруженості електричного поля та індукції магнітного поля мають вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

7.4. За допомогою формул перетворення електричного та магнітного полів при переході $S \rightarrow S'$ з вправи 7.3 покажіть прямим обчисленням, що величини $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ та $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ при цьому переході залишаються незмінними.

Розв'язок:

- Інваріантність $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$.

Розкладемо на паралельну та перпендикулярну до швидкості частини:

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = (E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2) - (B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2).$$

У системі S' :

$$E_{\parallel}^{\prime 2} - B_{\parallel}^{\prime 2} = E_{\parallel}^2 - B_{\parallel}^2.$$

Для перпендикулярних компонент візьмемо

$$\mathbf{E}_{\perp} = (0, E_y, E_z), \quad \mathbf{B}_{\perp} = (0, B_y, B_z), \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0),$$

тоді

$$[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}] = (0, -\beta B_z, \beta B_y), \quad [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp}] = (0, -\beta E_z, \beta E_y).$$

Отже,

$$\begin{aligned} E'_{y'} &= \gamma(E_y + \beta B_z), & E'_{z'} &= \gamma(E_z - \beta B_y), \\ B'_{y'} &= \gamma(B_y - \beta E_z), & B'_{z'} &= \gamma(B_z + \beta E_y). \end{aligned}$$

Обчислимо:

$$\begin{aligned} E_{\perp}'^2 &= \gamma^2 [(E_y + \beta B_z)^2 + (E_z - \beta B_y)^2], \\ B_{\perp}'^2 &= \gamma^2 [(B_y - \beta E_z)^2 + (B_z + \beta E_y)^2]. \end{aligned}$$

Різниця:

$$E_{\perp}'^2 - B_{\perp}'^2 = \gamma^2 [E_{\perp}^2 + 2\beta X + \beta^2 B_{\perp}^2 - B_{\perp}^2 - 2\beta X - \beta^2 E_{\perp}^2],$$

де $X = E_y B_z - E_z B_y$. Члени з X скорочуються, тому

$$E_{\perp}'^2 - B_{\perp}'^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) (E_{\perp}^2 - B_{\perp}^2) = E_{\perp}^2 - B_{\perp}^2.$$

Додаючи паралельну частину, отримуємо

$$\mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2.$$

- Інваріантність $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$.

Скалярний добуток:

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = E_{\parallel}' B_{\parallel}' + \mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp}.$$

Паралельна частина: $E_{\parallel}' B_{\parallel}'$ інваріантна. Для перпендикулярної:

$$\mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp} = E_y' B_y' + E_z' B_z'.$$

Підставляємо вирази для E_y', B_y', E_z', B_z' :

$$\begin{aligned} E_y' B_y' &= \gamma^2 (E_y + \beta B_z)(B_y - \beta E_z), \\ E_z' B_z' &= \gamma^2 (E_z - \beta B_y)(B_z + \beta E_y). \end{aligned}$$

Розкриваємо дужки:

$$\begin{aligned} E_y' B_y' &= \gamma^2 (E_y B_y - \beta E_y E_z + \beta B_z B_y - \beta^2 B_z E_z), \\ E_z' B_z' &= \gamma^2 (E_z B_z + \beta E_z E_y - \beta B_y B_z - \beta^2 B_y E_y). \end{aligned}$$

Додаємо:

$$\gamma^2 [E_y B_y + E_z B_z - \beta^2 (E_y B_y + E_z B_z)] = \gamma^2 (1 - \beta^2) (\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp}) = \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp}.$$

Отже,

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = E_{\parallel}' B_{\parallel}' + \mathbf{E}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

Отже:

$$\mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2, \quad \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

7.5. Виходячи з 4-вектора густини струму, покажіть, що перетворення густини заряду та густини струму, відповідні переходу $S \rightarrow S'$ з вправи 7.3, мають вид:

$$\rho' = \frac{\rho - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{v})/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{j}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{j}_{\parallel} - \rho \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{j}'_{\perp} = \mathbf{j}_{\perp}.$$

7.3. Рівняння руху зарядженої частинки

Рівняння Максвелла задовольняють принципу відносності; тому при створенні СТВ вони не потребували жодних коректив. Навпаки, рівняння руху ньютонівської механіки треба було модифікувати: вони не задовольняють принципам СТВ і призводять до нефізичних наслідків, особливо, коли швидкості руху наближаються до швидкості світла. Цю модифікацію можна отримати, якщо врахувати, що рівняння руху не містять якихось додаткових фізичних величин, окрім швидкості, прискорення, компонент $F_{\mu\nu}$, а також маси частинки m та її заряду q .

Отримаємо рівняння руху зарядженої частинки з урахуванням *принципу відповідності з класичною теорією*. У контексті рівнянь руху це означає, що у системі відліку, де швидкість частинки значно менша за швидкість світла c , можна користуватися ньютонівськими рівняннями

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right).$$

Ми далі використаємо навіть слабшу умову, що класичні рівняння руху виконуються при $\mathbf{v} = 0$. Основна ідея полягає у тому, що співвідношення між тензорними величинами, записані в одній системі відліку, можна поширити на будь-які системи.

Розглянемо коваріантний 4-вектор

$$R^{\mu} = mc^2 \frac{du^{\mu}}{ds} - qF^{\mu}_{\nu} u^{\nu},$$

де $s = c\tau$, τ — власний час вздовж світової лінії частинки, $u^{\mu} = dx^{\mu}/ds$.

Зафіксуємо деякий момент t_1 і подію А з координатами $(t_1, \mathbf{r}(t_1))$ та розглянемо інерціальну систему відліку S_1 , таку, де швидкість частинки у цей момент дорівнює нулю: $\mathbf{v} = 0$. Тоді, згідно з принципом відповідності, в цій системі у момент події А можна використати ньютонівські співвідношення (в декартових координатах):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) = q\mathbf{E}, \quad m \frac{d(\mathbf{v}^2/2)}{dt} = 0.$$

Завдяки цьому легко обчислити усі компоненти в S_1 : $R^\mu = 0$ в момент події A . Але, оскільки, за побудовою, R^μ це 4-вектор, згідно з властивостями векторів він дорівнює нулю у довільній інерціальній системі. Звідси маємо рівняння в момент події A :

$$mc^2 \frac{du^\mu}{ds} = qF^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (7.5)$$

Ці міркування можна повторити для будь-якої події на траєкторії частинки, тому **рівняння (7.5) є шуканим релятивістським узагальненням рівняння руху зарядженої частинки.**

Звернемо увагу, що серед чотирьох рівнянь (7.5) лише три є незалежними, якщо врахувати зв'язок між компонентами 4-швидкості. Навпаки, можна показати, що вони не суперечать цьому зв'язку: якщо помножити (7.5) на u_μ , через антисиметрію $F^{\mu\nu}$ у правій частині маємо $F^\mu{}_\nu u^\nu u_\mu \equiv F^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \equiv 0$, звідки $u_\mu \frac{du^\mu}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(u_\mu u^\mu)}{ds} = 0$, тобто з рівнянь (7.5) випливає $u^\mu u_\mu = \text{const}$. Кількість ступенів вільності, що визначається кількістю незалежних початкових умов для рівнянь руху, тут така ж сама, як і в класичній механіці.

З рівнянь руху отримаємо формулу для енергії та імпульсу частинки. Запишемо тривимірну форму рівнянь руху, яка є еквівалентною трьом компонентам (7.5) при $\mu = i = 1, 2, 3$:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right) = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right).$$

Права частина — це сила Лоренца, що визначає швидкість передачі імпульсу від поля до зарядженої частинки. Звідси випливає вираз для тривимірної частини релятивістського імпульсу:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}.$$

У згоді з принципом відповідності при $|\mathbf{v}|/c \ll 1$ маємо $\mathbf{p} \approx m\mathbf{v}$.

Компонента $\mu = 0$ рівняння (7.5) дає

$$mc^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right) = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}).$$

Права частина — це звичайна потужність, що описує передачу енергії від поля до частинки за одиницю часу. Звідси випливає релятивістський вираз для повної енергії рухомої частинки:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}.$$

Тут зроблено вибір константи інтегрування, що відповідає експериментальним даним щодо власної енергії частинок. Кінетична енергія частинки, за означенням, є $\mathcal{E}_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2$.

7.6. Частинка з зарядом q та масою m рухається в однорідному сталому електромагнітному полі, причому електричне \mathbf{E} та магнітне \mathbf{B} поля паралельні. В початковий момент $t = 0$ частинка була у початку координат та мала швидкість v , перпендикулярну до полів. Знайти залежності координат зарядженої частинки від власного часу τ .

Відповідь. Нехай вісь OZ спрямована вздовж вектора напруженості електричного поля, а вісь OX — вздовж напрямку швидкості в початковий момент. Тоді

$$\begin{aligned} ct &= \frac{c\gamma}{\omega_E} \operatorname{sh}(\omega_E \tau), & z &= \frac{c\gamma}{\omega_E} (\operatorname{ch}(\omega_E \tau) - 1), \\ x &= \frac{v\gamma}{\omega_B} \sin(\omega_B \tau), & y &= \frac{v\gamma}{\omega_B} (\cos(\omega_B \tau) - 1), \end{aligned}$$

$$\text{де } \omega_E = \frac{qE}{mc}, \quad \omega_B = \frac{qB}{mc}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

7.4. Плоскі монохроматичні хвилі

За відсутності зарядів і струмів ($j^\mu = 0$) розв'язок однорідних рівнянь Максвелла

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

можна шукати у вигляді суперпозиції плоских монохроматичних хвиль

$$F_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu} \exp(-i\Omega),$$

де компоненти тензора $f_{\mu\nu}$ — сталі, а скаляр Ω — лінійна функція координат, $\Omega(x) = k_\mu x^\mu \equiv k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$; $k_\mu = \partial_\mu \Omega$ — хвильовий (коваріантний) чотиривектор.

Частота коливань періодичного процесу, яку реєструє спостерігач на світовій лінії $x_{\text{obs}}^\mu(\tau)$, — це швидкість зміни фази $\Omega(x_{\text{obs}}^\mu(\tau))$ за власним часом спостерігача:

$$\omega = \frac{d}{d\tau} \Omega(x_{\text{obs}}^\mu(\tau)) = c \frac{d}{ds} \Omega = c k_\mu u_{\text{obs}}^\mu, \quad (7.6)$$

де $u_{\text{obs}}^\mu = dx_{\text{obs}}^\mu / ds_{\text{obs}}$ — 4-швидкість спостерігача, τ — власний час спостерігача, що вимірює частоту, $s = c\tau = s_{\text{obs}}$.

Вектор $K^\mu = k^\mu - k_\alpha u_{\text{obs}}^\alpha u_{\text{obs}}^\mu$, ортогональний до u_{obs}^μ , визначає напрямок руху електромагнітних хвиль відносно спостерігача. Дійсно, у власній системі спостерігача 4-швидкість має лише одну ненульову компоненту $\{u_{\text{obs}}^\mu\} = \{1, 0, 0, 0\}$, звідки $K^0 = 0$, а тривимірні компоненти векторів збігаються з $K^i = k^i$.

Підстановка тензора електромагнітного поля для плоских хвиль у (7.1) та (7.2) дає

$$f^{\mu\nu}k_\nu = 0, \quad (7.7)$$

$$f_{\alpha\beta}k_\gamma + f_{\beta\gamma}k_\alpha + f_{\gamma\alpha}k_\beta = 0. \quad (7.8)$$

Перше рівняння (7.7) складає умову поперечності електромагнітних хвиль у вакуумі. Згортаючи (7.8) з k^γ , після підсумовування за індексом γ з урахуванням (7.7) отримуємо $f_{\alpha\beta}k_\gamma k^\gamma = 0$ та, для ненульової амплітуди $f_{\alpha\beta}$,

$$k_\gamma k^\gamma = 0, \quad \text{або} \quad \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} = 0. \quad (7.9)$$

Звідси випливає $k^0 = |\mathbf{k}|$.

Згортаючи (7.8) з $f^{\alpha\beta}$ із врахуванням (7.7) дістанемо $f^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta} = 0$, або $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0$, що еквівалентне $\mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2$. Згорнемо (7.8) з $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}$ та врахуємо, що (7.8) можна записати як $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}k_\alpha f_{\beta\gamma} = 0$. Після такої операції зникають доданки

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(f_{\mu\nu}f_{\beta\gamma}k_\alpha + f_{\gamma\alpha}k_\beta) \equiv (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}k_\alpha)f_{\beta\gamma} + (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}k_\beta)f_{\gamma\alpha} = 0$$

і залишається $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}f_{\alpha\beta} = 0$, або $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = 0$, що еквівалентне $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Як і слід було очікувати, отримано звичайні співвідношення для плоских хвиль у вакуумі.

7.5. Ефект Доплера

Отримаємо формулу ефекту Доплера — зміни спостережуваної частоти випромінювання залежно від руху джерела відносно спостерігача.

Аналогічно (7.6), власна частота коливань випромінювача з траєкторією $x_s^\mu(\tau_s)$, власним часом τ_s та 4-швидкістю $u_s^\mu = dx_s^\mu/d\tau_s$ є

$$\omega_0 = \frac{d\Omega(x_s^\mu(\tau_s))}{d\tau_s} = ck_\mu u_s^\mu. \quad (7.10)$$

Ця формула інваріантна і справедлива у будь-якій системі відліку. Для отримання явного фізичного результату перейдемо у систему спостерігача.

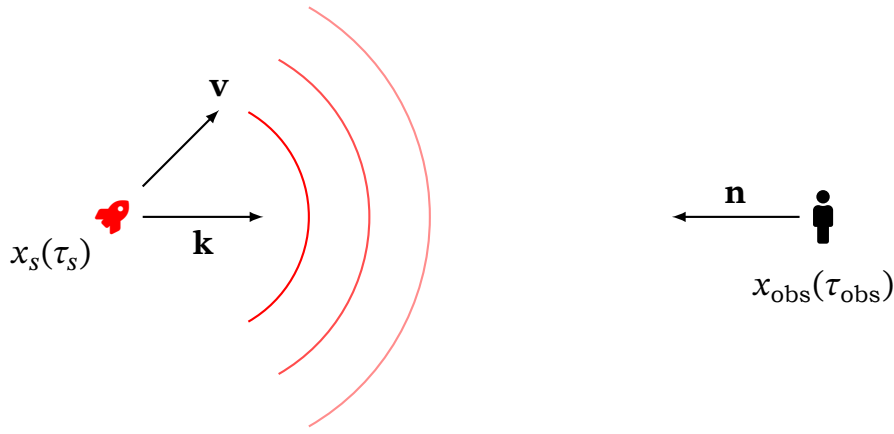


Рис. 7.1. Геометрія ефекту Доплера: \mathbf{k} — хвильовий вектор, \mathbf{n} — одиничний вектор від спостерігача до джерела.

У системі відліку спостерігача його 4-швидкість має вигляд $u_{\text{obs}}^\mu = \{1, 0, 0, 0\}$, тому виміряна ним частота

$$\omega_{\text{obs}} = ck_\mu u_{\text{obs}}^\mu = ck_0 = ck^0. \quad (7.11)$$

Введемо одиничний вектор \mathbf{n} у напрямку від спостерігача до джерела. Тоді $\mathbf{k} = -k^0 \mathbf{n}$, і 4-вектор хвилі набуває вигляду $k^\mu = k^0 \{1, -\mathbf{n}\}$.

Розкладемо тепер $k_\mu u_s^\mu$ у цій самій системі. 4-швидкість джерела, що рухається зі швидкістю \mathbf{v} відносно спостерігача, дорівнює $u_s^\mu = \gamma \{1, \mathbf{v}/c\}$, де $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ — лоренц-фактор джерела. Тоді

$$k_\mu u_s^\mu = k^0 \gamma \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right). \quad (7.12)$$

Беручи відношення двох інваріантних частот, отримуємо формулу ефекту Доплера:

$$\frac{\omega_{\text{obs}}}{\omega_0} = \frac{k_\mu u_{\text{obs}}^\mu}{k_\mu u_s^\mu} = \frac{k^0}{k^0 \gamma \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c}, \quad (7.13)$$

де \mathbf{v} — швидкість джерела відносно спостерігача, \mathbf{n} — одиничний вектор від спостерігача до джерела. За нерелятивістських швидкостей ($v \ll c$) корінь у чисельнику наближено дорівнює одиниці.

Введемо кут θ між швидкістю джерела \mathbf{v} та напрямком поширення хвилі в системі спостерігача, тобто

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v \cos \theta,$$

тоді формулу (7.13) можна записати у вигляді:

$$\frac{\omega_{\text{obs}}}{\omega_0} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \theta} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}. \quad (7.14)$$

Нехай спостерігач та джерело знаходяться весь час на одній прямій, тобто $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \pm v$, де $v = |\mathbf{v}|$. Підставляючи в (7.13), отримуємо два випадки:

1. Коли джерело *наближається* до спостерігача ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = -v$):

$$\frac{\omega_{\text{obs}}}{\omega_0} = \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right)^{1/2} > 1 \quad (\text{блакитний зсув}).$$

2. Коли джерело *віддаляється* від спостерігача ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = +v$):

$$\frac{\omega_{\text{obs}}}{\omega_0} = \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{1/2} < 1 \quad (\text{червоний зсув}).$$

Обидва вирази є взаємно оберненими, що відображає симетрію: якщо джерело і спостерігач поміняти місцями, частоти обмінюються ролями.

7.7. Частинка (джерело світла) рухається з постійною швидкістю \mathbf{v} відносно спостерігача. У власній системі вона випромінює монохроматичну хвилю з частотою ω_0 у напрямку, що утворює кут θ_0 з віссю x_0 (вісь вздовж \mathbf{v}). Знайти в системі спостерігача:

- кут θ між напрямком поширення хвилі та віссю x (релятивістська аберація);
- при якому θ_0 частота ω , що реєструється спостерігачем, дорівнює ω_0 ;
- як співвідносяться θ і θ_0 при $\beta \ll 1$.

Розв'язок.

У власній системі джерела хвильовий 4-вектор має вигляд:

$$k_s^\mu = \frac{\omega_0}{c} (1, \cos \theta_0, \sin \theta_0, 0).$$

Перехід до системи спостерігача здійснюється лоренц-бустом уздовж осі x (використаємо позначення $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$). Отримуємо компоненти 4-вектора в системі спостерігача:

$$k^0 = \gamma \frac{\omega_0}{c} (1 + \beta \cos \theta_0),$$

$$k^x = \gamma \frac{\omega_0}{c} (\cos \theta_0 + \beta), \quad k^y = \frac{\omega_0}{c} \sin \theta_0.$$

У системі відліку спостерігача його 4-швидкість має вигляд $u^\mu = \{1, 0, 0, 0\}$, тому виміряна ним частота $\omega = k_\mu u^\mu$ дорівнює:

$$\omega = ck_0 = ck^0 = \gamma \omega_0 (1 + \beta \cos \theta_0). \quad (*)$$

Цей вираз також описує доплерівський зсув, але через кут випромінювання θ_0 у власній системі джерела, однак для спостерігача цей кут не є спостережуваною; натомість, спостережуваним є кут θ , який входить у формулу (7.14). Різниця між цими виразами зумовлена релятивістською аберацією, що пов'язує напрямки

поширення хвилі в різних інерціальних системах. Отже, для переходу до спостережуваних величин необхідно встановити зв'язок між кутами θ_0 і θ . Кут у системі спостерігача визначається як:

$$\tan \theta = \frac{k^y}{k^x} = \frac{\sin \theta_0}{\gamma(\cos \theta_0 + \beta)},$$

або

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta_0 + \beta}{1 + \beta \cos \theta_0}.$$

З формули (*), випливає, що за умови $\omega = \omega_0$:

$$\gamma(1 + \beta \cos \theta_0) = 1.$$

Звідси:

$$\cos \theta_0 = \frac{1/\gamma - 1}{\beta} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} - 1}{\beta}.$$

При $\gamma \approx 1$ (нерелятивістська границя) маємо:

$$\tan \theta \approx \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 + \beta}.$$

Розкладаючи за малим β :

$$\theta \approx \theta_0 - \beta \sin \theta_0.$$

7.6. Вектор-потенціал електромагнітного поля у випадку ізолюваної системи

У цьому розділі отримаємо явний розв'язок рівнянь електромагнітного поля за допомогою *4-вектора потенціалу*, існування якого забезпечене рівняннями (7.2): внаслідок цих рівнянь можна ввести коваріантне векторне поле A_μ (4-потенціал), таке, що

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (7.15)$$

Дійсно, підстановка (7.15) в рівняння (7.2) дає тотожний нуль. Можна показати й обернене, що з рівняння (7.2) дійсно випливає існування деякого поля A_μ , що дає (7.15). Однак ми не доводимо це твердження, оскільки ми отримаємо A_μ в явному вигляді, з якого буде видно, що це дійсно коваріантний вектор, який реалізує розв'язок (7.1), що відповідає умовам ізолюваної системи зарядів та струмів; при цьому (7.2), як було зазначено, виконуються тотожно.

Очевидно, фізичні поля, що їх описує тензор $F_{\mu\nu}$ згідно до (7.15), залишаться незмінними при перетворенні виду $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$, де χ — довільна функція. Це перетворення 4-потенціалу називають *калібрувальним (або градієнтним)*. Завдяки калібрувальній інваріантності можна накласти умову Лоренца¹:

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (7.16)$$

Цю умову також далі перевіримо явно, коли отримаємо потрібний розв'язок.

За умови (7.16) підстановка (7.15) у рівняння Максвелла (7.1) дає

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (7.17)$$

де $\square \equiv \partial_\nu \partial^\nu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ — оператор Даламбера (хвильовий оператор).

Розв'язок (7.17), що задовольняє також (7.16), породжує розв'язок рівнянь Максвелла для тензора електромагнітного поля за формулою (7.15). Далі ми знов звернемося до постановки задачі, що відповідає *ізолюваній системі за відсутності зовнішнього випромінювання*. Розглянемо розв'язок (7.17) починаючи з нескінченного минулого, припускаючи, що 4-вектор $j^\nu(x) \equiv j^\nu(x^0, \mathbf{r})$ відмінний від нуля лише в обмеженій області просторових координат \mathbf{r} , а будь-які джерела на нескінченності відсутні. Як відомо з курсу математичної фізики, цим умовам відповідає розв'язок рівняння (7.17) у вигляді запізнюючих потенціалів, що можна подати за допомогою фундаментального розв'язку $G_{\text{ret}}(x)$ оператора Даламбера:

$$G_{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0) \delta[(x^0)^2 - \mathbf{r}^2], \quad x \equiv \{x^\alpha\} \equiv (x^0, \mathbf{r}),$$

де $\theta(t) \equiv \{0, t < 0; 1, t > 0\}$ — функція Хевісайда, δ — функція Дірака; цей розв'язок, за визначенням, задовольняє рівнянню

$$\square G_{\text{ret}}(x) = \delta^4(x) \equiv \delta(x^0) \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3).$$

Відповідний розв'язок рівняння (7.17) має вид згортки¹:

$$A^\nu = \frac{4\pi}{c} G_{\text{ret}} * j^\nu. \quad (7.18)$$

Формально це можна записати так:

$$A^\nu(x) = \frac{2}{c} \int d^4\mathbf{x} \theta(x^0 - x'^0) \delta[(x^0 - x'^0)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2] j^\nu(x')$$

¹Якби ця умова не виконувалася, можна підібрати функцію χ так, аби забезпечити (7.16) для нового 4-потенціалу.

¹Згортка функцій (відрізнати від згортки тензорів!) визначається за формулою $\int f(x - x')g(x') d^4\mathbf{x}'$; символ «*» у (7.18) означає саме її.

$$= \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{j^\nu(x_{\text{ret}}^0, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad x_{\text{ret}}^0 \equiv x^0 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

Розв'язок описує електромагнітне поле обмеженої системи з 4-вектором густини струму j^ν . Функція $G_{\text{ret}}(x)$ є скаляром відносно власних перетворень Лоренца, оскільки тут аргумент δ -функції залежить від квадрата інтервалу, а в $\theta(x^0)$ аргумент не змінює знак при цих перетвореннях. Тому з (7.18) випливає, що A^ν є **4-вектором відносно перетворень власної групи Лоренца, оскільки j^ν — 4-вектор**.

Формула (7.18), що явно гарантує властивості A^ν як 4-вектора, дозволяє прямо обчислити за допомогою (7.15) закон перетворення компонент $F_{\mu\nu}$ при переході в іншу систему відліку. Це дає змогу встановити, що $F_{\mu\nu}$ — **двічі коваріантний тензор**.

Користуючись рівнянням (7.18), перевіримо також калібрувальну умову (7.16). Маємо

$$\begin{aligned} \partial_\nu A^\nu &= \frac{4\pi}{c} \partial_\nu \{G_{\text{ret}} * j^\nu\} \equiv \frac{4\pi}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^\nu} G_{\text{ret}}(x - x') j^\nu(x') d^4 \mathbf{x}' \\ &= \frac{4\pi}{c} \int G_{\text{ret}}(x - x') \frac{\partial}{\partial x'^\nu} j^\nu(x') d^4 \mathbf{x}' \equiv \frac{4\pi}{c} G_{\text{ret}} * \partial_\nu j^\nu = 0, \end{aligned}$$

внаслідок закону збереження заряду (7.3). За умови Лоренца з рівнянь (7.16), (7.17) випливає (7.1).

Таким чином, тензор $F_{\mu\nu}$, обчислений за формулами (7.15), (7.18), задовольняє рівнянням (7.1), (7.2).

7.8. Покладаючи $\{A^\mu\} = \{A^0, \mathbf{A}\}$ (контраваріантний вектор! Звертайте увагу на положення індексів!), де $A^0 = \varphi$ — скалярний та \mathbf{A} — векторний потенціали електромагнітного поля класичної електродинаміки відповідно, запишіть тривимірну форму рівнянь: (а) $\partial_\nu A^\nu = 0$; (б) $\square A^\nu = (4\pi/c)j^\nu$.

8

Варіаційний принцип для рівнянь електродинаміки

Рівняння динаміки частинок та полів можна пов'язати з певними варіаційними принципами, які широко використовують в теоретичній фізиці. Ці принципи пов'язані з поняттями дії та лагранжіану. В цьому розділі варіаційний принцип найменшої дії проілюстровано на прикладі рівнянь електродинаміки. Буде подано функціонали дії, з яких можна отримати рівняння руху заряджених частинок і рівняння електромагнітного поля. Цей розділ спирається на знання основ варіаційного числення.

8.1. Заряд у зовнішньому електромагнітному полі

Розглянемо траєкторію (світову лінію) точкової частинки $x^\mu = x^\mu(p)$, де p — деякий неособливий параметр. На ділянці траєкторії між точками $a = x^\mu(p_1)$ та $b = x^\mu(p_2)$ розглянемо інтеграл

$$S_0 = -mc \int_a^b ds = -mc \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}} dp, \quad (8.1)$$

що має назву *дії для вільної частинки*; вибір коефіцієнтів забезпечує відповідність з нерелятивістським наближенням для дії. Також розглянемо інтеграл

$$S_{\text{int}} = -\frac{q}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu = -\frac{q}{c} \int_{p_1}^{p_2} A_\mu \frac{dx^\mu}{dp} dp, \quad (8.2)$$

що описує взаємодію частинки з електромагнітним полем; тут A_μ — 4-вектор потенціалу, q — заряд частинки. Легко перевірити, що параметр p можна вибрати довільно; при будь-якій заміні $p \rightarrow p' = p'(p)$ вигляд (8.1) та (8.2) не змінюється.

Уведемо дію для частинки у зовнішньому полі:

$$S = S_0 + S_{\text{int}}.$$

Дія S є функціоналом, що зіставляє з кожною траєкторією певне число. Далі ми розглянемо першу варіацію S по траєкторії частинки. Зауважимо, що повний функціонал дії є сумою дій для окремих частинок плюс дія для поля. Але при обчисленні варіацій S траєкторії різних частинок вважаються незалежними, тому на цьому етапі досить розглянути дію для однієї частинки. Дія для поля не залежить від змінних частинок і не впливає на варіацію S при варіаціях траєкторії частинки $x_0^\mu(p) \rightarrow x_0^\mu(p) + \delta x^\mu(p)$.

Варіаційний принцип найменшої дії для частинки у зовнішньому полі можна сформулювати так: перша варіація $\delta S = \delta S_0 + \delta S_{\text{int}}$ дорівнює нулю на траєкторії $x_0^\mu(p)$ тоді й тільки тоді, якщо ця траєкторія задовольняє рівнянням руху. Траєкторію $x_0^\mu(p)$ називають *опорною*.

Зауважимо, що, як відомо з варіаційного числення, умова $\delta S = 0$ є лише необхідною умовою мінімуму функціоналу дії¹. Аналіз достатніх умов мінімуму потребує додаткового розгляду.

Покажемо, що наслідком принципу найменшої дії згідно формул (8.1), (8.2) є релятивістські рівняння руху частинки в електромагнітному полі. Розглянемо траєкторії в околі опорної світової лінії $x_0^\mu(p)$. При малих змінах траєкторії $x_0^\mu(p) \rightarrow x_0^\mu(p) + \delta x^\mu(p)$ числове значення функціоналу S змінюється. Нас цікавитимуть малі зміни дії

$$S[x_0^\mu + \delta x^\mu] - S[x_0^\mu]$$

при довільних $\delta x^\mu(p)$ за стандартної умови

$$\delta x^\mu(p_1) = \delta x^\mu(p_2) = 0 \quad (8.3)$$

(так звана варіація з закріпленими кінцями). Малі зміни дії розглядаємо з точністю до лінійних по δx^μ членів, тобто розгляд обмежується першою варіацією $\delta S \approx S[x_0^\mu + \delta x^\mu] - S[x_0^\mu]$.

Дію S запишемо у вигляді

$$S = \int L(x(p), \dot{x}(p)) dp,$$

де $L(x, \dot{x}) = -mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} - \frac{q}{c} A_\mu(x) \dot{x}^\mu$; тут позначено $\dot{x}^\alpha \equiv dx^\alpha/dp$.

Покажемо, що з умови $\delta S = 0$ випливають рівняння руху зарядженої частинки:

$$mc^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{ds}, \quad \text{де} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (8.4)$$

За стандартною процедурою варіаційного числення умова $\delta S = 0$ з урахуванням (8.3) приводить до *рівнянь Ейлера–Лагранжа* для

¹Фактично далі ми обмежуємося розглядом умови стаціонарності дії, а не її мінімуму.

функції $L(x, \dot{x})$:

$$\frac{d}{dp} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu},$$

або, обчислюючи похідні від L ,

$$\frac{d}{dp} \left(mc \frac{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{ds/dp} + \frac{q}{c} A_\mu \right) = \frac{q}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \dot{x}^\nu,$$

де $ds/dp = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$.

Перейдемо від параметра p до $s = \int_{p_1}^p (ds/dp') dp'$:

$$\frac{d}{ds} \left(mc \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + \frac{q}{c} A_\mu \right) = \frac{q}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{ds}.$$

Розкриваємо похідну в лівій частині:

$$mc \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} = \frac{q}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{q}{c} \frac{d}{ds} A_\mu = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds}.$$

Результатом є рівняння, які збігаються з (8.4) після підняття індексу μ .

Звернемо увагу, що хоча в лагранжіані L фігурує 4-вектор потенціал A_μ , він з'являється в явному вигляді в рівняннях руху лише через тензор електромагнітного поля $F_{\alpha\beta}$, який, таким чином, і є спостережуваною величиною.

8.1. Релятивістська заряджена частинка з масою m та зарядом q рухається у полі нерухомого заряду Q . Отримати рівняння для тривимірної траєкторії частинки.

Розв'язання. Коваріантний 4-потенціал нерухомого заряду в початку координат є $A_\mu = (\alpha r^{-1}, 0, 0, 0)$. Якщо у виразі для дії перейти до параметра t , підінтегральний вираз дає тривимірну функцію Лагранжа зарядженої частинки у зовнішньому полі:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = Qq.$$

Звідси маємо інтеграл енергії:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\alpha}{r} = \mathcal{E}. \quad (8.5)$$

У сферичних координатах в площині $\theta = \pi/2$ інтеграл моменту є

$$\frac{mr^2 \dot{\phi}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L. \quad (8.6)$$

Комбінуючи (8.5) та (8.6), позбавимось $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ та отримаємо:

$$r^2 \dot{\phi} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right) = Lc^2.$$

З урахуванням цього співвідношення, позначаючи $u = r^{-1}$, $u' = du/d\phi$,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = \frac{L^2 c^4 (u'^2 + u^2)}{(\mathcal{E} - \alpha u)^2}.$$

Звідси та з (8.5) маємо

$$m^2 c^4 = (\mathcal{E} - \alpha u)^2 - (u'^2 + u^2) L^2 c^2,$$

або

$$u'^2 + \omega_0^2 u^2 + \frac{2\alpha\mathcal{E}}{L^2 c^2} u = \frac{m^2 c^4 - \mathcal{E}^2}{L^2 c^2}, \quad \omega_0^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{L^2 c^2}.$$

За $\omega_0^2 > 0$ рівняння має вигляд закону збереження енергії для осцилятора зі зміщеним центром; його розв'язками є тригонометричні функції. За $\omega_0^2 < 0$ розв'язками є гіперболічні функції; зокрема, можливе падіння на центр $r \rightarrow 0$.

8.2. Дія для електромагнітного поля

Мета цього підрозділу — сформулювати варіаційний принцип, з якого випливають рівняння електромагнітного поля Максвелла. Згідно з сучасними уявленнями, дія для системи «поле + джерела» має складатися з суми функціоналів дії для поля, для зарядів та доданка, що описує взаємодію поля із зарядами:

$$S = S_0 + S_{\text{int}} + S_f. \quad (8.7)$$

Оскільки поля задано в усьому просторі, функціонал дії повинен містити інтегрування по чотиривимірному об'єму, а не тільки по траєкторіях, як у випадку частинок. Тому подаватимемо $S_{\text{int}} + S_f$ у вигляді такого інтеграла:

$$S_{\text{int}} + S_f = \int_{\Omega} d^4 \mathbf{x} \Lambda_{\text{tot}}(A_{\mu}(x), A_{\mu,\nu}(x)), \quad \Lambda_{\text{tot}} = \Lambda_{\text{int}} + \Lambda_f. \quad (8.8)$$

Незалежними змінними, відносно яких обчислюватиметься варіація, вважаємо компоненти 4-вектора потенціалу A_{μ} . Область інтегрування Ω може охоплювати весь простір, а може бути скінченною. Варіацію функціоналу дії розглядаємо за умови, що зміни польових функцій обертаються на нуль на межі області інтегрування $\partial\Omega$.

Зауваження. Якщо змінити підінтегральний вираз в (8.8), додавши до нього повну 4-дивергенцію $\Lambda \rightarrow \Lambda + \partial_\mu f^\mu$, де f — будь-яка функція від польових змінних (але не від їх похідних), то при обчисленні варіації додається вираз

$$\int \partial_\mu \delta f^\mu d^4\mathbf{x} = 0,$$

що обертається на нуль через граничні умови на $\partial\Omega$ після застосування формули Остроградського-Гауса. Тому додавання повної 4-дивергенції до Λ не впливає на рівняння, що випливають з варіаційного принципу.

Вирази для S_0 та S_{int} отримаємо з (8.1), (8.2) за допомогою підсумовування дій для окремих частинок:

$$S_0 = -mc \int ds, \quad S_{\text{int}} = -\frac{q}{c} \int A_\mu dx^\mu. \quad (8.9)$$

Як було зазначено, ці вирази слід подати у вигляді інтегралів. Зробимо це лише для S_{int} , оскільки S_0 не впливає на виведення рівнянь поля при обчисленні варіації δS по δA_μ . Для неперервного розподілу ми зіставляємо до кожного елементу заряду dq його траєкторію $x_q^\mu(t)$; відповідно

$$dq \frac{dx_q^\mu}{dt} = \rho(\text{vectr}) d^3\mathbf{r} \frac{dx_q^\mu}{dt} = j^\mu(\mathbf{x}) d^3\mathbf{r},$$

де ρ — об'ємна густина заряду, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q(t)$, $j^\mu = \rho dx^\mu/dt$ — 4-вектор густини струму. Тоді, переходячи в S_{int} до інтеграла по області Ω чотиривимірного простору, маємо:

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} &= -\frac{1}{c} \int_{\Omega} dq A_\mu(x_e) \frac{dx_q^\mu}{dt} dt = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} dt d^3\mathbf{r} A_\mu(x) j^\mu(x) = \\ &= -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d^4\mathbf{x} A_\mu(x) j^\mu(x). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Виникає питання, чи не втратимо ми калібрувальну інваріантність теорії завдяки тому, що в (8.10) явно входить 4-потенціал? Відсутність тут якихось непорозумінь впливає в першу чергу з того, що з принципу найменшої дії буде отримано правильні рівняння поля, що є калібрувально-інваріантними. Але навіть на даному етапі можна пересвідчитися, що вираз (8.10) є калібрувально-інваріантним, якщо врахувати закон збереження заряду. Покажемо, що (8.10) не змінюється при калібрувальних перетвореннях

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi,$$

де $\chi|_{\partial\Omega} = 0$ на межі області. При такому перетворенні інтеграл (8.10) отримує доданок

$$-\frac{1}{c^2} \int d^4\mathbf{x} \frac{\partial\chi}{\partial x^\mu} j^\mu = -\frac{1}{c^2} \int d^4\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\chi j^\mu) + \frac{1}{c^2} \int d^4\mathbf{x} \chi j^\mu{}_{,\mu}.$$

Інтеграл від дивергенції зникає на межі $\partial\Omega$, а другий доданок дорівнює нулю завдяки закону збереження заряду $j^\mu{}_{,\mu} = 0$. Це ілюструє зв'язок калібрувальної інваріантності зі збереженням заряду.

Підберемо вираз для S_f , що приводить до рівнянь класичної електродинаміки. Поле для пошуків Λ_f значно звужується, якщо врахувати такі обставини. По-перше, рівняння електромагнітного поля мають однаковий вигляд в усіх інерціальних системах відліку. Тому доцільно конструювати Λ_f як скаляр за допомогою згортки вектора A_μ та його похідних $A_{\mu,\alpha}$. По-друге, в рівняннях руху фігурує не безпосередньо A_μ , а величини $F_{\mu\nu}$. Саме $F_{\mu\nu}$ мають фізичний зміст як величини, які можливо вимірювати, причому вони інваріантні відносно калібрувальних перетворень. Щоб зберегти калібрувальну інваріантність в рівняннях поля, будемо конструювати Λ_f саме з величин $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Ці величини задовольняють рівнянням, які запишемо у вигляді:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot F_{\beta\gamma,\delta} = 0. \quad (8.11)$$

Щоб отримати лінійні рівняння поля, природно обмежитися лише квадратичними комбінаціями $F_{\mu\nu}$, які є скалярами відносно групи Лоренца. Таких комбінацій, з точністю до сталого множника, лише дві:

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{та} \quad I_2 = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}.$$

Точніше, I_2 — псевдоскаляр; він змінює знак при інверсіях координат; він зводиться до повної дивергенції:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} (\partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma) = 2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} \partial_\gamma A_\delta = 2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma (F_{\alpha\beta} A_\delta),$$

де було враховано антисиметрію $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}$ та рівняння (8.11), що мають місце завдяки вигляду $F_{\mu\nu}$ за побудовою. Інтеграл від I_2 по області Ω зводиться до інтегралу по межі $\partial\Omega$ і не дає внеску в рівняння поля всередині Ω . Таким чином, в нашому розпорядженні залишається лише інваріант I_1 , тому можна вибрати

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4\mathbf{x}. \quad (8.12)$$

Вибір сталого множника зроблено заздалегідь так, щоб забезпечити відповідність рівнянням Максвелла в гаусовій системі одиниць.

Можна показати, що вибір іншого множника вплине лише на визначення одиниці заряду. Враховуючи внесок взаємодії поля і зарядів, покладемо

$$S_f + S_{\text{int}} = \int d^4\mathbf{x} \Lambda, \quad (8.13)$$

де

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A_\mu j^\mu.$$

Нагадаємо, що незалежними польовими змінними в (8.13) вважаємо A_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. Обчислимо $\delta(S_f + S_{\text{int}}) = \int_\Omega d^4\mathbf{x} \delta\Lambda$ за умови, що варіації польових змінних на межі області інтегрування зникають:

$$\delta A_\mu(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Маємо

$$\delta S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int_\Omega d^4\mathbf{x} j^\nu(x) \delta A_\nu(x);$$

$$\begin{aligned} \delta \int_\Omega d^4\mathbf{x} I_1 &= 2 \int_\Omega d^4\mathbf{x} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = 2 \int_\Omega d^4\mathbf{x} F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \\ &= 4 \int_\Omega d^4\mathbf{x} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu = 4 \int_\Omega d^4\mathbf{x} \left[\partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) - \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu \right] \\ &= -4 \int_\Omega d^4\mathbf{x} \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu, \end{aligned}$$

де застосовано формулу Остроградського-Гауса і враховано умову на $\partial\Omega$. Звідси

$$\delta(S_f + S_{\text{int}}) = \int_\Omega d^4\mathbf{x} \left(\frac{1}{4\pi c} \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} j^\nu \right) \delta A_\nu(x).$$

Згідно з принципом стаціонарної дії, цей вираз має дорівнювати нулю для довільних варіацій $\delta A_\nu(x)$ всередині Ω . Це можливо лише коли вираз в дужках дорівнює нулю, або остаточно:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \quad (8.14)$$

Разом із (8.11) це рівняння утворює повну систему рівнянь Максвелла для тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$.

9

Тензор енергії-імпульсу і закони збереження

В цьому розділі будуть отримані закони збереження енергії-імпульсу та моменту імпульсу як наслідок рівнянь електродинаміки в коваріантній формі та введено тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля.

9.1. Чотири-імпульс системи тіл

Перепишемо рівняння руху частинки в зовнішньому електромагнітному полі за допомогою вектора 4-імпульсу, який означимо так:

$$p^\mu = mc u^\mu.$$

Очевидно, завдяки співвідношенню $u^\mu u_\mu = 1$, маємо

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2. \quad (9.1)$$

Рівняння руху мають вид

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{ds}.$$

Вибираючи час системи відліку як незалежної змінної, перепишемо це співвідношення у вигляді

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{dt}, \quad (9.2)$$

з якого випливає фізичний зміст компонент p^μ . Дійсно, при $\mu = 0$, враховуючи представлення $F^{\mu\nu}$ через електричне і магнітне поля, маємо

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}),$$

де $\varepsilon = cp^0 = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — звичайна швидкість, або $d\varepsilon = q(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r})$.

Права частина цього рівняння — робота електромагнітного поля, яке діє на частинку з зарядом q й передає їй певну енергію, зміна якої $d\mathcal{E}$ фігурує в лівій частині.

При $\mu = i = 1, 2, 3$ з (9.2) у тривимірних позначеннях дістанемо

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right),$$

де $\mathbf{p} = m\mathbf{v}(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — тривимірна частина 4-імпульсу. Це рівняння описує обмін імпульсом між зарядженим тілом та електромагнітним полем, причому права частина рівняння дає значення сили, що діє на тіло. Таким чином, \mathbf{p} має сенс імпульсу рухомого тіла.

З рівняння (9.1) випливає зв'язок між енергією та імпульсом:

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2.$$

Узагальнимо енергетичні співвідношення на випадок неперервного розподілу зарядів. Обмін 4-імпульсом між полем та системою N точкових тіл в області¹ Ω_3 звичайного тривимірного простору описується рівнянням, яке випливає з (9.2):

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{c} F^\mu{}_\nu(x_k) \frac{dx_k^\nu}{dt},$$

де $P^\mu = \sum_{k=1}^N p_k^\mu$ — 4-імпульс системи тіл.

У випадку неперервного розподілу перейдемо від сум до інтегрування:

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \frac{1}{c} \int dq \cdot F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} \rho F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} F^\mu{}_\nu j^\nu. \quad (9.3)$$

Права частина (9.3) визначає 4-імпульс, який поле передає системі частинок за одиницю часу.

9.2. Енергія-імпульс електромагнітного поля

Введемо, за означенням, *тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля*:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (9.4)$$

¹Тут вважаємо, що частинки не перетинають меж цієї області. Якщо це не виконується, в рівняннях збереження треба враховувати потік частинок через межу області.

Знайдемо величину $\partial_\mu T^\mu_\nu$, з урахуванням рівнянь Максвелла для $F_{\mu\nu}$. Обчислимо спочатку допоміжне співвідношення, яке випливає з другої групи рівнянь Максвелла з урахуванням антисиметрії $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta,\nu} &= -F^{\alpha\beta} (F_{\beta\nu,\alpha} + F_{\nu\alpha,\beta}) = \\ &= -F^{\alpha\beta} (-F_{\nu\beta,\alpha} + F_{\nu\alpha,\beta}) = \\ &= F^{\alpha\beta} F_{\nu\beta,\alpha} - F^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha,\beta} = -F^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha,\beta} - F^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha,\beta} = -2F^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha,\beta}, \end{aligned}$$

Звідси

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) = 2F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta,\nu} = -4F^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha,\beta}.$$

Враховуючи це співвідношення та беручи до уваги першу групу рівнянь Максвелла (7.1), дістаємо:

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = \frac{1}{4\pi} (-\partial_\mu F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} - F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha,\mu} - F^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha,\beta}).$$

Завдяки антисиметрії $F_{\mu\nu}$ другий та останній доданки скорочуються, звідси:

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = -\frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} = -\frac{1}{c} F_{\nu\alpha} j^\alpha. \quad (9.5)$$

Права частина цього рівняння, згідно до (9.3), визначає 4-імпульс, що переходить від поля до зарядів в одиниці об'єму за одиницю часу. Підніmemo індекс ν за допомогою метричного тензора та проінтегруємо (9.5) по тривимірному об'єму Ω_3 , тоді права частина дасть втрати енергії поля всередині об'єму Ω_3 за одиницю часу. Ліва частина дає змогу отримати явний вираз для втрат 4-імпульсу (або його збільшення — залежно від знаку) через польові функції:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_3} d^3x (\partial_\nu T^{\mu\nu}) &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} T^{\mu 0} d^3x + \int_{\Omega_3} d^3x \frac{\partial T^{\mu i}}{\partial x^i} \\ &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} T^{\mu 0} d^3x + \oint_{\partial\Omega_3} T^{\mu i} d\sigma_i. \end{aligned}$$

де $d\sigma_i$ — елемент площини поверхні $\partial\Omega_3$, що обмежує просторову область Ω_3 (з $d\sigma_1 = dy dz$, $d\sigma_2 = dx dz$, $d\sigma_3 = dx dy$), причому інтеграл по $\partial\Omega_3$ описує потік 4-імпульсу через межу цієї області. Інтегральний закон збереження енергії та імпульсу усієї системи «поле + частинки» в цій області має такий вигляд:

$$\frac{dP^\mu}{dt} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} T^{\mu 0} d^3\mathbf{r} + \oint_{\partial\Omega_3} T^{\mu j} d\sigma_j = 0, \quad (9.6)$$

де враховано (9.3), (9.5), причому тут вважаємо, що частинки не перетинають межі області Ω_3 . Звідси T^{00} можна інтерпретувати як густину енергії електромагнітного поля, T^{i0}/c — як густину імпульсу. Останній доданок в (9.6) описує потік 4-імпульсу через поверхню $\partial\Omega_3$; відповідно $cT^{i0} = \Pi^i$ описує компоненти тривимірного вектора густини потоку енергії, де Π — вектор Пойнтінга.

Запишемо явні вирази для густини енергії поля:

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (9.7)$$

та для густини потоку енергії:

$$\Pi = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (9.8)$$

Як видно з (9.6) при $\mu = 0$, $\oint_{\partial\Omega_3} \Pi \cdot d\mathbf{S}$ — це енергія, що витікає через $\partial\Omega_3$ за одиницю часу. Одночасно $T^{0i}/c = T^{i0}/c = \Pi^i/c^2$ — густина імпульсу поля, причому рівняння (9.6) при $\mu = i$ описує збереження імпульсу. Доданок $\oint_{\partial\Omega_3} d\sigma_j T^{ij}$ описує потік імпульсу (імпульс, що витікає за одиницю часу через поверхню $\partial\Omega_3$). Відповідно, T^{k1}, T^{k2}, T^{k3} можна інтерпретувати як густину потоку k -тої компоненти імпульсу. Для просторової частини тензора енергії-імпульсу маємо $T^{ij} = -t^{ij}$, де тривимірний тензор

$$t^{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\right) \quad (9.9)$$

називають *максвелівським тензором напружень*.

Наведемо також співвідношення, що випливає з явного виду (9.4) тензора енергії-імпульсу електромагнітного поля:

$$T^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 0.$$

9.3. Тензор моменту імпульсу електромагнітної системи

У нерелятивістській теорії компоненти векторного добутку $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, що складають момент імпульсу, можна записати як $x^i p^j - x^j p^i$. Розглянемо узагальнення цього виразу

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \quad (9.10)$$

яке називають *4-тензором моменту імпульсу*. Обчислимо, як змінюється ця величина вздовж траєкторії зарядженої частинки:

$$\frac{d}{dt}M^{\mu\nu} = \left(\frac{dx^\mu}{dt}p^\nu - \frac{dx^\nu}{dt}p^\mu\right) + x^\mu \frac{dp^\nu}{dt} - x^\nu \frac{dp^\mu}{dt}$$

$$= \frac{q}{c} \left(x^\mu F^\nu{}_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} - x^\nu F^\mu{}_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} \right),$$

де враховані співвідношення $p^\nu = mc u^\nu$, $dx^\mu/dt = u^\mu ds/dt$, а також рівняння руху (9.2). Для системи частинок:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\Omega} M^{\mu\nu} = \sum_{\Omega} \frac{q}{c} (x^\mu F^\nu{}_\alpha - x^\nu F^\mu{}_\alpha) \frac{dx^\alpha}{dt},$$

де індекс під сумою означає, що вона береться за усіма частинками в області Ω .

При переході до неперервного розподілу обмін 4-моментом між системою частинок і полем можна записати так:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} M^{\mu\nu} dV = \frac{1}{c} \int (x^\mu F^\nu{}_\alpha - x^\nu F^\mu{}_\alpha) j^\alpha dV, \quad (9.11)$$

де враховано, що для частинок в деякому об'ємі ΔV : $\sum_{\Delta V} q dx^\alpha/dt \rightarrow \rho(dx^\alpha/dt)\Delta V = j^\alpha \Delta V$.

Перейдемо до визначення моменту імпульсу електромагнітного поля. Розглянемо вираз:

$$\partial_\alpha (x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}) = \delta_\alpha^\mu T^{\nu\alpha} - \delta_\alpha^\nu T^{\mu\alpha} + x^\mu T^{\nu\alpha}{}_{,\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}. \quad (9.12)$$

Використовуючи рівняння (9.5) з урахуванням симетрії $T^{\alpha\beta}$, дістанемо:

$$\partial_\alpha (x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}) = -\frac{1}{c} (x^\mu F^\nu{}_\alpha - x^\nu F^\mu{}_\alpha) j^\alpha. \quad (9.13)$$

Проінтегруємо це співвідношення по області Ω_3 із застосуванням формули Остроградського-Гауса:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \int_{\Omega_3} d^3x \frac{\partial}{\partial t} (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) + \int_{\Omega_3} d^3x \frac{\partial}{\partial x^i} (x^\mu T^{\nu i} - x^\nu T^{\mu i}) = \\ & = \frac{d\mathcal{M}^{\mu\nu}}{dt} + \oint_{\partial\Omega_3} d\sigma_i (x^\mu T^{\nu i} - x^\nu T^{\mu i}) = -\frac{1}{c} \int_{\Omega_3} d^3\mathbf{r} (x^\mu F^\nu{}_\alpha - x^\nu F^\mu{}_\alpha) j^\alpha, \end{aligned}$$

де величину

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int_{\Omega_3} (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) d^3\mathbf{r}$$

назвемо *моментом імпульсу поля*¹. Враховуючи (9.11), дістанемо:

$$\frac{dM^{\mu\nu}}{dt} + \oint_{\partial\Omega_3} d\sigma_i (x^\mu T^{\nu i} - x^\nu T^{\mu i}) + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} M^{\mu\nu} dV = 0. \quad (9.14)$$

Це співвідношення виражає збереження 4-моменту імпульсу, причому $(x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0})$ дає густину цієї величини, а другий доданок в (9.14) — її потік через $\partial\Omega_3$. При просторових значеннях індексів μ, ν це співвідношення подає закон збереження компонент звичайного моменту імпульсу.

9.1. π^0 -Мезон, що рухається зі швидкістю $v < c$, розпадається на два γ -кванти. Знайти мінімальний кут θ_{\min} між напрямками розлітання квантів.

Вказівка: з законів збереження енергії та імпульсу отримати

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{m^2 c^4}{4\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}.$$

де ω_1, ω_2 — частоти фотонів.

Відповідь: $\sin^2(\theta_{\min}/2) = 1 - v^2/c^2$.

9.2. Дві елементарні частинки перетворюються на дві інші за схемою $a + b \rightarrow c + d$. Позначимо

$$s = (p_a^\mu + p_b^\mu)(p_{a\mu} + p_{b\mu}), \quad t = (p_a^\mu - p_c^\mu)(p_{a\mu} - p_{c\mu}), \quad u = (p_a^\mu - p_d^\mu)(p_{a\mu} - p_{d\mu}),$$

де p_i^μ — 4-імпульси частинок ($i = a, b, c, d$). Доведіть, що

$$s + t + u = m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + m_c^2 c^2 + m_d^2 c^2,$$

де m_i — маси частинок.

9.3. При зіткненні частинки з масою спокою m із нерухомою частинкою з масою спокою m_1 відбувається реакція, після якої залишаються частинки із загальною масою спокою M . Знайдіть мінімальне значення кінетичної енергії частинки, що налітає (енергетичний поріг реакції).

Вказівка: Покажіть, що за умов задачі кінетична енергія частинок в системі центру мас є монотонною функцією енергії та імпульсу частинки, що налітає. В цій системі мінімальне значення енергії відповідає випадку, коли продукти реакції покояться.

¹Відповідно, підінтегральний вираз — тензор густини моменту імпульсу.

В лабораторній системі усі частинки мають однакову швидкість.
Відповідь:

$$T_{\min} = \frac{(M^2 - m^2 - m_1^2)c^4}{2m_1c^2} - mc^2.$$

де $T_{\min} = \mathcal{E}_{\min} - mc^2$ — мінімальна кінетична енергія частинки, що налітає.

А. Таблиця переходу між гаусовою системою одиниць та SI

Для коректного читання та інтерпретації літератури з класичної електродинаміки необхідно вільно орієнтуватися в різних системах одиниць, зокрема в системі СІ та гаусовій системі (СГС). Це пов'язано з тим, що різні джерела використовують різні системи одиниць: фундаментальні теоретичні праці традиційно формулюються в СГС, тоді як у сучасній навчальній і прикладній літературі переважає система СІ. Тому необхідно впевнено володіти перевідними співвідношеннями між цими системами для основних фізичних величин.

Перехід між системами одиниць не зводиться до простого масштабування величин, а супроводжується зміною вигляду рівнянь. У системі SI рівняння містять константи ϵ_0 та μ_0 , тоді як у гаусовій системі вони відсутні, і відповідні коефіцієнти з'являються у вигляді множників 4π . Тому необхідно враховувати не лише перевідні співвідношення, але й зміну структури рівнянь.

Таблиця А.1. Перехід між гаусовою системою одиниць та SI

Величина	Система СГС	Система SI
Швидкість світла	c	$(\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$
Напруженість електричного поля	$\mathbf{E}_{\text{СГС}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \mathbf{E}_{\text{СГС}}$
Електричний потенціал	$\phi_{\text{СГС}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \phi_{\text{СГС}}$
Магнітна індукція	$\mathbf{B}_{\text{СГС}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}} \mathbf{B}_{\text{СГС}}$
Вектор-потенціал	$\mathbf{A}_{\text{СГС}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}} \mathbf{A}_{\text{СГС}}$
Густина заряду	$\rho_{\text{СГС}}$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho_{\text{СГС}}$
Заряд	$q_{\text{СГС}}$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} q_{\text{СГС}}$
Густина струму	$\mathbf{j}_{\text{СГС}}$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{j}_{\text{СГС}}$

Приклад: переписування рівнянь Максвелла з гаусової системи (СГС) в SI. Розглянемо перехід від гаусової системи (СГС) до системи SI на прикладі рівнянь Максвелла. Це дозволяє простежити зміну вигляду рівнянь при переході між системами одиниць.

У гаусовій системі рівняння Максвелла для вакууму мають вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{СГС}} &= 4\pi\rho_{\text{СГС}}, & \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{СГС}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{СГС}}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B}_{\text{СГС}} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B}_{\text{СГС}} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{СГС}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{СГС}}}{\partial t}. \end{aligned}$$

З таблиці беремо перевідні співвідношення (позначимо величини в SI тим же символом без індексу):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{СГС}} &= \sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E}, & \mathbf{B}_{\text{СГС}} &= \sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{B}, \\ \rho_{\text{СГС}} &= \frac{\rho}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}, & \mathbf{j}_{\text{СГС}} &= \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}, \\ c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}. \end{aligned}$$

Підставимо в перше рівняння (теорема Гауса):

$$\operatorname{div}(\sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E}) = 4\pi \cdot \frac{\rho}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \implies \sqrt{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{E} = \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}} \rho \implies \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Друге рівняння (закон електромагнітної індукції Фарадея):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{B}), \\ \sqrt{4\pi\epsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\sqrt{4\pi\mu_0}}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Оскільки $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, то $\sqrt{\mu_0}/c = \sqrt{\mu_0}\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \mu_0\sqrt{\epsilon_0}$. Тоді:

$$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\sqrt{4\pi\epsilon_0}\mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Третє рівняння:

$$\operatorname{div}(\sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{B}) = 0 \implies \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Четверте рівняння:

$$\operatorname{rot}(\sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E}).$$

$$\sqrt{4\pi\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Використаємо $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$:

$$\frac{4\pi}{c\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = 4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \frac{4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi}\sqrt{\mu_0} = \sqrt{4\pi\mu_0}.$$

А другий доданок: $\frac{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}{c} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \sqrt{4\pi}\varepsilon_0\sqrt{\mu_0}$.

Отже:

$$\sqrt{4\pi\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{j} + \sqrt{4\pi}\varepsilon_0\sqrt{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Поділимо на $\sqrt{4\pi\mu_0}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\sqrt{4\pi}\varepsilon_0\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{4\pi\mu_0}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} + \varepsilon_0\sqrt{\mu_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Отримані рівняння Максвелла в системі SI для вакууму:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Слід зауважити, що навіть у вакуумі в системі SI часто вводять допоміжні вектори електричної індукції \mathbf{D} та напруженості магнітного поля \mathbf{H} , які для вакууму визначаються як:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}.$$

Підставлення цих визначень дозволяє переписати рівняння Максвелла в симетричнішій формі, де коефіцієнти ε_0 та μ_0 зникають з правих частин¹:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

¹У такому записі рівняння Максвелла в SI набувають формально однакового вигляду як для вакууму, так і для середовищ, хоча у випадку середовищ ρ та \mathbf{j} позначають лише вільні заряди та струми, а поля \mathbf{D} та \mathbf{H} включають внесок зв'язаних зарядів і струмів намагніченості.

Б. Основні формули векторного аналізу

Б.1. Диференціальні операції в різних системах координат.

Декартова система координат

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{Б.1})$$

$$\text{div} (\text{grad } \psi) \equiv \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{Б.2})$$

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{Б.3})$$

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{Б.4})$$

Циліндрична система координат

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{Б.5})$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{Б.6})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{Б.7})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\phi + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Орти циліндричної системи координат зв'язані з декартовими ортами як:

$$\mathbf{e}_r = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad (\text{Б.9})$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad (\text{Б.10})$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z. \quad (\text{Б.11})$$

Сферична система координат

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{Б.12})$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \quad (\text{Б.13})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad (\text{Б.14})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} (A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta + \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

Орти сферичної системи координат зв'язані з декартовими ортами як:

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_x + \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_y + \cos\theta \mathbf{e}_z, \quad (\text{Б.16})$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta \cos\phi \mathbf{e}_x + \cos\theta \sin\phi \mathbf{e}_y - \sin\theta \mathbf{e}_z, \quad (\text{Б.17})$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi \mathbf{e}_x + \cos\phi \mathbf{e}_y. \quad (\text{Б.18})$$

$$(\text{Б.19})$$

Б.2. Другі похідні.

$$\text{rot grad } \phi = \nabla \times (\nabla\phi) = 0 \quad (\text{Б.20})$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{Б.21})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (\text{Б.22})$$

Б.3. Похідні від добутків.

$$\text{grad}(\phi\psi) = \psi \text{grad } \phi + \phi \text{grad } \psi \quad (\text{Б.23})$$

$$\text{div}(\phi\mathbf{A}) = \phi \text{div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{grad } \phi \quad (\text{Б.24})$$

$$\text{rot}(\phi\mathbf{A}) = \phi \text{rot } \mathbf{A} + \text{grad } \phi \times \mathbf{A} \quad (\text{Б.25})$$

$$\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} + (\mathbf{B}\nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A}\nabla) \mathbf{B} \quad (\text{Б.26})$$

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} \quad (\text{Б.27})$$

$$\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B}\nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A}\nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A} \quad (\text{Б.28})$$

$$\frac{1}{2} \text{grad } A^2 = (\mathbf{A}\nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{Б.29})$$

Б.4. Індексна нотація формул векторного аналізу. Нагадаємо співвідношення з векторного аналізу, що будуть потрібні далі. Латинські індекси i, j, k пробігатимуть допустимі значення 1,2,3. Якщо індекси у виразі повторюються, це означатиме суму по цих індексах (правило Ейнштейна).

Тривимірний символ Леві-Чівіті

Тривимірний символ Леві-Чівіті визначений співвідношеннями

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}. \quad (\text{Б.30})$$

Деякі співвідношення з цим символом:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \quad (\text{Б.31})$$

$$\varepsilon_{iqk}\varepsilon_{pqk} = 2\delta_{ip}. \quad (\text{Б.32})$$

Ротор та векторний добуток у декартових координатах $\{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$[\nabla \times \mathbf{A}]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k, \quad (\text{Б.33})$$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ijk}A_j B_k, \quad (\text{Б.34})$$

всі індекси пробігають значення 1, 2, 3.

Диференціальні операції в декартових координатах

У декартових координатах x_1, x_2, x_3 дивергенція:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \partial_j A_j;$$

градієнт:

$$(\nabla F)_i \equiv \partial_i F,$$

тут і надалі $(X)_i = X_i$ означає i -ту компоненту вектора \mathbf{r} ; та оператор Лапласа:

$$\Delta F \equiv \partial_j \partial_j F.$$

За допомогою (Б.30) можна записати i -ту компоненту векторного добутку:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ijk}A_j B_k$$

де (A_i, B_i) — компоненти векторів \mathbf{A} та \mathbf{B} , а також ротор:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k.$$

Добуток скалярної та векторної функцій

Легко перевірити такі співвідношення для добутку скалярної функції $F(\mathbf{r})$ та векторної $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\operatorname{div}(F\mathbf{A}) = \partial_i(FA_i) = A_i\partial_iF + F\partial_iA_i = \mathbf{A} \cdot \nabla F + F \operatorname{div} \mathbf{A};$$

$$\operatorname{rot}(F\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(FA_k) = \varepsilon_{ijk}(\nabla F)_jA_k + F\varepsilon_{ijk}\partial_jA_k,$$

або

$$\operatorname{rot}(F\mathbf{A}) = [\nabla F \times \mathbf{A}] + F \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Дивергенція векторного добутку

Дивергенція векторного добутку:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k) = B_k\varepsilon_{ijk}\partial_iA_j + A_j\varepsilon_{ijk}\partial_iB_k = B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j - A_j\varepsilon_{ijk}\partial_iB_k = \\ &= \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Згортка символів ε_{ijk}

Далі будуть потрібні формули для згортки двох символів ε_{ijk} . Користуючись властивостями визначника, легко перевірити, що:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix},$$

де δ_{ij} — символ Кронекера, а також:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

Якщо в останньому співвідношенні розкрити визначник за правилом трикутників:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} + \delta_{iq}\delta_{jr}\delta_{kp} + \delta_{ir}\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{ip}\delta_{jr}\delta_{kq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\delta_{kr} - \delta_{ir}\delta_{jq}\delta_{kp},$$

та взяти суму по $k = r$, отримаємо формулу згортки:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}. \quad (\text{Б.35})$$

Подвійний векторний добуток

Отримаємо за допомогою (Б.35) правило для подвійного векторного добутку:

$$([\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]]_i \equiv \varepsilon_{ijk} A_j ([\mathbf{B} \times \mathbf{C}]_k) \equiv \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{kpq} B_p C_q.$$

Завдяки (Б.35):

$$([\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]]_i \equiv (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) A_j B_p C_q = B_i A_q C_q - C_i A_p B_p,$$

тобто маємо відому формулу:

$$[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Подвійний ротор

Обчислимо за допомогою (Б.35) подвійний ротор:

$$(\text{rot rot } \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\text{rot } \mathbf{A})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kpq} \partial_p A_q.$$

Завдяки (Б.35):

$$(\text{rot rot } \mathbf{A})_i = (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \partial_j \partial_p A_q = \partial_i \partial_j A_j - \partial_j \partial_j A_i.$$

За означенням, $\partial_j A_j \equiv \text{div } \mathbf{A}$ та $\partial_j \partial_j A_i \equiv \Delta A_i$. Звідси маємо:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \text{div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.$$

Б.5. Інтегральні характеристики та теореми. Теорема Остроградського-Гауса:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{A} dV, \quad (\text{Б.36})$$

де Ω — об'єм, $\partial\Omega$ — його межа.

Теорема Стокса:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{Б.37})$$

де S — поверхня, що спирається на контур ∂S .

Теорема Гріна:

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \int_{\partial\Omega} (\phi \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \phi) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{Б.38})$$

В. Поліноми Лежандра

Поліноми Лежандра застосовуються у теорії потенціалу при розкладанні виразу в околі точки \mathbf{r} :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \chi + r_0^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \chi),$$

де $r_{>}$, $r_{<}$ — більша і менша із величин r та r_0 , відповідно, $\cos \chi$ — кут між векторами \mathbf{r} та $|\mathbf{r}_0|$.

Деякі поліноми Лежандра

$$\begin{aligned} P_0(\cos \chi) &= 1, & P_1(\cos \chi) &= \cos \chi, \\ P_2(\cos \chi) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \chi - 1), & P_3(\cos \chi) &= \frac{1}{2}(5 \cos^2 \chi - 3 \cos \chi). \end{aligned}$$

Г. Сферичні гармоніки

Сферичні функції, що залежать від полярних кутів визначаються формулою:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi},$$

де $l = 0, 1, 2, \dots$, m пробігає значення від $-l$ до l , а $P_l^{|m|}(x)$ — приєднані функції Лежандра.

Вони утворюють повну ортонормовану систему функцій:

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) Y_{l,m}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}.$$

Деякі сферичні гармоніки:

$$\begin{aligned} Y_{0,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \\ Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}, \\ Y_{1,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{2,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \end{aligned}$$

$$Y_{2,\pm 1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}.$$

Д. Циліндричні функції

Рівняння, що виникають в задачах з циліндричною симетрією, мають вигляд:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (\text{Д.1})$$

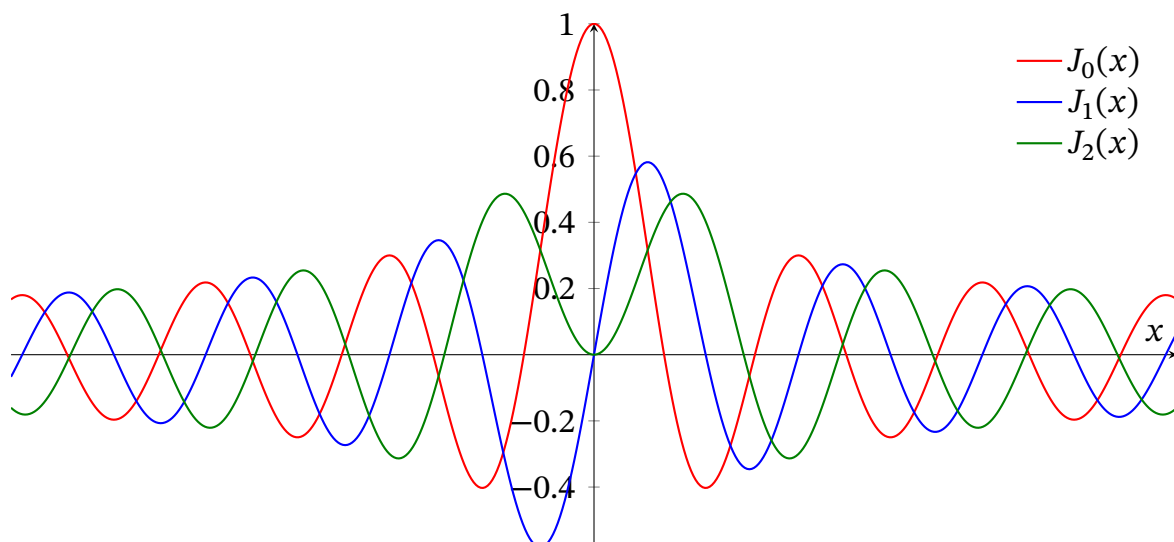
розв'язок яких можна представити за допомогою функцій Бесселя $J_m(x)$ та Неймана N_m у вигляді лінійної комбінації $y(x) = AJ_m(x) + BN_m(x)$ або у вигляді лінійної комбінації $y(x) = AH_m^{(1)}(x) + BH_m^{(2)}(x)$, де функції $H_m^{(1,2)} = J_m \pm iN_m$ — називаються функціями Ганкеля 1-го та 2-го роду, відповідно. Доцільність введення функцій Ганкеля обумовлена тим, що вони мають прості асимптотичні розкладання при $|x| \gg 1$ і зручні для задач, пов'язаних з поширенням хвиль.

Для $m = 0, 1, 2, \dots$ функції Неймана нескінченні в точці $x = 0$, тобто $\lim_{x \rightarrow 0} N_m(x) = -\infty$.

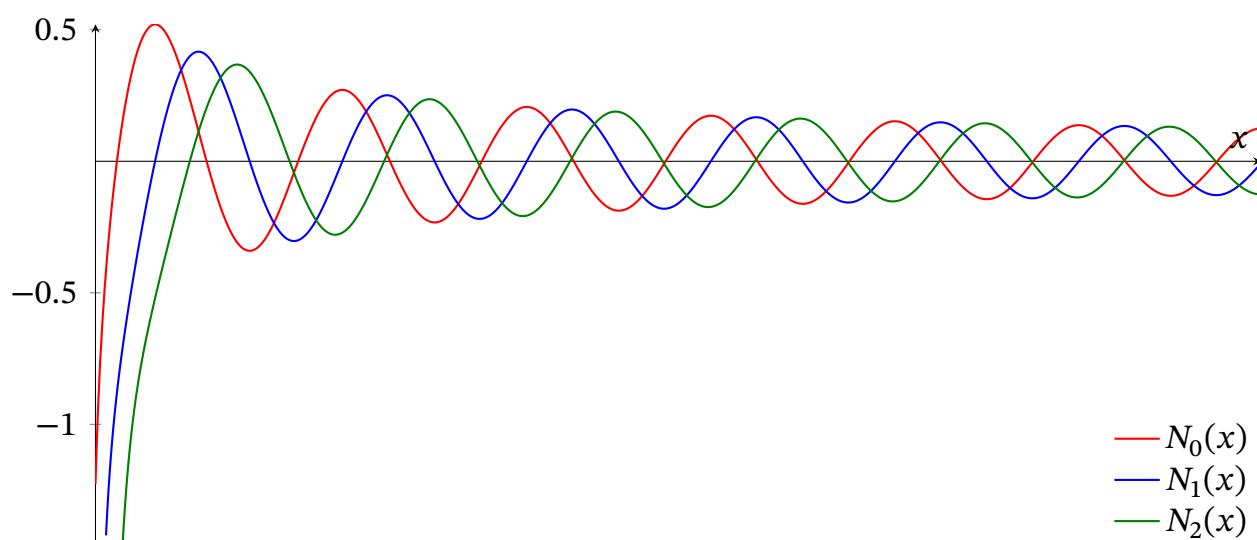
Функції Бесселя можна представити за допомогою ряду (в околі точки $x = 0$ для цілих, або невід'ємних m):

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}, \quad (\text{Д.2})$$

де Γ — [гамма-функція](#). Для $m \in \mathbb{Z}$ повинна виконуватись рівність $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$.



Графіки функцій Бесселя J_m для $m = 0, 1, 2$.

Графіки функцій Неймана N_m для $m = 0, 1, 2$.

Функції Неймана визначаються через функції Бесселя як:

$$N_m(x) = \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}. \quad (\text{Д.3})$$

Деякі рекурентні співвідношення:

$$J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x). \quad (\text{Д.4})$$

Деякі диференціальні та інтегральні співвідношення для нецілих m (для цілих m ці функції можна визначити за допомогою граничного переходу):

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x), \quad (\text{Д.5})$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-m} J_m(x)) = -x^{-m} J_{m+1}(x), \quad (\text{Д.6})$$

$$\int_0^x x'^{m+1} J_m(x') dx' = x^{m+1} J_{m+1}. \quad (\text{Д.7})$$

Інтеграли від добутоків:

$$\int_0^x J_m(k_1 x') J_m(k_2 x') x' dx' = \frac{x (k_2 J_m(k_1 x) J_m'(k_2 x) - k_1 J_m(k_2 x) J_m'(k_1 x))}{k_1^2 - k_2^2}. \quad (\text{Д.8})$$

В задачах, зазвичай, часто необхідно знайти наближений вигляд циліндричних функцій при малих та великих значеннях аргументу x : при $|x| \ll 1$ з (Д.2)

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4}, \quad J_m \approx \frac{x^m}{2^m m!}, \quad m \geq 1, \quad m \in \mathbb{N}; \quad (\text{Д.9})$$

при $|x| \gg 1$

$$J_m \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{Д.10})$$

$$N_m \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{Д.11})$$

$$H_m^{(1,2)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (\text{Д.12})$$

Співвідношення Якобі-Ангера (розкладання за функціями Бесселя):

$$e^{ix \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x) e^{im\theta}, \quad e^{ix \sin \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) e^{im\theta}. \quad (\text{Д.13})$$

Е. Узагальнені функції

В задачах електродинаміки часто виникає необхідність розглядати заряджені тіла, розміри яких дуже малі у порівнянні з іншими просторовими масштабами. З цим пов'язана модель точкового (сферичного) заряду, густину якого подають у вигляді:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (\text{Е.1})$$

де q — величина заряду, \mathbf{r} — його положення, δ — функція Дірака, що визначається умовою:

$$\int dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \chi(\mathbf{r}) = \chi(\mathbf{r}_0) \quad (\text{Е.2})$$

для будь-якої неперервної функції χ .

Очевидно, що визначення (Е.2) δ -функції не є математично коректним, якщо вважати, що в (Е.2) маємо справу зі звичайним інтегруванням, наприклад, за Лебегом. Цьому співвідношенню можна надати математичний зміст, якщо розглядати δ -функцію як слабку границю деякої послідовності звичайних функцій. Якщо покласти (в одновимірному варіанті):

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2}, \quad (\text{Е.3})$$

то границя:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx \delta_\varepsilon(x) \chi(x) = \chi(0) \quad (\text{Е.4})$$

існує для будь-якої послідовності $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ та будь-якої функції $\chi(x)$, що задовольняє досить широким умовам (наприклад, якщо $\chi(x)$ — гладка та обмежена). На практиці зручніше розглядати подібні границі за жорсткіших обмежень на $\chi(x)$.

Таке визначення цілком відповідає фізичним уявленням про точковий заряд, зосереджений в нескінченно малій області. Насправді для багатьох застосувань істотно лише те, що розміри заряду значно менші за відстань до нього. Разом із тим треба пам'ятати, що ці міркування не проходять, коли треба розглядати співвідношення, нелінійні за густиною заряду або за напруженостями полів; наприклад, у формулах для енергії.

Узагальнені та основні функції ($x \in \mathbb{R}^n$)

Узагальнену δ -функцію можна визначити за допомогою іншої, відмінної від (E.3), послідовності, тобто означення (E.3), (E.4) не є єдиним (див. приклади далі). Але усі подібні співвідношення визначають лінійний неперервний функціонал, що зіставляє функції $\chi(x)$ число $\chi(0)$. Далі розглянемо лінійні неперервні функціонали на деякій множині функцій, які будемо називати *основними*.

Нехай множина основних функцій — це множина D фінітних (тобто відмінних від нуля у деяких обмежених областях) нескінченно диференційовних функцій. Збіжність в D визначають так: послідовність $\{\phi_k\} \subset D$ збігається до $\phi \in D$, якщо всі ϕ_k можуть бути відмінними від нуля лише у деякій спільній обмеженій області та усі похідні рівномірно збігаються до відповідних похідних від ϕ .

Узагальнена функція — це лінійний неперервний функціонал, означений на D . Множину таких узагальнених функцій позначають через D' .

Існує багато способів регуляризації дельта-функції Дірака; зокрема, використовуються наступні наближення:

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}, \quad (\text{E.5})$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad (\text{E.6})$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{x^2}, \quad (\text{E.7})$$

де $x \in \mathbb{R}$.

Далі будемо позначати значення функціоналу, що відповідає узагальненій функції $F \in D'$ на основній функції $\chi \in D$, як (F, χ) . Наприклад, співвідношення $(\delta, \chi) = \chi(0)$ визначає δ -функцію Дірака.

Узагальнену функцію $F(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) називають *регулярною*, якщо існує інтегровна функція $f(x)$, така, що відповідний функціонал можна подати у вигляді звичайного інтеграла Лебега:

$$(F, \chi) = \int dx f(x)\chi(x). \quad (\text{E.8})$$

Якщо це неможливо, F називають *сингулярною узагальненою функцією*. Прикладом такої функції є δ -функція Дірака. Проте, у фізичній літературі для сингулярних функцій також використовують запис (E.8), маючи на увазі певний граничний перехід — типу (E.4) або інший. Можна показати, що будь-яку узагальнену функцію можна подати як слабку границю послідовності основних функцій з D .

Далі ми також будемо застосовувати формальний запис (E.8), пам'ятаючи про вказані застереження.

Диференціювання і фундаментальні розв'язки

Визначимо похідну $\partial_i F(x)$ від узагальненої функції F співвідношенням:

$$(\partial_i F, \chi) = -(F, \partial_i \chi), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{E.9})$$

Для регулярної диференційовної функції F це співвідношення є очевидним наслідком інтегрування за частинами:

$$\int dx \partial_i F(x)\chi(x) = - \int dx F(x)\partial_i \chi(x).$$

З урахуванням того, що $\chi(x)$ є фінітною.

Нехай A — диференціальний оператор скінченного порядку зі сталими коефіцієнтами, $x \in \mathbb{R}^n$.

Фундаментальним розв'язком оператора \hat{L} називають узагальнену функцію G , таку, що:

$$\hat{L}G = \delta(x). \quad (\text{E.10})$$

Фундаментальний розв'язок оператора Лапласа

Нехай $x = \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, покажемо, що:

$$\Delta \left(-\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad (\text{E.11})$$

де в правій частині фігурує тривимірна δ -функція,

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

За означенням похідної:

$$\int \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \chi(\mathbf{r}) dV = \int \frac{1}{r} \Delta \chi dV$$

Права частина означена як звичайний невластний інтеграл, який можна обчислювати у сферичних координатах:

$$\begin{aligned} \int \frac{\Delta \chi}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr &= \\ &= \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} \right] \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) dr d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Тут враховано, що:

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) = \left(\sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right)_0^\pi = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Залишається інтеграл, що береться по r при фіксованих φ, θ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\Omega \int_0^r dr \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) &= \int_0^\infty d\Omega \int_0^r dr \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} + \chi \right) = \left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} + \chi \right) \Big|_0^\infty = \\ &= - \int d\Omega \chi(0) = -4\pi \chi(0). \end{aligned}$$

Отриманий вираз доводить співвідношення (E.11).

Фундаментальний розв'язок оператора Даламбера

Нехай $c = 1$, $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, $x = (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$.

Визначимо функцію $G(x)$ співвідношенням:

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \delta[t^2 - x^2] \theta(t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r), \quad (\text{E.12})$$

де $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Фундаментальний розв'язок оператора Гельмгольца

Покажіть, що:

$$(\Delta + k^2) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \chi = \int \frac{e^{ikr}}{r} (\Delta + k^2) \chi dV = -4\pi \chi(0). \quad (\text{E.13})$$

Згортка

Згортка $\zeta = F * \chi$ узагальненої функції F з основною $\chi \in$ за визначенням:

$$\zeta(y) = \int dx F(x) \chi(y - x). \quad (\text{E.14})$$

За допомогою згортки та фундаментального розв'язку можна будувати розв'язки рівнянь виду:

$$\hat{L}\phi = f, \quad f \in D. \quad (\text{E.15})$$

Дійсно, якщо покласти $\phi = G * f$, де $\hat{L}G = \delta(x)$, маємо:

$$\hat{L}\phi(y) = \int dx G(x) \hat{L}_y f(y - x) = \int dx \hat{L}_x G(x) f(y - x) = (\delta(x), f(y - x)) = f(y)$$

(тут введено індекси, щоб підкреслити, що \hat{L}_x діє на змінну x , \hat{L}_y — на y). Цей результат за певних умов можна розширити на випадок $f \in D$.

Звідси маємо такі розв'язки рівнянь:

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \implies \phi = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \phi = \phi(\mathbf{r}), \quad (\text{E.16})$$

$$\square\phi = 4\pi\rho \implies \phi = \int \frac{\rho(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \phi = \phi(t, \mathbf{r}), \quad (\text{E.17})$$

$$\Delta\phi + k^2\phi = -4\pi\rho \implies \phi(\mathbf{r}) = \int \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (\text{E.18})$$

Література

1. *Griffiths D. J.* Introduction to Electrodynamics. — 4th ed. — Cambridge : Cambridge University Press, 2017. — ISBN 978-1-108-42041-9.
2. *Heald M. A., Marion J. B.* Classical Electromagnetic Radiation. — 3rd ed. — Mineola, N.Y. : Dover Publications, 2012. — ISBN 978-0-486-49060-1. — Corrected republication of the 3rd ed., Saunders College Publishing, 1995.
3. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. — 2nd ed. — New York : John Wiley & Sons, 1975. — ISBN 0-471-43132-X.
4. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* The Classical Theory of Fields. Vol. 2. — Oxford : Butterworth-Heinemann, 1994. — (Course of Theoretical Physics). — ISBN 978-0-7506-2768-9.
5. *Panofsky W. K. H., Phillips M.* Classical Electricity and Magnetism. — 2nd ed. — Mineola, N.Y. : Dover Publications, 2005. — ISBN 978-0-486-43924-2. — Unabridged republication of the 2nd ed., Addison-Wesley, 1962.
6. Problem Book in Relativity and Gravitation / A. P. Lightman [et al.]. — Princeton, N.J. : Princeton University Press, 2018. — ISBN 978-0-691-17777-9. — DOI: [10.1515/9781400889013](https://doi.org/10.1515/9781400889013).
7. *Zangwill A.* Modern Electrodynamics. — Cambridge : Cambridge University Press, 2013. — ISBN 978-0-521-89697-9.
8. *Жданов В. І.* [Класична теорія електромагнітного поля](#). — Київ : НТУУ «КПІ», 2014. — 84 с.
9. *Жданов В. І., Пономаренко С. М., Долгошей В. Б.* [Класична електродинаміка: Збірник задач](#). — 2-е вид. — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. — 98 с.
10. *Сугаков В. Й.* Електродинаміка. — Київ : Вища школа, 1974.
11. *Федорченко А. М.* Теоретична фізика. Класична електродинаміка. Т. 1. — Київ : Вища школа, 1992. — ISBN 5-11-003760-4.

Алфавітний покажчик

- Бистрота (швидкісний параметр), 93, 106
- Гаусова система одиниць, 7, 10, 113, 132
- Група Лоренца, 126, 132
- Густина
енергії поля, 137
заряду, 14–16
струму, 15
лінійна, 16
- Закон збереження енергії, 42
енергії-імпульсу, 136
заряду, 13, 16, 17, 114, 131
імпульсу, 25
моменту імпульсу, 27, 139
- Заряд
адитивність, 10
електричний, 10, 13
інваріантність, 13
квантування, 12
поверхневий, 16
пробний, 11
точковий, 10
- Калібрувальне перетворення, 32, 125, 131
- Напруженість електричного поля, 11, 113
- Параметри Стокса, 56
- Переріз
поглинання, 79
розсіювання
диференціальний, 79, 81
повний, 79, 80
- Принцип найменшої дії, 127
- Рівняння Максвелла, 130
- Рівняння неперервності, 114
- Сила Лоренца, 11, 119, 135
- Символ Леві-Чівіта, 113
- Співвідношення невизначеностей, 62
- Ступінь
взаємної когерентності, 54
поляризації, 56
- Сфера Пуанкаре, 58
- Тензор
електромагнітного поля, 113, 129
енергії-імпульсу, 134, 135
коваріантний, 113
моменту імпульсу, 137
- Функція
взаємної когерентності, 54
розподілу, 15
- Хвильове рівняння, 33
одновимірне, 37
- Хвильовий
вектор, 120
пакет, 60
- Чотиривектор
густина струму, 113, 131
імпульсу, 134
потенціалу, 124, 127