

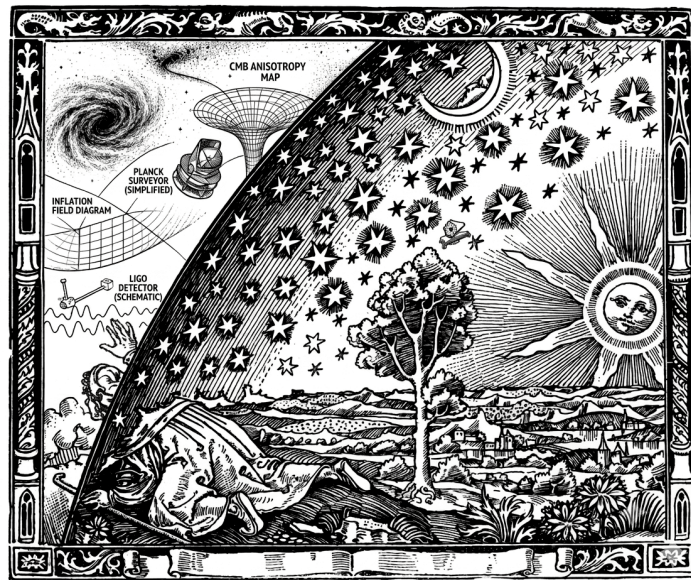
In nomine scientiae

Пономаренко С. М.

# ВІД ІНФЛАТОНА ДО СМВ

\* \* \*

Космологічні нотатки



*Систематизовані нотатки з теоретичної космології, що охоплюють фізику раннього Всесвіту, динаміку скалярного інфлатонного поля, генерацію первинних космологічних збурень та їхній відбиток на анізотропії реліктового випромінювання (СМВ).*

Ex nihilo ad sidera

Київ

У друкарні авторській

MMXXVI

# Зміст

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Передмова</b>                                                          | <b>5</b>  |
| <b>I Фон</b>                                                              | <b>6</b>  |
| <b>1 Фонова космологія: від метрики FLRW до <math>\Lambda</math>CDM</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1 Рівняння стану і закони розширення . . . . .                          | 9         |
| 1.2 Конформний час . . . . .                                              | 10        |
| 1.3 Космологічний червоний зсув та космологічні відстані . . . . .        | 11        |
| 1.4 Параметри густини та модель $\Lambda$ CDM . . . . .                   | 14        |
| 1.5 Парадокс плоскості: навіщо таке точне налаштування? . . . . .         | 15        |
| Підсумок і відкриті питання . . . . .                                     | 17        |
| Задачі . . . . .                                                          | 18        |
| <b>2 Кінематика інфляції</b>                                              | <b>21</b> |
| 2.1 Конформний час під час інфляції і горизонт Хаббла . . . . .           | 21        |
| 2.2 Проблема горизонту і умова її вирішення . . . . .                     | 22        |
| 2.3 Проблема плоскості і мінімальна кількість $e$ -foldів . . . . .       | 23        |
| 2.4 Проблема первинних збурень . . . . .                                  | 24        |
| 2.5 Місток: від кінематики до мікрофізики . . . . .                       | 24        |
| Задачі . . . . .                                                          | 25        |
| <b>3 Інфлатон і його потенціал</b>                                        | <b>26</b> |
| 3.1 Механізм та рівняння динаміки інфлатона . . . . .                     | 27        |
| 3.2 Динаміка повільного кочення (slow-roll) та де-Сіттерівський розв'язок | 28        |
| 3.3 Хаотична інфляція Лінде . . . . .                                     | 31        |
| 3.4 Форма потенціалу та обмеження спостережень . . . . .                  | 33        |
| 3.5 Модель Старобінського та $f(R)$ гравітація . . . . .                  | 33        |
| Задачі . . . . .                                                          | 37        |
| <b>II Збурення</b>                                                        | <b>39</b> |
| <b>4 Збурення метрики: SVT-розклад і калібрування</b>                     | <b>40</b> |
| 4.1 Конформно-ньютонівське калібрування . . . . .                         | 40        |
| Задачі . . . . .                                                          | 41        |
| <b>5 Квантові флуктуації і збурення</b>                                   | <b>43</b> |
| 5.1 Скалярні флуктуації у просторі де-Сіттера . . . . .                   | 44        |
| 5.2 Збурення кривини і первинний спектр . . . . .                         | 47        |
| 5.3 Динаміка первинних гравітаційних хвиль . . . . .                      | 53        |
| Задачі . . . . .                                                          | 54        |

|            |                                                                    |           |
|------------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>III</b> | <b>Спостереження</b>                                               | <b>56</b> |
| <b>6</b>   | <b>Розігрів і народження матерії</b>                               | <b>57</b> |
| 6.1        | Прерозігрів та параметричний резонанс . . . . .                    | 57        |
| 6.2        | Пертурбативний розпад та термалізація . . . . .                    | 58        |
|            | Задачі . . . . .                                                   | 60        |
| <b>7</b>   | <b>Гідродинаміка фотон-баріонної плазми та акустичні осциляції</b> | <b>62</b> |
| 7.1        | Рівняння руху матерії у збуреній метриці . . . . .                 | 64        |
| 7.2        | Рекомбінація, звуковий горизонт і ВАО . . . . .                    | 67        |
|            | Задачі . . . . .                                                   | 69        |
| <b>8</b>   | <b>Ефект Закса-Вольфа та формування кутового спектра СМВ</b>       | <b>71</b> |
| 8.1        | Гармонічний аналіз та кутовий спектр потужності . . . . .          | 72        |
| 8.2        | Від акустичних коливань до піків спектра . . . . .                 | 73        |
| 8.3        | Ефект баріонного завантаження та порушення симетрії . . . . .      | 74        |
|            | Задачі . . . . .                                                   | 75        |
| <b>9</b>   | <b>Поляризація СМВ</b>                                             | <b>79</b> |
| 9.1        | Механізм поляризації: розсіяння Томсона . . . . .                  | 79        |
| 9.2        | Параметри Стокса та спіні-2 характер поляризації . . . . .         | 79        |
| 9.3        | Е- і В-моди . . . . .                                              | 80        |
| 9.4        | Кутові спектри поляризації . . . . .                               | 81        |
| 9.5        | Тензорно-скалярне відношення $r$ . . . . .                         | 82        |
| 9.6        | Практичні виклики: фон, лінзування і delensing . . . . .           | 82        |
| 9.7        | Огляд поточних і майбутніх експериментів . . . . .                 | 83        |
|            | Задачі . . . . .                                                   | 83        |
| <b>IV</b>  | <b>Невирішені проблеми</b>                                         | <b>85</b> |
| <b>10</b>  | <b>Перспективи та можливі напрями подальших досліджень</b>         | <b>86</b> |
| 10.1       | Відкриті напруги в моделі $\Lambda$ CDM . . . . .                  | 86        |
| 10.2       | Аномалія високих червоних зсувів за даними JWST . . . . .          | 88        |
| 10.3       | Майбутні спостережні тести та обмеження . . . . .                  | 88        |
| 10.4       | Первинні чорні діри як наслідок зламу спектра . . . . .            | 88        |
| 10.5       | Гравітаційно-хвильовий фон як спостережний тест . . . . .          | 90        |
| <b>V</b>   | <b>Чисельні методи</b>                                             | <b>92</b> |
| <b>11</b>  | <b>Програмні пакети Python для космологічних досліджень</b>        | <b>93</b> |
| 11.1       | Спостережні дані космічних місій на GitHub . . . . .               | 94        |
| <b>12</b>  | <b>Практичний посібник: від даних СМВ до параметрів моделі</b>     | <b>96</b> |
| 12.1       | Крок 1. Теоретичний спектр через CAMB . . . . .                    | 96        |
| 12.2       | Крок 2. Дані Planck і простий $\chi^2$ -фіт . . . . .              | 97        |
| 12.2.1     | Завантаження даних . . . . .                                       | 97        |
| 12.2.2     | Проста $\chi^2$ -статистика . . . . .                              | 97        |
| 12.3       | Крок 3. МСМС через Cobaya . . . . .                                | 98        |
| 12.3.1     | Що таке МСМС в двох словах . . . . .                               | 98        |
| 12.3.2     | Встановлення і конфігурація . . . . .                              | 98        |

|                                                                                                    |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 12.4 Крок 4. Читання результату . . . . .                                                          | 99         |
| 12.4.1 Трикутний графік (corner plot) . . . . .                                                    | 99         |
| 12.4.2 Як читати posterior . . . . .                                                               | 99         |
| 12.4.3 Похідні параметри: $\Omega_m$ , $\sigma_8$ , $S_8$ . . . . .                                | 100        |
| 12.4.4 Модифікований спектр: зламаний первинний спектр . . . . .                                   | 100        |
| 12.5 Типові помилки початківця . . . . .                                                           | 101        |
| 12.6 Що читати далі . . . . .                                                                      | 101        |
| <b>А Сучасні космологічні дані та параметри раннього Всесвіту</b>                                  | <b>103</b> |
| A.1 Ключові параметри стандартної космологічної моделі ( $\Lambda$ CDM) . . . . .                  | 103        |
| A.2 Параметри та обмеження на стадію інфляції . . . . .                                            | 104        |
| A.3 Енергетичні та температурні характеристики стадії розігріву (Preheating / Reheating) . . . . . | 104        |
| A.4 Реліктовий фон та інші компоненти на сьогодні . . . . .                                        | 105        |
| <b>Б Математичний вивід тривалості інфляції та вікна спостережень СМВ</b>                          | <b>107</b> |
| B.1 Вивід загальної тривалості інфляції ( $N_{\text{total}}$ ) . . . . .                           | 107        |
| B.2 Вивід меж вікна спостережень СМВ ( $N_{\text{CMB}}$ ) . . . . .                                | 109        |
| <b>В Ньютонівська космологія і закон збереження енергії</b>                                        | <b>110</b> |
| V.1 Рівняння Фрідмана з ньютонівської механіки . . . . .                                           | 110        |
| V.2 Закон збереження енергії в космології . . . . .                                                | 112        |
| <b>Література</b>                                                                                  | <b>115</b> |

# Передмова

Цей конспект буде міст між двома точками: *інфлатоном* — гіпотетичним скалярним полем, яке керувало першими  $\sim 10^{-32}$  с існування Всесвіту — і *реліктовим випромінюванням* (СМВ), що є найдетальнішою спостережуваною картиною того, що відбулося. Між цими точками лежить ланцюжок, який ми будемо послідовно, крок за кроком.

**Частина I. Фон.** Розділи 1–3 закладають геометричну та динамічну основу: рівняння Фрідмана описують однорідний і ізотропний Всесвіт, що розширюється; інфлатон і його потенціал  $V(\phi)$  пояснюють, чому це розширення на початку було прискореним (інфляція). Цей ідеалізований, повністю симетричний фон є *нульовим наближенням*, на якому тримається вся подальша фізика.

**Частина II. Збурення.** Розділи 4–5 переходять від симетричного фону до реального світу. Квантові флуктуації інфлатона — немінучі за принципом невизначеності — стають *насінням* усієї великомасштабної структури. Тензорні збурення метрики народжують первинні гравітаційні хвилі. Розділ 4 формалізує мову, якою описуються ці збурення: SVT-розклад і конформно-ньютонівське калібрування.

**Частина III. Спостереження.** Розділи 6–9 стежать за долею збурень після інфляції: розігрів перетворює поле на гарячу плазму; акустичні осциляції цієї плазми залишають відбиток у вигляді піків на спектрі СМВ і масштабу ВАО; поляризаційні E- і B-моди несуть інформацію про скалярні та тензорні збурення відповідно.

**Частина IV. Невирішені проблеми і шляхи їх пошуку.** Розділи 3.3–10 виходять за межі стандартної моделі. Телескоп JWST виявив масивні галактики при  $z \sim 10$ –12, існування яких важко узгодити зі стандартним степеневозаконним первинним спектром. Ми розглядаємо механізм локального *зламу спектра* через особливість у потенціалі інфлатона і формулюємо програму перевірки цієї ідеї за допомогою CAMB/CLASS та байєсівського аналізу (MCMC).

*Передумови.* Конспект розрахований на читача, знайомого із загальною теорією відносності на рівні тензора Рімана і рівнянь Айнштейна, та з квантовою теорією поля на рівні канонічного квантування. Знання космології не передбачається.

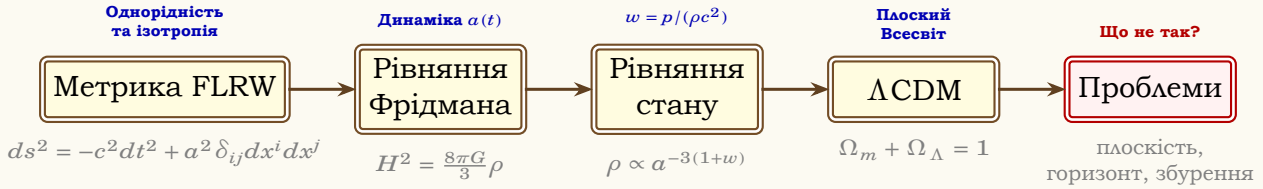
# **Частина І.**

## **Фон**

# 1. Фонова космологія: від метрики FLRW до $\Lambda$ CDM

Космологія описує Всесвіт як єдиний фізичний об'єкт. Її фундаментальним відправним пунктом є **космологічний принцип** (принцип однорідності та ізо-тропії): на достатньо великих просторових масштабах ( $\gtrsim 100$  Мпк) розподіл ма-терії та геометрія простору-часу є трансляційно та ротаційно інваріантними, тобто не виділяють жодного напрямку і жодної точки. Цей симетрійний посту-лат жорстко фіксує єдиний допустимий клас геометрій — метрику Фрідмана–Леметра–Робертсона–Вокера (FLRW) — і зводить систему тензорних рівнянь Айн-штайна до двох звичайних диференціальних рівнянь для однієї скалярної фун-кції часу — **масштабного фактора**  $a(t)$ . Фізичний зміст  $a(t)$  простий: якщо сьогодні ( $t = t_0$ ) дві галактики розділені відстанню  $d_0$ , то в момент  $t$  відстань між ними була  $d(t) = a(t) d_0 / a(t_0)$ . Нормуємо  $a(t_0) \equiv 1$ : тоді  $a < 1$  означає мину-ле (Всесвіт менший),  $a > 1$  — майбутнє.

## Логічна карта розділу



Метрика FLRW у космологічному (власному) часі  $t$  для загального випадку тривимірного простору з постійною кривизною  $k = \pm 1, 0$  записується як:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (1.1)$$

Для локально плоского Всесвіту ( $k = 0$ ) метрика (1.1) набуває спрощеного вигляду:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.2)$$

Підставляючи метричний тензор у рівняння Айнштайна  $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$  та моделюючи космічний субстрат як **ідеальну гідродинамічну рідину**, ми задаємо тензор енергії-імпульсу у **супутній системі відліку**<sup>1</sup> у діагональній формі:

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho c^2, p, p, p).$$

Знак мінус перед  $\rho c^2$  є наслідком сигнатури метрики  $(-, +, +, +)$ : часова компонента  $T^0{}_0 = -\rho c^2$  відповідає густині енергії, просторові  $T^i{}_j = p \delta^i{}_j$  — ізотропному тиску. Обчислення символів Крістофеля для метрики FLRW та згортка з тензором Рімана дають ненульові компоненти тензора Айнштайна:

$$G^0{}_0 = -\frac{3H^2}{c^2} - \frac{3k}{a^2}, \quad G^i{}_j = -\frac{1}{c^2} \left( 2\dot{H} + 3H^2 + \frac{kc^2}{a^2} \right) \delta^i{}_j, \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a}.$$

<sup>1</sup>Супутня система відліку — це система спостерігача, який «пливе» разом із космологічним розширенням, тобто має нульову пекулярну швидкість. У такій системі речовина локально перебуває у спокої, і тензор  $T^\mu{}_\nu$  набуває діагонального вигляду.



Величина  $H(t)$  називається **параметром Хаббла**, вона є ключовою характеристикою космологічної кінематики і визначає миттєвий темп розширення Всесвіту.

Підставляючи ці вирази у рівняння Айнштайна, отримуємо систему **рівнянь Фрідмана**:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (1.3a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (1.3б)$$

$$\dot{\rho} = -3H \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right). \quad (1.3в)$$

Перше (1.3a) — енергетичний баланс ((00)-компонента); друге (1.3б) — динаміка прискорення ((*ii*)-компонента). Третє (1.3в) — космологічний аналог першого закону термодинаміки: для однорідної сферичної області об'єму  $V \propto a^3$  воно відтворює  $dE = -p dV$ , де  $E = \rho c^2 V$  (детальніше — дод. В). Зауважимо, що (1.3в) не є незалежним: воно автоматично випливає з (1.3a) і (1.3б) через тотожність Б'янкі  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ . Система (1.3) має рівно два незалежних ступені свободи, але третє рівняння зручніше для безпосереднього інтегрування і широко використовується надалі.

Для точного математичного моделювання реального Всесвіту ми маємо враховувати одночасний внесок усіх його фізичних компонентів. Прирівнюючи перше рівняння Фрідмана (1.3a) до нуля при  $k = 0$  та  $\Lambda = 0$ , ми визначаємо **критичну густину** — густину, якій відповідає геометрично плоский Всесвіт, — та пов'язані з нею безрозмірні параметри густини  $\Omega_i$ :

$$\rho_{\text{cr}}(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad \Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_{\text{cr}}(t)}, \quad \Omega_\Lambda(t) \equiv \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)}. \quad (1.4)$$

Поділивши перше рівняння Фрідмана на  $H^2(t)$ , ми можемо записати його у безрозмірній формі через введені параметри  $\Omega_i$ . При цьому геометричний член кривизни  $-kc^2/(a^2 H^2)$  космологи часто формально трактують як внесок від специфічного «квазіматеріального» флюїду, вводячи **параметр густини кривизни**  $\Omega_k$ :

$$\Omega_k(t) \equiv -\frac{kc^2}{a^2(t)H^2(t)}. \quad (1.5)$$

З погляду загальної теорії відносності кривизна  $k$  є чистою властивістю просторової геометрії і не є матеріальним джерелом. Проте такий математичний трюк дозволяє звести рівняння Фрідмана для довільної топології простору до елегантного алгебраїчного інваріанта:

$$\sum \Omega_i(t) + \Omega_k(t) = 1, \quad (1.6)$$

де сума береться за всіма реальними фізичними компонентами (радіація, баріони, холодна темна матерія). Якщо Всесвіт є суворо плоским ( $k = 0$ ), то  $\Omega_k \equiv 0$ , а сума густин речовини та темної енергії точно дорівнює одиниці. Натомість у закритому Всесвіті ( $k = +1$ , сфера) цей ефективний флюїд має від'ємну густину ( $\Omega_k < 0$ ) та ефективне рівняння стану  $w_k = -1/3$ , а його густина згасає з розширенням як  $\rho_k \propto a^{-2}$ .



Використовуючи ці визначення, ми можемо переписати перше рівняння Фрідмана (1.3а) у загальному вигляді критерію енергетичного балансу [1, 2]:

$$\sum_i \Omega_i(t) - 1 = \frac{kc^2}{a^2 H^2} \equiv -\Omega_k(t), \quad (1.7)$$

де  $\sum_i \Omega_i(t) = \Omega_m(t) + \Omega_r(t) + \Omega_\Lambda(t)$  — сума внесків матерії, випромінювання і темної енергії (космологічна стала трактується як компонента з  $w = -1$ ). Сучасні дані [3] дають  $|\Omega_k| < 0.005$ , тобто Всесвіт є геометрично плоским з високою точністю.

### Геометрична vs динамічна плоскість

Важливо розрізняти два питання. **Геометричне:** яке значення  $k$ ? Параметр  $k = 0, \pm 1$  є глобальною топологічною характеристикою простору — її точне значення невідоме і принципово не може бути встановлено зі спостережень у межах скінченного горизонту частинок. **Динамічне:** наскільки ця кривина *відчутна* на доступних нам масштабах? Це вимірює  $\Omega_k(t) = -kc^2/(a^2 H^2)$  — величина, що залежить від часу через  $a(t)$ .

Якщо  $k \neq 0$  але  $a^2 H^2 \gg c^2$ , то  $|\Omega_k| \ll 1$  — кривина існує, але радіус кривини  $R_{\text{curv}} = a/\sqrt{|k|}$  настільки перевищує горизонт Хаббла  $c/H$ , що в межах спостережуваного Всесвіту геометрія є практично евклідовою. Аналогія: поверхня Землі сферична ( $k = +1$ ), але на масштабі міста виглядає плоскою.

Тому коли ми кажемо «Всесвіт плаский» — ми маємо на увазі  $|\Omega_k(t_0)| < 0.005$ , а не обов'язково  $k = 0$ . Різниця принципова концептуально, але не практично: для всіх розрахунків  $k = 0$  є бездоганим наближенням.

## 1.1. Рівняння стану і закони розширення

Динамічна еволюція кожної космічної компоненти повністю визначається її **рівнянням стану**  $w \equiv p/(\rho c^2)$ . За умови сталого  $w$  рівняння збереження (1.3в) інтегрується аналітично:

$$\rho(a) = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)}, \quad (1.8)$$

а підстановка у (1.3а) дає кінематичний закон ( $w \neq -1$ ):

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (1.9)$$

Для повноти картини зведемо основні космологічні епохи до таблиці 1.1. У ній наведено лише ті компоненти, які домінують у різні періоди еволюції Всесвіту. Відсутня, зокрема, **інфляційна епоха** ( $w \approx -1$ ), оскільки вона передуює гарячій стадії і буде розглянута окремо в наступному розділі 2.

**Таблиця 1.1:** Зведена таблиця космологічних епох: рівняння стану  $w$ , закон еволюції густини  $\rho(a)$  та масштабного фактора  $a(t)$  часі

| Епоха       | Джерело маси-енергії             | $w$ | $\rho(a)$        | $a(t)$            |
|-------------|----------------------------------|-----|------------------|-------------------|
| Радіаційна  | Фотони, релятивістські нейтрино  | 1/3 | $\propto a^{-4}$ | $\propto t^{1/2}$ |
| Матеріальна | Холодна темна матерія + баріони  | 0   | $\propto a^{-3}$ | $\propto t^{2/3}$ |
| Сьогодні    | Темна енергія ( $\Lambda$ -член) | -1  | const            | $\propto e^{Ht}$  |

Член кривини  $\Omega_k$  формально відповідає ефективному флюїду з  $w_k = -1/3$  і густиною  $\rho_k \propto a^{-2}$ , однак він не є самостійною матеріальною компонентою, а виникає з геометрії простору.

## 1.2. Конформний час

Динамічна природа Всесвіту FLRW створює серйозний концептуальний виклик для опису його еволюції: оскільки тканина простору неперервно розширюється, класичний фізичний (космічний) час  $t$ , який вимірюється годинником локально нерухомого спостерігача, виявляється вкрай незручним для аналізу глобальних процесів. Головна проблема полягає в тому, що швидкість світла  $c$  є константою лише локально, тоді як на великих масштабах фотони змушені подорожувати простором, який постійно «втікає» з-під них. Як наслідок, на стандартних просторово-часових діаграмах  $(t, r)$  траєкторії світлових променів (світлові конуси) стають складними викривленими лініями, залежними від еволюції густини енергії. Це суттєво заплутує аналіз причинно-наслідкової структури та причинних горизонтів.

Щоб повернути простору-часу геометричну простоту та інтуїтивну наочність, у космології здійснюють перехід до *конформного часу*  $\eta$ . Математично конформний час визначається диференціальним співвідношенням, яке повністю компенсує часову зміну масштабного фактора  $a(t)$ :

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.10)$$

У цих нових змінних просторово-пласка ( $k = 0$ )<sup>2</sup> метрика FLRW набуває елегантного конформно-пласького вигляду:

$$ds^2 = a^2(\eta) (-c^2 d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (1.11)$$

Фізично цей новий «космічний годинник» можна уявити так: оскільки  $d\eta = dt/a$ , в ранню епоху малого  $a$  один «тік» конформного годинника охоплює дуже короткий фізичний інтервал  $dt = a d\eta \ll d\eta$ . Конформний час таким чином «розтягує» ранню еволюцію Всесвіту і дозволяє однаково детально описувати як стрімкі процеси ранньої плазми, так і повільну пізню динаміку — без зміни форми рівнянь.

**Фізичні та математичні переваги конформного формалізму.** Рівняння (1.11) показує, що вся динаміка розширення Всесвіту тепер повністю «захована» у загальному конформному множнику  $a^2(\eta)$ , який стоїть перед дужками, тоді як геометрія всередині дужок залишається абсолютно тотожною статичному простору Мінковського. Це дає дві ключові переваги для моделювання космології:

1. **Стабільна причинна структура:** Оскільки для фотонів інтервал руху завжди  $ds^2 \equiv 0$ , з виразу всередині дужок (1.11) прямо випливає закон радіального поширення світла:  $c d\eta = d\chi$  (де  $\chi$  — супутня просторова координата<sup>3</sup>). Це означає, що на просторово-часових діаграмах у координатах  $(\eta, \chi)$  світлові конуси завжди залишаються ідеальними прямими лініями під кутом  $45^\circ$  (за умови однакового масштабу обох осей, тобто при відкладанні  $c\eta$  і  $\chi$  в одних одиницях), значно спрощуючи розрахунок причинних горизонтів.

<sup>2</sup>Вибір  $k = 0$  обґрунтовується спостереженнями: дані *Planck* [3] свідчать, що геометрія Всесвіту є плоскою з точністю до  $\sim 1\%$ .

<sup>3</sup>Точніше,  $\chi$  — це радіальна супутня координата, пов'язана з декартовими супутніми координатами  $x^i$  співвідношенням  $\chi = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ . У випадку радіального руху світла ( $d\theta = d\phi = 0$ ) просторова частина метрики зводиться саме до  $d\chi^2$ .

2. **Незмінна координатна сітка:** У конформному формалізмі розширення простору відображається як роздування самої координатної сітки. Через це «адреси» (супутні координати  $\chi$ ) об'єктів, які беруть участь у загальному хаббловському потоці, залишаються константними. Реальні фізичні швидкості окремих об'єктів відносно цього фону — *пекулярні швидкості* (від англ. *peculiar* — особливий, власний) — відокремлюються від загального розширення і не входять у хаббловський потік. На космологічних масштабах ( $\gtrsim 100$  Мпк) пекулярними швидкостями зазвичай нехтують; на локальних — вони принципові<sup>4</sup>.

### 1.3. Космологічний червоний зсув та космологічні відстані

Маючи інструмент конформного часу і чітке розуміння причинної структури, ми тепер можемо систематично описати як вимірюються відстані у розширюваному Всесвіті — і чому у космології їх існує кілька.

Усі макроскопічні спостереження в астрофізиці пов'язані з динамікою масштабного фактора  $a(t)$  через безрозмірну величину — **космологічний червоний зсув**  $z$ . Фотон, випромінений джерелом у момент  $t_e$ , приходить до спостерігача в момент  $t_0$  з розтягненням довжини хвилі:

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (1.12)$$

При стандартному нормуванні  $a(t_0) \equiv 1$  отримуємо фундаментальний зв'язок між геометрією та спостереженнями:

$$a(t_e) = \frac{1}{1 + z}. \quad (1.13)$$

Це рівняння є ключем до космологічних вимірювань: воно дозволяє замінити теоретичну координату  $t_e$ , яку неможливо виміряти без апіорного знання моделі, на безпосередньо спостережуваний спектроскопічний параметр  $z$ .

Реперні значення  $z$  в історії Всесвіту:

|                  |                                                        |
|------------------|--------------------------------------------------------|
| $z = 0$          | (сьогодні, спостерігач),                               |
| $z \approx 0.3$  | (початок прискореного розширення під дією $\Lambda$ ), |
| $z \approx 1100$ | (рекомбінація, формування СМВ),                        |
| $z \sim 10^{10}$ | (первинний нуклеосинтез).                              |

#### Закон Хаббла

З відкриття Едвіна Габбла в 1929 році почалася сучасна космологія: спостерігаючи далекі галактики, він виявив, що їхні спектри зміщені в червоний бік, причому швидкість віддалення лінійно зростає з відстанню. Сьогодні ми інтерпретуємо це як наслідок розширення самого простору.

У конформній метриці для плоского Всесвіту (1.11) супутні координати  $x^i$  нерухомого спостерігача не змінюються з часом. Відстань між двома точками вздовж просторової геодезичної в момент  $t$  дорівнює добутку масштабного фактора на різницю їхніх супутніх координат:  $d_p(t) = a(t) \Delta \chi$ . Позначаючи

<sup>4</sup>Класичний приклад: галактика Андромеда (М31) наближається до Чумацького Шляху з пекулярною швидкістю  $\sim 110$  км/с завдяки локальному гравітаційному притяганням — попри загальне хаббловське розширення.

$d_C \equiv \Delta\chi$  (супутня відстань), маємо:

$$d_p(t) = a(t) d_C. \quad (1.14)$$

Диференціюючи цей вираз за часом, отримуємо:

$$\dot{d}_p = \frac{\dot{a}}{a} d_p = H(t) d_p, \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.15)$$

Це і є **закон Хаббла** в диференціальній формі: швидкість віддалення об'єкта пропорційна його відстані, а коефіцієнтом пропорційності виступає параметр Хаббла.

Сьогодні ( $t = t_0$ ) маємо  $\dot{d}_p = H_0 d_p$ , де  $H_0 = 100 h$  км/с/Мпк ( $h = 0.6736$  за даними *Planck* 2018 [3]).

Фізична відстань  $d_p(t)$  є *практично неспостережуваною*. Вона змінюється щомиті через розширення простору, тоді як світло фіксує об'єкт у минулому, а не в його теперішньому положенні. Тому закон Хаббла в такому вигляді є лише кінематичним співвідношенням, а не робочою формулою для вимірювань.

### Супутня відстань

Для фотона  $ds^2 = 0$ , тому з конформної метрики (1.11) випливає  $c d\eta = d\chi$  (див. § 1.2). Отже, супутня відстань до об'єкта, що випромінює світло в момент  $\eta_e$  (який ми спостерігаємо в момент  $\eta_0$ ), дорівнює:

$$d_C \equiv \chi = c \int_{\eta_e}^{\eta_0} d\eta' = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

Величина  $c dt/a(t)$  має просту інтерпретацію: це елемент **супутньої відстані**, який світло проходить за фізичний час  $dt$ . Обернена величина  $a(t)/c$  визначає миттєвий **горизонт Хаббла**  $R_H(t) = c/H(t)$  (у фізичних координатах), який відокремлює області, що віддаляються повільніше або швидше за швидкість світла.

#### Конформний горизонт Хаббла

У конформній метриці (1.11) природно ввести конформний параметр Хаббла  $\mathcal{H} \equiv a'/a = aH$  (штрих — похідна за  $\eta$ ). Тоді конформний горизонт Хаббла дорівнює

$$c\mathcal{H}^{-1} = \frac{c}{aH}.$$

На відміну від звичайного радіуса Хаббла  $R_H = c/H$ , конформний горизонт  $c\mathcal{H}^{-1}$  вимірюється в супутніх координатах. Це робить його зручним інструментом для порівняння фізичних масштабів космологічних структур (наприклад, ВАО) із причинною структурою Всесвіту в будь-який момент часу.

Оскільки безпосередньо виміряти космічний час  $t_e$  неможливо, перейдемо до спостережуваного червоного зсуву  $z$ . Диференціюючи (1.13) отримуємо:

$$\dot{a} = -\frac{1}{(1+z)^2} \dot{z}.$$

Підставляючи це у визначення параметра Хаббла  $H \equiv \dot{a}/a$ , маємо:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = (1+z) \cdot \left( -\frac{\dot{z}}{(1+z)^2} \right) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt},$$

звідки знаходимо потрібний диференціал:

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} = -\frac{dz}{H(z)}.$$

Далі необхідно знати явну залежність  $H(z)$ . Для цього розділимо перше рівняння Фрідмана (1.3а) на  $H_0^2$ . Використовуючи безрозмірні параметри густини  $\Omega_i \equiv \rho_{i0}/\rho_{cr0}$  та закон еволюції кожної компоненти  $\rho(a) = \rho_0(a_0/a)^{3(1+w)}$  (див. (1.8)), отримуємо:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda,$$

де  $a_0/a = 1+z$ . Таким чином, безрозмірна функція Хаббла  $E(z) \equiv H(z)/H_0$  має вигляд:

$$E(z) = \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}. \quad (1.16)$$

При переході від  $t$  до  $z$  межі інтегрування змінюються: моменту випромінювання  $t_e$  відповідає червоний зсув  $z$ , а сучасному моменту  $t_0$  —  $z = 0$ . Зміна знаку  $dz$  компенсує перевертання меж ( $\int_z^0 \rightarrow -\int_0^z$ ). Остаточно отримуємо:

$$d_C(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (1.17)$$

Оскільки аналітично цей інтеграл для комбінації різних степенів  $(1+z)$  під коренем взяти не можна, після знаходження оптимальних параметрів  $\Omega_i$  розрахунків реальних відстаней за формулою (1.17) виконується виключно чисельними методами.

### Система космологічних відстаней

У статичному просторі відстань між двома точками однозначна. У розширюваному Всесвіті FLRW це не так: кожна фізична задача (вимірювання потоку, кутового розміру, швидкості розлітання) потребує своєї «лінійки». Спостерігач може безпосередньо виміряти лише три величини — червоний зсув  $z$ , потік енергії  $F$  та кутовий розмір  $\delta\theta$ , — тому вводять систему **оперативних відстаней**, кожна з яких відповідає одному типу вимірювань.

### Відстань люмінозності — стандартні свічки

Для об'єкта відомої світності  $L$  у статичному просторі:  $F = L/(4\pi d^2)$ . У розширюваному Всесвіті потік послаблюється в  $(1+z)^2$  разів через два ефекти:

1. кожен фотон втрачає енергію:  $E_{\text{obs}} = E_{\text{em}}/(1+z)$ ;
2. темп прибуття фотонів сповільнюється:  $\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t_{\text{em}}(1+z)$ .

Щоб зберегти форму  $F = L/(4\pi d_L^2)$ , вводять:

$$d_L(z) = d_C(z) (1+z). \quad (1.18)$$

Саме вимірювання  $d_L(z)$  для наднових типу Ia у 1998 р. призвело до відкриття прискореного розширення та темної енергії [4, 5].



**Кутова відстань — стандартні лінійки**

**Кутова відстань** визначається через видимий кутовий розмір  $\delta\theta$  об'єкта з відомим фізичним розміром  $\ell$ :

$$d_A \equiv \frac{\ell}{\delta\theta}. \quad (1.19)$$

Оскільки кут фіксується геометрією епохи випромінювання, коли масштабний фактор був  $a_e = 1/(1+z)$ , то:

$$d_A(z) = \frac{d_C(z)}{1+z}. \quad (1.20)$$

Зауважимо, що  $d_A(z)$  не є монотонною: вона досягає максимуму при  $z \approx 1.6$  (для параметрів  $\Lambda$ CDM) і далі спадає — об'єкти при дуже великих  $z$  виглядають більшими, ніж при проміжних. Фізично це відбувається тому, що  $d_A = d_C/(1+z)$ : при малих  $z$  чисельник  $d_C(z)$  зростає швидше ніж знаменник  $(1+z)$ , а при великих  $z$  знаменник починає «перемагати». Конкретне значення  $z \approx 1.6$  визначається балансом  $\Omega_m$  і  $\Omega_\Lambda$  і є характеристикою саме нашого Всесвіту. Цей ефект «космологічного збільшення» детально розглядається у задачі 1.5.

На практиці  $d_A(z)$  є критичним інструментом для аналізу кутового масштабу акустичних піків СМВ та ВАО — саме через неї вимірюють геометрію Всесвіту та  $H_0$ .

Відстані  $d_A(z)$  та  $d_L(z)$  жорстко пов'язані між собою через супутню відстань  $d_C(z)$  та **теорему взаємності Етерінгтона**:

$$d_L(z) = (1+z)^2 d_A(z). \quad (1.21)$$

Це співвідношення є строгим геометричним інваріантом будь-якої метричної теорії гравітації. Воно виконується за умови збереження кількості фотонів у геометричній оптиці та є прямим наслідком теореми Ліувілля про збереження фазового об'єму вздовж світлових променів [2]. На практиці рівність (1.21) слугує фундаментальним тестом на відсутність екзотичної фізики (наприклад, осциляцій фотонів в аксіоноподібні частинки) та міжгалактичного поглинання світла, а також дозволяє безпосередньо перераховувати кутові масштаби джерел у їхні фотометричні характеристики.

**1.4. Параметри густини та модель  $\Lambda$ CDM**

Параметри  $\Omega_i$  неможливо виміряти безпосередньо — вони визначаються через спільний чисельний фіт спостережних даних різних типів.

1. **Спостереження:** для кожного об'єкта вимірюють червоний зсув  $z$  та одну або кілька залежних від космології величин:

- для наднових типу Ia — видиму зоряну величину  $m(z)$ ;
- для ВАО — кутовий розмір  $\delta\theta(z)$  та/або інтервал червоного зсуву  $\Delta z(z)$ ;
- для СМВ — спектр потужності  $C_\ell$ .

2. **Вибір моделі:** фіксують набір параметрів  $\{H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k, \Omega_b, \dots\}$  та функцію  $E(z) = \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}$ .

3. **Пряме обчислення теоретичних передбачень:** для заданого набору параметрів чисельно обчислюють:

$$d_C(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad d_L(z) = (1+z) d_C(z), \quad d_A(z) = \frac{d_C(z)}{1+z},$$

а також, за потреби, звуковий горизонт  $r_s(z_*)$  та теоретичний спектр  $C_\ell$ .

4. **Порівняння з даними:** обчислюють  $\chi^2$  як суму квадратів відхилень між спостереженими величинами ( $m(z)$ ,  $\delta\theta(z)$ ,  $C_\ell$ , ...) та їхніми теоретичними виразами, наприклад:

$$m^{\text{th}}(z) = M + 5 \log_{10} \left( \frac{d_L(z)}{10 \text{ пк}} \right), \quad \delta\theta^{\text{th}}(z) = \frac{r_s}{d_A(z)}.$$

5. **МСМС-фітінг:** МСМС перебирає мільйони комбінацій параметрів, повторюючи кроки 3–4 для кожної, і знаходить ті, що мінімізують  $\chi^2$  — це і є найкращі значення  $\Omega_i$ ,  $H_0$  тощо.

Зокрема, за сучасними прецизійними даними *Planck* 2018 [3], результатом такого фітінгу для базової пласкої моделі нашого Всесвіту є наступні фундаментальні константи:

$$\begin{aligned} \Omega_m &= 0.3153 \pm 0.0073, \\ \Omega_\Lambda &= 0.6847 \pm 0.0073, \\ \Omega_r &\approx 9.4 \times 10^{-5}, \\ \Omega_k &= 0.0007 \pm 0.0019. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Ті самі параметри дозволяють обчислити **вік Всесвіту**. З першого рівняння Фрідмана  $dt = da/(aH)$ , тому:

$$t_0 = \int_0^1 \frac{da}{a H(a)} = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{a E(a)}, \tag{1.23}$$

де  $E(a) = \sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda}$  — функція (1.16), переписана через закон зв'язку масштабного фактора і червоного зсуву  $a = 1/(1+z)$ . Оскільки аналітичного первісного виразу для такої комбінації не існує, інтеграл обчислюється чисельними методами. Підставляючи параметри *Planck* 2018, отримуємо:

$$t_0 = 13.801 \pm 0.024 \text{ млрд років.}$$

Тепер ми маємо повне право звести всі компоненти нашого плаского Всесвіту в єдину фінальну балансову таблицю 1.2.

## 1.5. Парадокс плоскості: навіщо таке точне налаштування?

Модель  $\Lambda$ CDM вказує на те, що сьогодні  $\Omega_{\text{tot}}(t_0) \approx 1$ . Здавалося б, це свідчить про геометричну простоту нашого Всесвіту. Проте, якщо екстраполювати рівняння Фрідмана у зворотному часовому напрямку і проаналізувати, якою мала бути ця величина на ранніх етапах еволюції, результат виявляється концептуально парадоксальним.

Проаналізуємо, як відхилення від плоскості поведилося в минулому. З рівняння (1.7) видно, що воно визначається комбінацією  $a^2 H^2$  у знаменнику. Простежимо її долю в кожен епоху:



**Таблиця 1.2:** Компоненти стандартної моделі  $\Lambda$ CDM та їхні сучасні параметри густини за даними місії *Planck* [3].

| Компонента                  | Параметр         | $w$ | Значення при $z = 0$                        | Фізична природа                               |
|-----------------------------|------------------|-----|---------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| Баріони                     | $\Omega_b$       | 0   | $\approx 0.0493$<br>( $\approx 5\%$ )       | Звичайна речовина (протони, електрони, атоми) |
| Холодна темна матерія       | $\Omega_c$       | 0   | $\approx 0.2660$<br>( $\approx 27\%$ )      | Небаріонні слабковзаємодіючі масивні частинки |
| Темна енергія ( $\Lambda$ ) | $\Omega_\Lambda$ | -1  | $\approx 0.6847$<br>( $\approx 68\%$ )      | Енергія космологічного вакууму                |
| Випромінювання              | $\Omega_r$       | 1/3 | $\approx 0.000094$<br>( $\approx 0.009\%$ ) | Реліктові фотони та космологічні нейтрино     |

- **Радіаційно-домінантна епоха** ( $w = 1/3$ ): Оскільки  $H^2 \propto \rho_r \propto a^{-4}$ , маємо  $a^2 H^2 \propto a^{-2}$ . Тоді відхилення від плоскості прогресує лінійно по часі:

$$|\Omega_{\text{tot}}(t) - 1| \propto |k|a^2(t) \propto |k|t. \quad (1.24)$$

- **Матеріально-домінантна епоха** ( $w = 0$ ): Тут  $H^2 \propto \rho_m \propto a^{-3}$ , відповідно  $a^2 H^2 \propto a^{-1}$ . Відхилення від плоскості продовжує зростати:

$$|\Omega_{\text{tot}}(t) - 1| \propto |k|a(t) \propto |k|t^{2/3}. \quad (1.25)$$

Обидва рівняння говорять одне: якщо  $k \neq 0$  (тобто Всесвіт не є ідеально плоским), то з часом відхилення  $|\Omega_{\text{tot}}(t) - 1|$  не зникає, а невинно зростає. Плоский Всесвіт є точкою нестійкої рівноваги: будь-яке початкове відхилення від критичної густини призводить до дедалі більшого відхилення в майбутньому.

Щоб отримати спостережуване сьогодні значення  $|\Omega_k(t_0)| < 0.005$  після того, як Всесвіт охолонув від температури епохи Великого Об'єднання ( $T_{\text{GUT}} \sim 10^{26}$  К, масштаб енергій  $\sim 10^{16}$  Гев) до сучасного стану ( $T_0 \approx 2.73$  К) — оскільки для релятивістської речовини  $a \propto T^{-1}$  (впливає з  $\rho_r \propto a^{-4}$  та закону Стефана-Больцмана  $\rho_r \propto T^4$ ), це відповідає розширенню масштабного фактора у  $a_0/a_{\text{GUT}} = T_{\text{GUT}}/T_0 \approx 10^{26}$  разів — початкові умови густини на самому старті мали бути налаштовані з фантастичною, абсолютно неприродною точністю:

$$|\Omega_{\text{tot}} - 1|_{t=t_{\text{Pl}}} \lesssim 10^{-60}.$$

Такий ступінь узгодженості початкових умов свідчить про наявність глибокої концептуальної проблеми в межах класичної Фрідманівської космології. Відхилення від критичної густини у планківську епоху навіть на величину порядку  $10^{-60}$  призвело б до кардинальної зміни космологічного сценарію: у випадку замкненої геометрії Всесвіт зазнав би колапсу назад у сингулярність задовго до початку епохи нуклеосинтезу, а у випадку відкритої — надто швидко розширення унеможливило б гравітаційну нестабільність і подальше формування великомасштабної структури.

Фізики називають цю ситуацію **проблемою тонкого налаштування** (*fine-tuning problem*). Саме по собі число  $10^{-60}$  не заборонено жодним законом природи. Але наука не приймає «так склалося» як відповідь — особливо коли точність потрібна з шістдесятьма знаками після коми.

**Динамічне вирішення: космічна інфляція [6, 7]**

У 1980–1981 роках Алан Гут запитав: а що, якщо до гарячої стадії Всесвіт пережив коротку фазу експоненціального розширення? Тоді закон зміни  $a^2 H^2$  був би оберненим. Під час інфляції домінує скалярне поле з  $w \approx -1$ , параметр Хаббла залишається майже сталим, а масштабний фактор летить вгору як  $a(t) \propto e^{Ht}$ .

У цей період знаменник  $a^2 H^2$  стрімко зростає, а відхилення від плоскості зазнає потужного придушення:

$$|\Omega_{\text{tot}}(t) - 1| = \frac{kc^2}{a^2 H^2} \propto \frac{1}{a^2(t)} \propto e^{-2Ht}. \quad (1.26)$$

Саме стільки потрібно, щоб «згладити» довільне початкове відхилення  $|\Omega - 1| \sim 1$  (природне значення на планківській епосі) до рівня, сумісного з подальшою еволюцією: після  $N = 60$   $e$ -folds отримуємо  $|\Omega - 1| \lesssim e^{-2 \times 60} \approx 10^{-52}$ . Цього з великим запасом достатньо, щоб сьогодні спостерігати  $|\Omega_k| < 0.005$  [3] — адже між кінцем інфляції і сьогоднішнім днем відхилення від плоскості вже зросло за законом (1.7), проте стартувало з настільки малого значення, що навіть це зростання не встигло його підняти до помітного рівня.

**Підсумок і відкриті питання**

**Що ми збудували.** Починаючи з одного постулату — однорідності та ізотропії — ми отримали повний кінематичний і динамічний опис однорідного Всесвіту, що розширюється. Його серцевина — система рівнянь Фрідмана (1.3) — зводить задачу до єдиної функції  $a(t)$ , еволюція якої повністю визначається складом речовини через  $\rho(t)$  та  $p(t)$ . Модель  $\Lambda$ CDM — шість вільних параметрів, чотири компоненти,  $\Omega_{\text{tot}} = 1$  — є найкращим з існуючих описів спостережуваного Всесвіту на великих масштабах [3].

**Три проблеми, які  $\Lambda$ CDM не вирішує.** Попри видатний емпіричний успіх, ця модель є теорією еволюції, а не початкових умов. Вона не відповідає на три фундаментальні питання:

1. **Проблема плоскості.** Чому  $|\Omega_k(t_0)| < 0.005$ , якщо плоска геометрія є точкою динамічної нестабільності (1.7) і будь-яке початкове відхилення від неї мало б лавиноподібно зростати? За даними Планківської епохи це вимагає тонкого налаштування  $|\Omega_{\text{tot}} - 1|_{t_{\text{pl}}} \lesssim 10^{-60}$ .
2. **Проблема горизонту.** Реліктове випромінювання є однорідним з точністю до  $10^{-5}$  по всьому небу. Але в стандартній гарячій космології без інфляції ділянки, розділені більш ніж на  $\sim 2^\circ$ , ніколи не перебували у причинному контакті: їхні горизонти Хаббла  $\mathcal{H}^{-1}$  на момент рекомбінації не перетиналися, тобто між ними не міг пройти жодний сигнал від Великого вибуху до рекомбінації. Але якщо ці ділянки ніколи не «спілкувалися» — чому вони мають однакову температуру з точністю  $10^{-5}$ ? Термодинамічна рівновага без причинного контакту неможлива — це і є проблема горизонту.
3. **Проблема первинних збурень.** У межах стандартної моделі  $\Lambda$ CDM наявність початкових збурень густини, які стали зародками всієї великомасштабної структури Всесвіту, приймається як суто феноменологічна початкова умова. Класична Фрідманівська космологія принципово неспроможна пояснити мікрофізичну природу виникнення цих неоднорідностей, а також причини формування їхнього майже строго степеневого спектра

з надзвичайно малою амплітудою, залишаючи це питання відкритим до залучення механізмів квантової генерації на стадії інфляції<sup>5</sup>.

Усі три зазначені космологічні парадокси мають спільне елегантне вирішення. Якщо припустити, що гарячій стадії Великого вибуху передувала *epoca інфляції* — надшвидкого розширення Всесвіту, керованого особливим скалярним полем, — то всі суперечності знімаються одночасно. Геометрична плоскість стає наслідком колосального розтягнення простору; температурна однорідність (проблема горизонту) пояснюється тим, що весь спостережуваний Всесвіт розширився з крихітної причинно-зв'язаної області; а первинні неоднорідності виявляються розтягнутими до космічних масштабів квантовими коливаннями цього самого поля. Детальному математичному опису та аналізу цього дивовижного механізму присвячений наступний розділ.

## Задачі

**№ 1.1 Точна підгонка: закон Габбла в метриці FLRW** У законі Габбла  $\dot{d}_p = H(t)d_p$  відстань  $d_p$  є фізичною (власною) відстанню. Нехай спостерігач сьогодні ( $t = t_0$ ) реєструє фотон від галактики, який був випромінений у момент  $t_e$ .

1. Виразіть  $d_p(t_e)$  через  $d_C$  та  $a(t_e)$ .
2. Виразіть  $d_p(t_0)$  через  $d_C$  та  $a(t_0)$ .
3. Покажіть, що відношення  $\dot{d}_p(t_0)$  до  $d_p(t_0)$  дає  $H_0$ , але чому це не можна безпосередньо виміряти для далекої галактики?

**№ 1.2 Інтегрування  $d_C(z)$  для Всесвіту без  $\Lambda$**  Розглянемо плоский Всесвіт, заповнений лише нерелятивістською матерією ( $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = \Omega_r = 0$ ).

1. Знайдіть явний вигляд функції  $E(z)$ .
2. Обчисліть аналітично  $d_C(z)$  за формулою (1.17).
3. Знайдіть граничне значення  $d_C(z)$  при  $z \rightarrow \infty$ . Чи є воно скінченним? Чому?

**№ 1.3 Вік Всесвіту в різних моделях** Використовуючи співвідношення  $dt = da/(aH)$  та закон еволюції  $a(t) \propto t^{2/[3(1+w)]}$  для домінуючої компоненти:

1. Виразіть вік Всесвіту  $t_0$  через  $H_0$  в моделях, де домінує випромінювання ( $w = 1/3$ ) або матерія ( $w = 0$ ).
2. Для  $\Lambda$ CDM параметри  $\Omega_m \approx 0.315$ ,  $\Omega_\Lambda \approx 0.685$ . Поясніть, чому  $t_0$  більший, ніж у модельному випадку з  $w = 0$  при тому самому  $H_0$ .

**№ 1.4 Проблема плоскості в числах** Сьогодні  $|\Omega_k(t_0)| < 0.005$ . У радіаційно-домінантну епоху  $|\Omega_k(t) - 1| \propto a^2(t) \propto t$ .

1. Оцініть  $|\Omega_k - 1|$  на момент нуклеосинтезу ( $t_{\text{BBN}} \approx 1$  с), використовуючи  $t_0 \approx 13.8$  млрд років.

<sup>5</sup>До цього переліку іноді додають **проблему ентропії**: спостережуваний Всесвіт має колосальну ентропію  $S \sim 10^{88}$  — звідки вона взялась? Розігрів після інфляції дає природну відповідь: вся ентропія народжується при термалізації продуктів розпаду інфлатона.

2. Оцініть  $|\Omega_k - 1|$  на планківському часі ( $t_{\text{Pl}} \approx 5.4 \times 10^{-44}$  с).
3. Чому число  $10^{-60}$  (згадане в підрозділі 1.5) виникає природно? (Підказка:  $t_0/t_{\text{Pl}} \sim 10^{60}$ .)

**№ 1.5 Точка повороту кутової відстані** Дослідіть аналітично ефект максимуму кутової відстані («космологічного збільшувального скла»). Для спрощення розглянемо Всесвіт Ейнштейна-де-Сіттера (плоский,  $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ ).

1. Покажіть, що  $E(z) = (1+z)^{3/2}$ .
2. Знайдіть явний аналітичний вираз для  $d_C(z)$  та  $d_A(z)$ .
3. Визначте червоний зсув  $z_{\text{max}}$ , при якому  $d_A(z)$  досягає максимуму.
4. Обчисліть кутовий розмір  $\delta\theta$  галактики довжиною  $\ell = 10$  кпк, яка перебуває на  $z = z_{\text{max}}$  та на  $z = 4$ . Порівняйте їх та зробіть фізичний висновок.

**№ 1.6 Чисельне обчислення  $d_C(z)$  та фіт параметрів  $\Lambda$  CDM за даними ВАО**

У цій задачі вам пропонується самостійно реалізувати чисельний фіт космологічних параметрів за спостереженнями ВАО.

**Дані ВАО.** У таблиці 1.6 наведено вимірювання величини  $D_V(z)/r_s$  для різних червоних зсувів  $z$ , де  $D_V(z)$  — усереднена відстань:

$$D_V(z) = \left[ z d_C^2(z) \frac{c}{H(z)} \right]^{1/3},$$

а  $r_s = 147.09$  Мпк — звуковий горизонт (фіксовано за даними *Planck* 2018).

Спостережні дані ВАО: червоний зсув  $z$ , значення  $D_V/r_s$  та похибка  $\sigma$

| $z$   | $D_V/r_s$ | $\sigma$ |
|-------|-----------|----------|
| 0.106 | 3.047     | 0.137    |
| 0.150 | 4.480     | 0.168    |
| 0.320 | 8.467     | 0.167    |
| 0.570 | 13.773    | 0.134    |
| 0.440 | 11.550    | 0.400    |
| 0.600 | 14.940    | 0.420    |
| 0.730 | 16.850    | 0.600    |
| 1.520 | 26.130    | 0.580    |

#### Завдання.

1. Напишіть програму (мовами Python, Julia, C++ або іншою на ваш вибір), яка:

- визначає функцію  $E(z)$  та функцію для обчислення  $d_C(z)$  з використанням чисельного інтегрування (наприклад, метод Сімпсона, Гауса або вбудований інтегратор);
- обчислює теоретичне значення  $D_V(z)/r_s$  для заданих  $H_0$  та  $\Omega_m$ ;
- реалізує  $\chi^2$  функцію:

$$\chi^2(H_0, \Omega_m) = \sum_i \left( \frac{(D_V/r_s)_{\text{th}}(z_i) - (D_V/r_s)_{\text{obs},i}}{\sigma_i} \right)^2;$$

- знаходить мінімум  $\chi^2$  за допомогою методу сітки, градієнтного спуску або вбудованого оптимізатора (наприклад, `scipy.optimize.minimize`).

2. Знайдіть оптимальні значення  $H_0$  та  $\Omega_m$ , побудуйте графік  $D_V(z)/r_s$  (теорія разом з даними).
3. Обчисліть вік Всесвіту  $t_0$  для отриманих параметрів.
4. **Дослідження.** Змініть модель, дозволивши  $\Omega_k \neq 0$  (тобто  $\Omega_\Lambda$  і  $\Omega_m$  — вільні, а  $\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda - \Omega_r$ ). Чи покращується  $\chi^2$ ? Чи сумісне отримане  $\Omega_k$  з нулем?

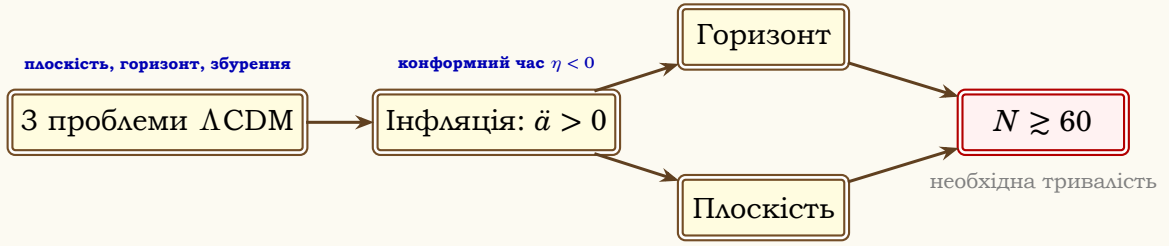
**Вказівки:**

- Швидкість світла  $c = 299792.458$  км/с.
- Пошук мінімуму можна почати з початкового наближення  $H_0 \approx 70$  км/с/Мпк,  $\Omega_m \approx 0.3$ .
- Для чисельного інтегрування можна використовувати метод Сімпсона або вбудовану функцію `quad` з `scipy.integrate` (Python), `quadgk` (Julia) або аналогічну.

## 2. Кінематика інфляції

У попередньому розділі ми сформулювали три фундаментальні проблеми стандартної космології: плоскості, горизонту і первинних збурень. Цей розділ показує, як усі три вирішуються *кінематично* — без залучення конкретної мікрофізичної моделі — якщо припустити, що до гарячої стадії Великого вибуху існувала коротка епоха прискореного розширення: **інфляція**. Мікрофізику — що саме рухає інфляцію — буде розглянуто в наступному розділі.

### Логічна карта розділу



### 2.1. Конформний час під час інфляції і горизонт Хаббла

Ключ до розуміння інфляції — конформний час  $\eta$ . Нагадаємо (§ 1.2): під час інфляції  $a(t) = a_i e^{H_{\text{Inf}} t}$  при  $H_{\text{Inf}} \approx \text{const}$ , тому:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{a_i e^{H_{\text{Inf}} t'}} = -\frac{1}{a(t) H_{\text{Inf}}} = -\frac{1}{\mathcal{H}}. \quad (2.1)$$

Вся інфляційна епоха відповідає  $\eta \in (-\infty, 0)$ , а конформний горизонт Хаббла:

$$\mathcal{H}^{-1} = \frac{1}{a H_{\text{Inf}}} = -\eta \quad (2.2)$$

*спадає* з часом — саме це є кінематичним визначенням інфляції. Фізично: масштаби виходять за горизонт швидше, ніж встигають обмінятися сигналами.

На рисунку 2.1 та в подальших викладках ми позначаємо  $\eta_{\text{Init}}$  конформний час у момент, коли найбільший спостережуваний сьогодні масштаб перетнув горизонт. Це скінченне число, яке і визначає  $\Delta\eta_{\text{Inf}}$ .

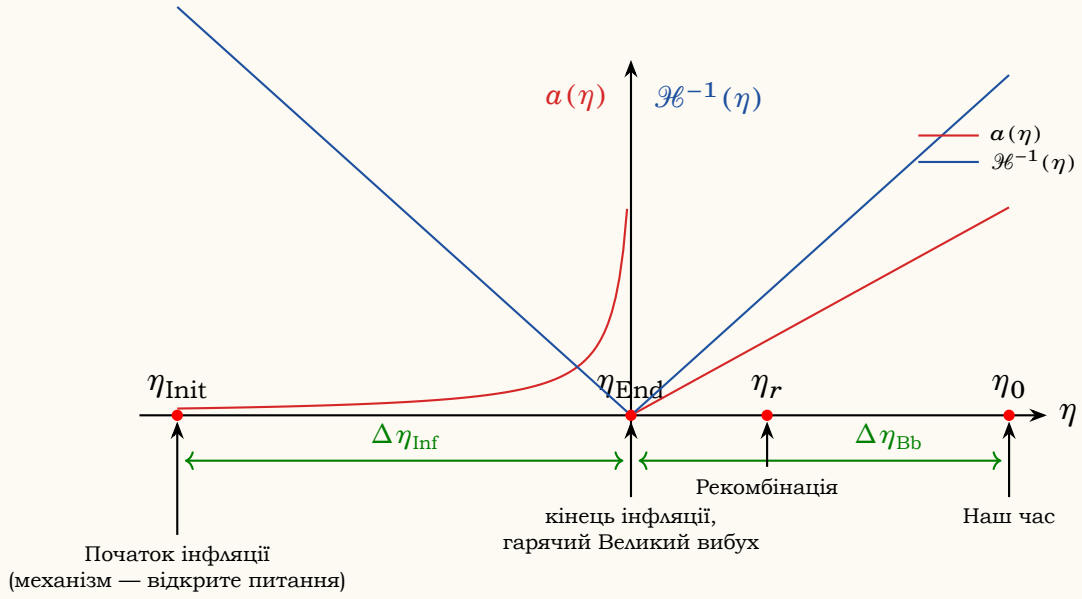
Введемо позначення для ключових моментів конформного часу (рис. 2.1):

$$\begin{aligned} \eta_{\text{Init}} &\rightarrow -\infty \\ \eta_{\text{End}} &= 0 \quad \text{— кінець інфляції} \\ \eta_r &> 0 \quad \text{— розігрів,} \\ \eta_0 &> \eta_r \quad \text{— сьогодні.} \end{aligned}$$

Конформні інтервали двох епох:

$$\Delta\eta_{\text{Inf}} \equiv \eta_{\text{End}} - \eta_{\text{Init}}, \quad \Delta\eta_{\text{Bb}} \equiv \eta_0 - \eta_{\text{End}}. \quad (2.3)$$





**Рис. 2.1:** Еволюція масштабного фактора  $a(\eta)$  (червона) та конформного горизонту Хаббла  $\mathcal{H}^{-1} = (aH)^{-1}$  (синя) у конформному часі. Вісь  $\eta$  проходить через  $\eta_{\text{End}}$ . Під час інфляції  $a$  зростає, але  $\mathcal{H}^{-1}$  спадає — масштаби виходять за горизонт і «замерзають». Після інфляції обидві величини зростають і заморожені масштаби повертаються в горизонт.

## 2.2. Проблема горизонту і умова її вирішення

**Нагадування проблеми.** СМВ є однорідним з точністю  $10^{-5}$  по всьому небу. Але в стандартній гарячій космології без інфляції ділянки неба, розділені більше ніж  $\sim 2^\circ$ , ніколи не перебували у причинному контакті: їхні горизонти частинок на момент реконбінації не перетиналися. Звідки тоді однакова температура?

**Розв'язання через конформний час.** Горизонт частинок — це максимальна відстань, з якої міг прийти сигнал від початку Всесвіту до моменту  $\eta$ :

$$l_H(\eta) = a(\eta) \int_{\eta_{\text{Init}}}^{\eta} d\eta' = a(\eta) (\eta - \eta_{\text{Init}}).$$

Розмір горизонту на кінці інфляції  $\eta_{\text{End}}$ , розтягнутий до сьогоденного розміру:

$$l_{H,\text{End}}(\eta_0) = a_0 (\eta_{\text{End}} - \eta_{\text{Init}}) = a_0 \Delta\eta_{\text{Inf}}. \quad (2.4)$$

Розмір нашої спостережуваної Всесвіту сьогодні:

$$l_{H,0} = a_0 (\eta_0 - \eta_{\text{End}}) = a_0 \Delta\eta_{\text{Bb}}. \quad (2.5)$$

Щоб весь спостережуваний Всесвіт поміщався всередині одного причинно-зв'язаного регіону з часів інфляції, потрібно:

$$l_{H,\text{End}}(\eta_0) \gg l_{H,0} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\eta_{\text{Inf}} \gg \Delta\eta_{\text{Bb}}. \quad (2.6)$$

Тобто конформний інтервал інфляції має бути набагато більшим за весь пост-інфляційний конформний час.

**Чи виконується умова (2.6)?** Обчислимо відношення. Для експоненціальної інфляції  $a(t) = a_i e^{H_{\text{Inf}} t}$ :

$$\Delta\eta_{\text{Inf}} = \int_{t_{\text{Init}}}^{t_{\text{End}}} \frac{dt}{a_i e^{H_{\text{Inf}} t}} = \frac{1}{H_{\text{Inf}} a_i} (e^{-H_{\text{Inf}} t_{\text{Init}}} - e^{-H_{\text{Inf}} t_{\text{End}}}) \approx \frac{1}{H_{\text{Inf}} a_{\text{Init}}},$$

де останній крок використовує те, що підінтегральна функція  $e^{-H_{\text{Inf}}t}$  спадає: внесок нижньої межі  $e^{-H_{\text{Inf}}t_{\text{Init}}}$  переважає над верхньою  $e^{-H_{\text{Inf}}t_{\text{End}}} = e^{-N}e^{-H_{\text{Inf}}t_{\text{Init}}} \ll e^{-H_{\text{Inf}}t_{\text{Init}}}$ . Пост-інфляційний інтервал оцінюється як  $\Delta\eta_{\text{Bb}} \sim 1/(a_0 H_0)$ . Тоді:

$$\frac{\Delta\eta_{\text{Inf}}}{\Delta\eta_{\text{Bb}}} \sim e^N \cdot \frac{a_0 H_0}{a_{\text{End}} H_{\text{Inf}}} \gg 1. \quad (2.7)$$

Щоб визначити необхідну тривалість інфляції ( $N \equiv \ln(a_{\text{End}}/a_{\text{Init}})$ ), врахуємо зв'язок масштабів через температуру. Використовуючи закон червоного зміщення ( $a \sim 1/T$ ), отримуємо  $\frac{a_{\text{End}}}{a_0} \sim \frac{T_0}{T_{\text{reh}}}$ . Підставляючи це в умову  $\frac{\Delta\eta_{\text{Inf}}}{\Delta\eta_{\text{Bb}}} \gg 1$ , маємо:

$$\frac{a_{\text{End}}}{a_{\text{Init}}} \gg \frac{T_0}{H_0} \cdot \frac{H_{\text{Inf}}}{T_{\text{reh}}}.$$

Логарифмуючи цей вираз, знаходимо нижню межу для кількості  $e$ -foldів:

$$N \gg \ln\left(\frac{T_0}{H_0}\right) + \ln\left(\frac{H_{\text{Inf}}}{T_{\text{reh}}}\right).$$

Щоб отримати числову оцінку, потрібно знати  $H_{\text{Inf}}$ . За порядком величини природно вважати, що максимально можливий масштаб інфляції — планківський:  $H_{\text{Inf}} \lesssim M_{\text{Pl}}$ . Це не сувора межа, а розумна верхня оцінка: якби  $H_{\text{Inf}}$  було набагато меншим, то й  $N$  було б більшим, що лише посилює виконання умов. Тому для оцінки мінімально необхідного  $N$  ми можемо взяти  $H_{\text{Inf}} \sim M_{\text{Pl}}$ .

Тоді:

$$N \gg 67 + \ln\left(\frac{M_{\text{Pl}}}{T_{\text{reh}}}\right).$$

Для типових значень  $T_{\text{reh}} \sim 10^{15}$  GeV маємо  $\ln(M_{\text{Pl}}/T_{\text{reh}}) \approx -4.6$ , звідки  $N \gg 62.4$ , тобто  $N \gtrsim 60$ .

#### Залежність від температури розігріву

Оцінка  $N$  чутливо залежить від  $T_{\text{reh}}$ :

- Високий розігрів ( $T_{\text{reh}} \sim 10^{15}$  GeV):  $\ln(M_{\text{Pl}}/T_{\text{reh}}) \approx -4.6$ ,  $N \gtrsim 62$ .
- Типовий діапазон ( $T_{\text{reh}} \sim 10^{13}$  GeV):  $\ln(M_{\text{Pl}}/T_{\text{reh}}) \approx -7.8$ ,  $N \gtrsim 59$ .
- Низький розігрів ( $T_{\text{reh}} \sim 10^3$  GeV):  $\ln(M_{\text{Pl}}/T_{\text{reh}}) \approx -34.5$ ,  $N \gtrsim 33$ .

Оскільки більшість реалістичних моделей тяжіють до високих масштабів енергій ( $10^{13}$ – $10^{15}$  GeV), у космології як стандартне базове значення приймають  $N \gtrsim 55$ – $65$ .

Таким чином, у природних сценаріях інфляції вимога  $N \gtrsim 60$  гарантовано вирішує проблему горизонту.

## 2.3. Проблема плоскості і мінімальна кількість $e$ -foldів

З розділу 1.5 нагадаємо, що під час інфляції ( $w \approx -1$ ) відхилення від плоскості спадає:

$$|\Omega_{\text{tot}} - 1| = \frac{k}{a^2 H^2} \propto e^{-2H_{\text{Inf}}t}.$$

Після  $N$   $e$ -foldів початкове відхилення  $|\Omega - 1|_i \sim 1$  пригнічується до:

$$|\Omega_{\text{tot}} - 1|_{\text{End}} \approx e^{-2N}.$$

Щоб сьогодні мати  $|\Omega_k| < 0.005$ , враховуючи, що після інфляції відхилення зростає як  $a^2$  (§ 1.5), отримуємо умову:

$$e^{-2N} \cdot \left( \frac{a_0}{a_{\text{End}}} \right)^2 \lesssim 0.005. \quad (2.8)$$

Підставляючи  $a_0/a_{\text{End}} = T_{\text{reh}}/T_0$  (із закону збереження ентропії  $a \propto 1/T$ ) і  $T_{\text{reh}} \sim 10^{15}$  GeV,  $T_0 \sim 10^{-4}$  eV, знаходимо:

$$\frac{a_0}{a_{\text{End}}} \sim \frac{10^{15} \text{ GeV}}{10^{-13} \text{ GeV}} = 10^{28} \approx e^{64},$$

тому умова (2.8) дає:

$$N \gtrsim 60. \quad (2.9)$$

## 2.4. Проблема первинних збурень

**Нагадування проблеми.** Модель  $\Lambda$ CDM приймає початковий спектр флуктуацій густини як феноменологічний вхідний параметр ( $A_s \approx 2.1 \times 10^{-9}$ ,  $n_s \approx 0.965$ ). Але «звідки» взяли ці флуктуації і чому спектр майже степеневий — стандартна космологія мовчить.

**Роль інфляції.** Кінематика інфляції створює необхідні умови для генерації збурень: експоненціальне розтягнення простору перетворює мікроскопічні квантові флуктуації в макроскопічні неоднорідності. Однак сам механізм народження збурень потребує залучення мікрофізики — квантової теорії поля інфлатона. Це буде детально розглянуто в розділі 5. Тут лише зазначимо, що інфляція не лише вирішує проблеми горизонту і плоскості, а й забезпечує природне походження первинних неоднорідностей — головне джерело великомасштабної структури Всесвіту.

## 2.5. Місток: від кінематики до мікрофізики

Ми встановили, що інфляція *кінематично* вирішує проблеми горизонту і плоскості за умови  $N \gtrsim 60$ , а також створює умови для генерації первинних збурень. Але залишається відкритим питання: *що* фізично рухає інфляцію?

Прискорене розширення  $\ddot{a} > 0$  вимагає (з другого рівняння Фрідмана (1.36)):

$$\rho + \frac{3p}{c^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad w < -\frac{1}{3}.$$

Жодна відома форма звичайної матерії не задовольняє цю умову. Тому вводять **інфлатон** — скалярне поле  $\phi$  з потенціалом  $V(\phi)$ , яке при повільному скоченні вздовж пологого схилу забезпечує  $w \approx -1$ . Динаміці інфлатона присвячений наступний розділ.

Інфляція — це кінематичний механізм, який при  $N \gtrsim 60$ :

1. розв'язує проблему горизонту ( $\Delta\eta_{\text{Inf}} \gg \Delta\eta_{\text{Bb}}$ ),
2. розв'язує проблему плоскості (експоненціальне пригнічення  $\Omega_k$ ),
3. створює умови для генерації первинних збурень.

Мікрофізична реалізація вимагає скалярного поля — інфлатона.

## Задачі

**№ 2.1 Конформний час під час інфляції** Показати, що для де-Сіттерівського розширення  $a(\eta) = -1/(H_{\text{inf}}\eta)$  при  $\eta \in (-\infty, 0)$ . Перевірити, що  $\mathcal{H} = aH_{\text{inf}} = -1/\eta$ .

*Вказівка:* підставте  $a(t) = a_i e^{H_{\text{inf}} t}$  у визначення конформного часу  $d\eta = dt/a(t)$  і проінтегруйте. Нормування обрати так, щоб  $\eta \rightarrow 0^-$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

*Відповідь:*  $\eta = -\frac{1}{a(t)H_{\text{inf}}}$ , звідки  $a(\eta) = -\frac{1}{H_{\text{inf}}\eta}$  і  $\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a} = -\frac{1}{\eta} = aH_{\text{inf}}$ .

**№ 2.2 Мінімальна кількість  $e$ -foldів** Оцінити мінімальне  $N$  з умови, що горизонт частинок на кінці інфляції, розтягнутий до сьогодні, перевищує розмір спостережуваного Всесвіту  $c/H_0$ . Використати  $T_{\text{rh}} \sim 10^{15}$  GeV і  $T_0 \sim 10^{-4}$  eV.

**№ 2.3 Проблема горизонту без інфляції** Оцінити кут на небі, що відповідає горизонту частинок на момент рекомбінації ( $z_* \approx 1100$ ) у стандартній космології без інфляції. Порівняти з кутовим розміром однорідної ділянки СМВ.

*Вказівка:* фізичний розмір горизонту на рекомбінації  $l_H(z_*) \approx c/H(z_*)$ , де  $H(z_*) \approx H_0 \Omega_m^{1/2} (1+z_*)^{3/2}$ . Кутовий розмір — це  $\theta \approx l_H(z_*)/d_A(z_*)$ , де  $d_A(z_*) \approx c/H_0 \cdot 2/(1+z_*)^{1/2}$ .

*Відповідь:*  $\theta \approx \Omega_m^{1/2}/(1+z_*)^{1/2} \approx 1.7^\circ$  — саме стільки охоплює один причинно-зв'язаний патч на карті СМВ. Оскільки таких патчів  $\sim (180^\circ/1.7^\circ)^2 \sim 10^4$ , виникає питання: чому всі вони мають однакову температуру?

**№ 2.4 Об'єднана умова на  $N$  з плоскості** Використовуючи вирази для еволюції  $|\Omega_{\text{tot}} - 1|$  під час інфляції ( $\propto e^{-2N}$ ) та після ( $\propto a^2$ ), отримайте умову на  $N$  з вимоги  $|\Omega_k(t_0)| < 0.005$ . Оцініть мінімальне  $N$  для  $T_{\text{reh}} = 10^{15}$  GeV та  $T_{\text{reh}} = 10^3$  GeV. *Відповідь:*  $N \gtrsim 60$  для високого розігріву,  $N \gtrsim 30$  для низького.

### 3. Інфлатон і його потенціал

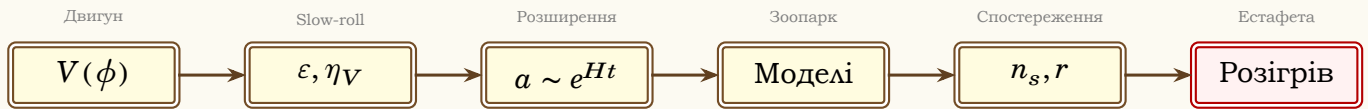
У попередньому розділі ми встановили, що інфляція — епоха прискореного розширення з  $N \gtrsim 60$   $e$ -folds — *кінематично* вирішує проблеми горизонту і плоскості. Але залишилось відкритим головне питання: *що фізично рухає це розширення?*

З другого рівняння Фрідмана (1.36) відомо, що умова  $\ddot{a} > 0$  вимагає речовини з рівнянням стану  $w < -1/3$  (§ 2.5). Жодна відома форма матерії — ні газ, ні випромінювання, ні темна матерія — цього не задовольняє: всі вони мають  $w \geq 0$ .

Вихід пропонує квантова теорія поля. У сучасній фізиці фундаментальні взаємодії описуються не частинками, а *полями* — величинами, що задані в кожній точці простору-часу. Електромагнітне поле, поле Хіггса, кваркові поля — це все приклади. Найпростіший тип — *скалярне поле*  $\phi(\mathbf{x}, t)$ : в кожній точці одне число, без напрямку (на відміну від векторного електричного поля).

Виявляється, скалярне поле з певним потенціалом  $V(\phi)$  здатне мати  $w \approx -1$  — якщо воно повільно еволюціонує вздовж пологого схилу  $V(\phi)$ . Таке гіпотетичне поле називають **інфлатоном**. Його динаміці і присвячений цей розділ.

#### Логічна карта розділу



**Крок 1:**  $V(\phi)$  — **двигун інфляції**. Скалярне поле інфлатона  $\phi$  із потенціалом  $V(\phi)$  — найпростіший механізм, здатний забезпечити від’ємний тиск  $p \approx -\rho$ . Ключова умова: поле має повільно «котитися» по пологому схилу, щоб кінетична енергія залишалася малою ( $\dot{\phi}^2 \ll V$ ). Форма потенціалу — головна невідомість теорії.

**Крок 2:**  $\epsilon, \eta_V$  — **параметри повільного кочення**. Два безрозмірних числа повністю контролюють динаміку:  $\epsilon \equiv -\dot{H}/H^2 < 1$  гарантує прискорення,  $|\eta_V| \ll 1$  гарантує тривалість. Обидва виражаються через похідні потенціалу — тому форма  $V(\phi)$  прямо визначає спостережувані наслідки.

**Крок 3:**  $a(t) \sim e^{Ht}$  — **розв’язання проблем**. У режимі slow-roll  $H \approx \text{const}$  і простір розширюється експоненційно. За  $N \sim 50\text{--}60$   $e$ -folds кривина розгладжується, горизонтна проблема знімається. Але головне — народжуються квантові флуктуації.

**Крок 4:** **зоопарк моделей**. Існує понад 100 конкурентних моделей інфляції. Ми розглянемо три ключові: хаотичну інфляцію Лінде ( $V \propto \phi^2$ , виключена), модель Старобінського ( $R^2$ -гравітація, «золотий стандарт») і моделі зі зламаним спектром (мотивовані JWST).

**Крок 5:**  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  — **міст до спостережень**. Форма потенціалу на вузькій ділянці ( $\sim 7\text{--}8$   $e$ -folds із  $50\text{--}60$ ) кодується у первинному спектрі потужності через два числа: спектральний індекс  $n_s$  і тензорно-скалярне відношення  $r$ . Саме їх вимірює Planck — і саме вони відсівають або підтверджують моделі.

**Крок 6: розігрів — передача естафети.** Коли поле досягає мінімуму  $V(\phi)$ , воно починає осцилювати і розпадатися на частинки Стандартної моделі. Квантовий вакуум перетворюється на гарячу плазму — і починається термічна історія Всесвіту, описана в наступних розділах.

### 3.1. Механізм та рівняння динаміки інфлатона

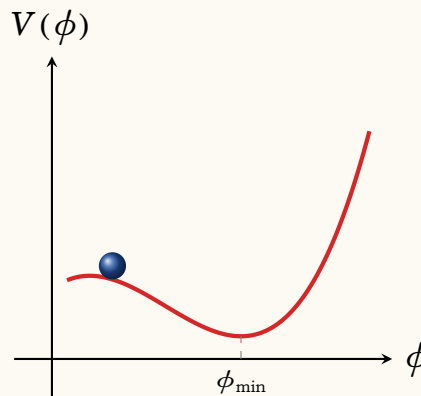
#### Як народилася ідея інфлатона: від фазових переходів до *slow-roll*

Алан Гут прийшов до інфляції у 1980–1981 роках не через проблему пласкості як таку, а через фізику *фазових переходів* у теоріях Великого об'єднання (GUT). При температурі  $T \sim 10^{15}$  ГеВ симетрія GUT розбивається: хігсівське поле теорії «вибирає» мінімум потенціалу, як вода замерзає в лід. Якщо цей перехід є переходом *першого роду* — через нуклеацію бульбашок істинного вакууму в морі хибного — то хибний вакуум має від'ємний тиск  $p = -\rho$  і ненульову густину енергії, яка не розбавляється розширенням. Це і є рівняння стану  $w = -1$ , що забезпечує  $\ddot{a} > 0$ . Гут назвав це *репульсивною гравітацією хибного вакууму* [8].

Однак у тій самій статті він відкрито визнав фундаментальну ваду власної моделі — **проблему виходу** (*graceful exit problem*): бульбашки істинного вакууму нуклеюють і розширюються зі швидкістю світла, але простір між ними розширюється швидше — експоненційно. Бульбашки ніколи не встигають злитися в однорідний гарячий Всесвіт. Результат — катастрофічно неоднорідна картина, протилежна до спостережуваної.

Розв'язок прийшов у 1982 році незалежно від Лінде [6] та Олбрехта з Стейнхардтом [7]: якщо відмовитися від тунелювання через бар'єр і замінити його *повільним коченням поля по пологому плато* — перехід другого роду — то поле природно досягає мінімуму, осцилює і розігріває Всесвіт. Проблема виходу знімається автоматично. Саме ця ідея — *slow-roll* — і є предметом цього розділу.

Найпростішою реалізацією такого механізму в теорії поля є однопольова модель, де прискорене розширення забезпечується однорідним скалярним полем *інфлатоном*  $\phi(t)$ , яке повільно «котиться» вздовж пологого потенціалу  $V(\phi)$  (див. рис. 3.1). Фізичну аналогію можна провести з рухом важкої кульки по пологому схилу за наявності сильного в'язкого тертя: кулька рухається повільно і рівномірно, не набираючи кінетичної енергії. Завдяки просторовій однорідності фону, на цьому етапі просторовими градієнтами поля можна знехтувати.



**Рис. 3.1:** Схематичне зображення повільного скочування (*slow-roll*) інфлатонного поля  $\phi$  у потенціалі  $V(\phi)$  до мінімуму  $\phi_{\min}$ .

Дія для скалярного поля  $\phi$  у просторі FLRW:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (3.1)$$



Для однорідного поля  $\phi(t)$  маємо  $\sqrt{-g} = a^3$  і  $g^{00} = -1$ , тому підінтегральний вираз зводиться до:

$$\mathcal{L} = a^3 \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right].$$

Рівняння Ейлера–Лагранжа  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$  дають:

$$\frac{d}{dt} (a^3 \dot{\phi}) + a^3 V'(\phi) = 0,$$

що після ділення на  $a^3$  зводиться до<sup>1</sup>:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (3.2)$$

де  $3H\dot{\phi}$  виникає з диференціювання  $a^3$ :  $\frac{d}{dt} (a^3 \dot{\phi}) = a^3 (\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi})$  — це і є те саме «хабблівське тертя», яке фізично відіграє роль в'язкого опору у аналогії з кулькою на схилі<sup>2</sup>.

### 3.2. Динаміка повільного кочення (slow-roll) та де-Сіттерівський розв'язок

Варіюючи дію (3.1) за метрикою, отримуємо тензор енергії-імпульсу скалярного поля. Для однорідного інфлатона  $\phi(t)$  він набуває вигляду тензора ідеальної рідини з густиною енергії  $\bar{\rho}_\phi$  та тиском  $\bar{p}_\phi$ :

$$\bar{\rho}_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad \bar{p}_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.3)$$

Щоб зрозуміти, за яких умов така система здатна забезпечити інфляцію, звернемося до її фундаментального визначення: інфляція — це епоха прискореного розширення Всесвіту, тобто  $\ddot{a} > 0$ . Знайдемо зв'язок цієї умови зі зміною параметра Хаббла  $H \equiv \dot{a}/a$ . Пряме диференціювання за часом дає:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} = H^2 \left( 1 - \left[ -\frac{\dot{H}}{H^2} \right] \right) = H^2 (1 - \epsilon).$$

Звідси видно, що умова прискорення  $\ddot{a} > 0$  виконується тоді й лише тоді, коли безрозмірна величина:

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (3.4)$$

є меншою за одиницю.

Цей параметр  $\epsilon$  має глибокий фізичний зміст: він характеризує дробову зміну параметра Хаббла за один  $e$ -fold розширення ( $dN = Hdt$ ), тобто  $\epsilon = -d \ln H / dN$ .

<sup>1</sup>Це рівняння є не чим іншим, як коваріантним рівнянням Кляйна–Гордона–Фока  $(\square + m^2)\phi = 0$  для вільного поля (або з урахуванням самодії через потенціал  $V'(\phi)$ ), записаним у FRLW-метриці для однорідного скалярного поля  $\phi(t)$ .

<sup>2</sup>У цьому та наступних розділах штрих у виразах типу  $V'(\phi)$  завжди означає похідну за скалярним полем  $\phi$ , тобто  $V' \equiv dV/d\phi$ . Це відрізняється від § 1, де штрих позначав похідну за конформним часом  $\eta$ .

Введемо також другий безрозмірний параметр  $\eta_H$ , який вимірює відносну швидкість зміни (прискорення) самого скалярного поля:

$$\eta_H \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}. \quad (3.5)$$

Зв'яжемо кінематичні характеристики (3.4) та (3.5) з енергетичними компонентами поля (3.3). Запишемо перше рівняння Фрідмана (1.3а), використовуючи редуковану масу Планка  $M_{\text{Pl}} \equiv (8\pi G)^{-1/2}$ , а також рівняння неперервності ( $\dot{\rho}_\phi + 3H(\bar{\rho}_\phi + \bar{p}_\phi) = 0$ ):

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right), \quad (3.6)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2} (\bar{\rho}_\phi + \bar{p}_\phi) = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{\text{Pl}}^2}. \quad (3.7)$$

Підставляючи вираз для  $\dot{H}$  (3.7) в означення параметра  $\epsilon$ , ми отримуємо його кінематичний вираз через динамічні характеристики поля. Щоб наочно розкрити його фізичний зміст, виразимо цей параметр явно через енергетичні компоненти інфлатона — кінетичну густину енергії  $K_\phi \equiv \dot{\phi}^2/2$  та повну густину енергії  $\bar{\rho}_\phi = 3H^2M_{\text{Pl}}^2$ :

$$\epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2M_{\text{Pl}}^2} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{3H^2M_{\text{Pl}}^2} = 3 \frac{K_\phi}{\bar{\rho}_\phi}. \quad (3.8)$$

Тепер логіка стає абсолютно прозорою: оскільки за визначенням  $\bar{\rho}_\phi = K_\phi + V(\phi)$ , вимога повільного кочення  $\epsilon \ll 1$  (що гарантує тривалу інфляцію) фізично означає, що кінетична енергія поля становить лише малу частку від повної густини енергії, тобто є нехтовно малою порівняно з потенціалом:  $K_\phi \ll V(\phi)$ .

У цьому режимі, який називають *наближенням повільного кочення* (slow-roll), динаміка системи радикально спрощується:

$$H^2 \approx \frac{V(\phi)}{3M_{\text{Pl}}^2}, \quad w_\phi = \frac{\bar{p}_\phi}{\bar{\rho}_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2/2 - V}{\dot{\phi}^2/2 + V} \approx -1. \quad (3.9)$$

Оскільки кінетична енергія мала, густина енергії залишається практично сталою протягом багатьох актів розширення:  $\bar{\rho}_\phi \approx V(\phi) \approx \text{const}$ . Тоді з першого рівняння Фрідмана випливає, що параметр Хаббла також є квазісталім ( $H \approx \text{const}$ ), а масштабний фактор демонструє експоненційне (де-Сіттерівське) зростання:

$$a(t) = a_0 e^{Ht}. \quad (3.10)$$

Саме цей режим розв'язує класичні космологічні проблеми: за  $N \equiv \int H dt \sim 50\text{--}60$  *e-folds* будь-яка початкова просторова кривина розгладжується експоненціально, а причинно пов'язана область розростається до масштабів, що значно перевищують наш сучасний спостережуваний горизонт.

Для підтримання такого режиму поле має котитися плавно (без суттєвого прискорення), тому, з умови  $|\eta_H| \ll 1$  випливає, що сили інерції у рівнянні Кляйна-Гордона-Фока є малими порівняно з гравітаційним тертям ( $|\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|$ ).

Рівняння руху поля (3.2) втрачає другий рядок і зводиться до системи першого порядку (динамічного атрактора):

$$3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi). \quad (3.11)$$

Завдяки атрактору (3.11), ми можемо виразити параметри slow-roll виключно через локальну геометричну форму самого потенціалу  $V(\phi)$  та його похідні. Зручно ввести безрозмірні *потенціальні параметри повільного кочення*:

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_V \equiv M_{\text{Pl}}^2 \frac{V''}{V}. \quad (3.12)$$

У наближенні повільного кочення вони пов'язані з кінематичними параметрами  $\epsilon$  та  $\eta_H$  (означеними в (3.4)–(3.5)) як:

$$\epsilon \approx \epsilon_V, \quad \eta_H \approx \epsilon_V - \frac{1}{2}\eta_V. \quad (3.13)$$

Доведемо тотожність для  $\epsilon_V$ , підставивши швидкість на атракторі (3.11) у вираз (3.8):

$$\epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2 M_{\text{Pl}}^2} \approx \frac{(-V'/3H)^2}{2H^2 M_{\text{Pl}}^2} = \frac{(V')^2}{18H^4 M_{\text{Pl}}^2}.$$

Враховуючи slow-roll значення параметра Хаббла  $H^2 \approx V/(3M_{\text{Pl}}^2)$ , остаточно маємо:

$$\epsilon \approx \frac{(V')^2}{18M_{\text{Pl}}^2} \left( \frac{3M_{\text{Pl}}^2}{V} \right)^2 = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \equiv \epsilon_V.$$

Таким чином, для існування інфляції потенціал скалярного поля має бути достатньо пологим ( $\epsilon_V < 1$ , що забезпечує прискорене розширення  $\ddot{a} > 0$ ), а для її тривалості — надзвичайно пологим ( $\epsilon_V \ll 1$  та  $|\eta_V| \ll 1$ ).

Інфляція невідворотно завершується, коли поле виходить на крутий схил потенціалу, де виконується умова  $\epsilon(\phi_{\text{end}}) = 1$  (поширена помилка — вважати, що це відбувається в мінімумі; насправді  $\epsilon = 1$  відповідає рівності  $K_\phi = \frac{1}{2}V$ , що реалізується ще на схилі).

У цій точці прискорене розширення простору миттєво припиняється ( $\ddot{a} = 0$ ), проте саме скалярне поле, набувши колосальної швидкості, не зупиняється: за інерцією воно мчить далі вниз по схилу, проскакує мінімум потенціалу  $V(\phi)$  і піднімається по протилежному схилу, де на мить завмирає й починає рух у зворотному напрямку.

Внаслідок дії хаббловського тертя  $3H\dot{\phi}$ , яке відіграє роль в'язкого опору середовища, амплітуда цього руху стрімко згасає, і поле переходить у режим високочастотних когерентних коливань навколо мінімуму.

Кількісним критерієм «високочастотності» на цьому етапі є виконання строгої нерівності:

$$\omega \approx m_\phi \gg H,$$

де  $\omega = \sqrt{V''(\phi_{\text{min}})} \equiv m_\phi$  — власна частота коливань поля (яка визначається кривиною потенціалу в мінімумі й тотожна масі квантів інфлатона), а  $H$  — параметр Хаббла. Оскільки хабблівський час  $\tau_H \sim H^{-1}$  задає характерний масштаб розширення простору, виконання умови  $m_\phi \gg H$  означає, що за один такий такт Всесвіту поле встигає здійснити тисячі або мільйони повних коливань

( $\tau_{\text{osc}} \ll \tau_H$ ). На тлі динаміки метрики ці осциляції є надзвичайно швидкими, що дозволяє усереднювати рівняння стану поля за період коливань. Саме цей коливальний етап запускає процес генерації матерії, який ми детально розглянемо у розділі 6.

### 3.3. Хаотична інфляція Лінде

Лінде [9] запропонував радикально простий погляд на початкові умови: значення  $\phi$  у різних точках раннього Всесвіту є хаотичним — немає потреби в особливому «стартовому» стані. Найпростіший потенціал:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Де  $\phi$  велике і  $\epsilon \ll 1$  — там інфляція іде довго і виникає величезна причинно зв'язана «бульбашка». Де  $\phi$  мале — інфляція швидко завершується. Наш спостережуваний Всесвіт — одна з таких бульбашок.

**Структура всередині однієї бульбашки.** Коли інфляція в нашій бульбашці завершилась, простір всередині неї вже був практично однорідним — розширення загладило всі початкові неоднорідності  $\phi$ . Але «практично» не означає «абсолютно»: залишились крихітні квантові флуктуації, заморожені під час інфляції. Саме вони стали насінням галактик і є тим, що ми бачимо на карті СМВ.

Всередині однієї бульбашки існує єдиний причинно зв'язаний простір-час — один Всесвіт. Але його розмір після  $N \sim 60$   $e$ -folds становить  $\sim e^{60}$  разів більше за наш спостережуваний горизонт ( $\sim 46$  Гпк). Тому навіть у межах «нашої бульбашки» існують області, з якими ми ніколи не матимемо причинного контакту — вони назавжди за нашим горизонтом подій.

**Між бульбашками.** Простір між різними бульбашками продовжує розширюватись інфляційно — швидше за світло. Дві бульбашки, що утворились незалежно, розділені областю вічної інфляції і принципово не можуть обмінятися сигналом. Це не просто «дуже далеко» — між ними немає спільного майбутнього світлового конуса. У строгому сенсі загальної теорії відносності вони належать різним причинно відокремленим регіонам одного глобального простору-часу, а не різним «всесвітам» — хоча в популярній літературі їх так і називають.

**Вічна інфляція.** Квантові флуктуації інфлатона на суперхабблових масштабах можуть локально збільшити  $\phi$ , повернувши його назад на схил, якщо флуктуація достатньо велика. Класичний зсув поля за один  $e$ -fold:  $|\delta\phi_{\text{class}}| \sim |\dot{\phi}|/H \approx \sqrt{2\epsilon} M_{\text{Pl}}$ . Квантова флуктуація за той самий час:  $\delta\phi_{\text{quant}} \sim H/(2\pi)$ . Умова «само-відтворення» — квантова флуктуація перевищує класичне зміщення:

$$\frac{H}{2\pi} \gtrsim \sqrt{2\epsilon} M_{\text{Pl}}.$$

Для типових моделей  $\epsilon \lesssim 1$ , тому достатньою умовою є  $H^2 \gtrsim M_{\text{Pl}}^2$ , що за допомогою  $H^2 \approx V/(3M_{\text{Pl}}^2)$  дає

$$V(\phi) \gtrsim 3M_{\text{Pl}}^4.$$

У таких областях інфляція ніколи не зупиняється глобально: поки одна бульбашка завершує інфляцію і термалізується, сусідні регіони продовжують розширюватись, породжуючи нові бульбашки. Це **вічна інфляція** — мультивсесвіт як математичний наслідок, а не постулат.

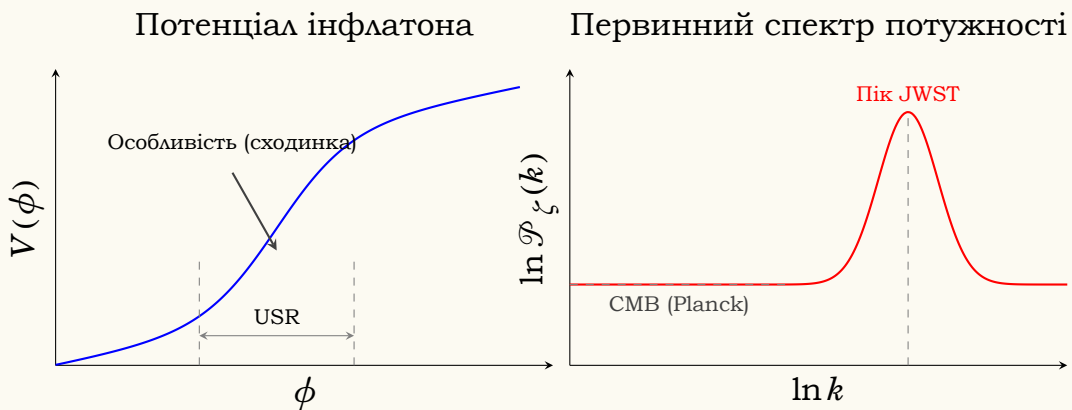
Строгий теоретичний опис цього динамічного режиму забезпечується стохастичним підходом Старобінського [10]. У цій формалізації квантові флуктуації

короткохвильових мод розглядаються як випадкове джерело (білий шум), що діє на класичну довгохвильову координату поля. Еволюція інфлатона набуває вигляду стохастичного рівняння Ланжевена, де класичний дрейф по схилу потенціалу конкурує з квантовою дифузєю. Коли поле перебуває поблизу планківської межі, дифузійний внесок повністю домінує, що призводить до квантового блукання поля вгору по потенціалу і робить процес генерації нових областей простору просторово нескінченним.

**Статус.** Потенціал  $\frac{1}{2}m^2\phi^2$  передбачає  $r \approx 8/N \approx 0.13$  — вище поточної межі BICEP/Keck ( $r < 0.036$ , див. додаток А), тому ця конкретна модель виключена. Але ідея хаотичних початкових умов і вічної інфляції залишається живою у більш пологих потенціалах. Сучасним переосмисленням парадигми Лінде є клас моделей  $\alpha$ -аттракторів [11, 12] та інфляція з немінимальним зв'язком інфлатона з кривиною простору-часу. У цих сценаріях при великих значеннях поля потенціал природно виходить на асимптотичне плато, що дозволяє зберегти концепцію хаотичного старту високої енергії, але радикально знижує амплітуду тензорних збуджень  $r$ , повністю узгоджуючи теорію з останніми даними Planck та BICEP/Keck.

Разом з тим жодна з «успішних» моделей — тих, що проходять обмеження Planck на  $n_s$  і  $r$  — не передбачає нічого особливого на малих масштабах  $k \gtrsim 1 h/\text{Мпк}$ . Саме там первинний спектр залишається практично необмеженим спостереженнями. І саме там у 2022–2023 роках телескоп JWST зафіксував надлишок масивних галактик при  $z \sim 10\text{--}12$ : об'єктів, які за стандартним плоским спектром просто не встигли б вирости за відведений час [13, 14].

Природне пояснення — локальне підсилення первинного спектра саме на цих масштабах. Якщо потенціал інфлатона має особливість (сходінку або ділянку ультра-повільного кочення) у потрібному місці, флуктуації, що виходять за горизонт в цей момент, зазнають різкого підсилення — формується *зламаний спектр потужності* (рис. 3.2). Чи здатна ця ідея витримати зіставлення з повним масивом даних Planck і JWST — саме це є предметом наступного розділу.



**Рис. 3.2:** Схематичне зображення механізму генерації зламаного спектра. Ліворуч: потенціал інфлатона з короткою ділянкою ультра-повільного кочення (USR — ultra-slow roll), де класична швидкість поля падає. Праворуч: відповідний спектр потужності кривини  $\mathcal{P}_\zeta(k)$ , що зберігає масштабну інваріантність на масштабах CMB, але має локальний надлишок амплітуди на високих хвильових числах.



### 3.4. Форма потенціалу та обмеження спостережень

Спостереження СМВ дають нам інформацію не про весь потенціал  $V(\phi)$ , а лише про надзвичайно вузький його проміжок. Масштаби, зафіксовані на картах анізотропії Planck, виходили за горизонт протягом  $\sim 7-8$   $e$ -folds із загальних 50–60. Іншими словами, кожне кутове масштабне відхилення температури СМВ відповідає певному значенню  $\phi$  під час інфляції, і вся ця «пам'ять» закодована лише у вузькій ділянці потенціалу — тій, що залишила слід на кутовому спектрі анізотропій (див. рис. 8.2).

Сьогодні існує понад 100 конкурентних моделей інфляції. Більшість із них дають практично однаковий фіт для великих кутових масштабів, де Planck найточніший. Різниця між моделями виявляється на малих масштабах ( $k \gg 1 \text{ Мpc}^{-1}$ ), де поточні спостереження мають значно слабші обмеження.

Таблиця 3.1 порівнює передбачення найпопулярніших класів моделей для двох вимірюваних параметрів —  $n_s$  і  $r$  — з поточними обмеженнями Planck 2018 [3] + BICEP/Keck [15].

**Таблиця 3.1:** Передбачення основних класів інфляційних моделей. Значення наведені для  $N = 50-60$   $e$ -folds до кінця інфляції. Спостережувані межі:  $n_s = 0.9649 \pm 0.0042$ ,  $r < 0.036$  [3, 15].

| Модель                                | Потенціал<br>$V(\phi)$  | $n_s$                              | $r$              | Статус                                |
|---------------------------------------|-------------------------|------------------------------------|------------------|---------------------------------------|
| Старобінський плато<br>( $R^2$ ) [16] |                         | $1 - \frac{2}{N}$                  | $\frac{12}{N^2}$ | узгоджується<br>(детально —<br>§ 3.5) |
| Хіггсова ін-<br>фляція [17]           | плато<br>(нем. зв'язок) | $\approx 0.965$                    | $\approx 0.004$  | узгоджується                          |
| Natural<br>inflation [18]             | $1 - \cos(\phi/f)$      | $\approx 0.95-0.97$                | $0.01-0.1$       | під питанням                          |
| Хаотична, $\phi^2$<br>[9]             | $\frac{1}{2}m^2\phi^2$  | $1 - \frac{2}{N}$                  | $\frac{8}{N}$    | виключена<br>( $r \sim 0.13$ )        |
| Хаотична,<br>$\phi^{4/3}$ [9]         | $\lambda\phi^{4/3}$     | $1 - \frac{5}{3N}$                 | $\frac{16}{3N}$  | під питанням                          |
| Зі сходиною                           | плато + $\delta V$      | залежить від<br>$k_{\text{break}}$ | мале             | перевіряється                         |

Серед усіх моделей таблиці 3.1 модель Старобінського займає особливе місце — вона не просто «узгоджується», а потрапляє в самий центр довірчої області Planck. Більш того, вона побудована без введення нового поля «руками» — лише через модифікацію геометричної частини дії. Розберемо цей механізм детально.

### 3.5. Модель Старобінського та $f(R)$ гравітація

Історично перша модель інфляції, запропонована О. Старобінським у 1980 році [16], базується не на введенні нового скалярного поля «руками», а на модифікації самої геометричної частини дії Айнштейна–Гільберта.



## Що таке $f(R)$ гравітація?

### Пропедевтика

Стандартна ЗТВ будується на принципі найменшої дії з дією Айнштайна–Гільберта:

$$S_{\text{EH}} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R,$$

де  $R$  — скалярна кривизна Річчі. Ця дія *лінійна* по  $R$ . Природне узагальнення — замінити  $R$  на довільну функцію  $f(R)$ :

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R).$$

Запитання: чи це справді «нова» теорія гравітації, чи просто ЗТВ із прихованим скалярним полем?

Відповідь дає фундаментальна теорема про конформну еквівалентність.

## Теорема: $f(R) \leftrightarrow \text{ЗТВ} + \text{скалярне поле}$

### Теорема (конформна еквівалентність)

Будь-яка  $f(R)$ -теорія гравітації з  $f''(R) \neq 0$  у *йорданівському фреймі* (Jordan frame) математично еквівалентна стандартній ЗТВ з масивним скалярним полем  $\phi$  у *айнштайнівському фреймі* (Einstein frame).

### Виведення (покрокове).

*Крок 1. Введення допоміжного поля.* Запишемо  $f(R)$ -дію через допоміжне поле  $\chi$ :

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + f'(\chi)(R - \chi)]. \quad (3.14)$$

Рівняння руху для  $\chi$ : варіювання за  $\chi$  дає  $f''(\chi)(R - \chi) = 0$ . За умови  $f''(\chi) \neq 0$  це означає  $\chi = R$  — тобто дія (3.14) точно відтворює вихідну  $f(R)$ -теорію.

*Крок 2. Перейменування та структура.* Введемо скалярне поле  $\varphi \equiv f'(\chi) = f'(R)$ . Тоді дію (3.14) можна переписати як:

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\varphi R - U(\varphi)], \quad U(\varphi) \equiv \chi(\varphi) \varphi - f(\chi(\varphi)). \quad (3.15)$$

Це скалярно-тензорна теорія Бранса–Дікке з  $\omega_{\text{BD}} = 0$  у *йорданівському фреймі*: поле  $\varphi$  нелінійно зачеплене з кривизною через доданок  $\varphi R$ .

### Що таке фрейми?

*Йорданівський фрейм* — «фізичний» фрейм, у якому частинки матерії рухаються геодезичними метрики  $g_{\mu\nu}$ , а скалярне поле зачеплене з кривизною. *Айнштайнівський фрейм* — фрейм, у якому гравітаційна частина дії має стандартний вигляд Айнштайна–Гільберта з  $M_{\text{Pl}}^2 R/2$ , але скалярне поле з'являється явно з кінетичним членом. Перехід між фреймами — це конформне перетворення метрики  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\varphi) g_{\mu\nu}$ , яке є *математичною* перетворенням, а не фізичним перетворенням.

Крок 3. Конформне перетворення до айнштайнівського фрейму. Виконаємо конформне перетворення метрики:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \varphi g_{\mu\nu}, \quad \sqrt{-\tilde{g}} = \varphi^2 \sqrt{-g}, \quad \tilde{R} = \frac{1}{\varphi} \left( R - \frac{3\Box\varphi}{\varphi} + \frac{3(\partial\varphi)^2}{2\varphi^2} \right). \quad (3.16)$$

Після підстановки та інтегрування частинами дія (3.15) набуває канонічного вигляду в айнштайнівському фреймі:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (3.17)$$

де канонічне скалярне поле  $\phi$  і його потенціал  $V(\phi)$  визначаються через:

$$\phi \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} M_{\text{Pl}} \ln \varphi = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{\text{Pl}} \ln f'(R), \quad V(\phi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \frac{\chi f'(\chi) - f(\chi)}{[f'(\chi)]^2}. \quad (3.18)$$

#### Фізичний зміст

Доданок  $R^2$  у дії — це не просто «виправлення»: він є кінетичним членом для нового ступеня вільності.  $f(R)$ -гравітація має на один ступінь вільності більше ніж ЗТВ саме через те, що  $f''(R) \neq 0$ : четвертий порядок рівнянь поля розщеплюється на другий порядок для метрики і другий порядок для скалярона  $\phi$ . При  $f''(R) = 0$  (тобто  $f(R) = R$ ) — звичайна ЗТВ, новий ступінь вільності зникає.

### Застосування до моделі Старобінського

**Вихідна дія.** Модель Старобінського:

$$f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2}, \quad (3.19)$$

де  $M$  — характерний масштаб, що фіксується амплітудою первинного спектра  $A_s$ .

**Потенціал скалярона.** Застосовуємо формулу (3.18):  $f'(R) = 1 + R/(3M^2)$ , тому  $\varphi = 1 + R/(3M^2)$  і  $R = 3M^2(\varphi - 1)$ . Підставляючи у (3.18):

$$V(\phi) = \frac{3M^2 M_{\text{Pl}}^2}{4} \left( 1 - e^{-\sqrt{2/3} \phi/M_{\text{Pl}}} \right)^2. \quad (3.20)$$

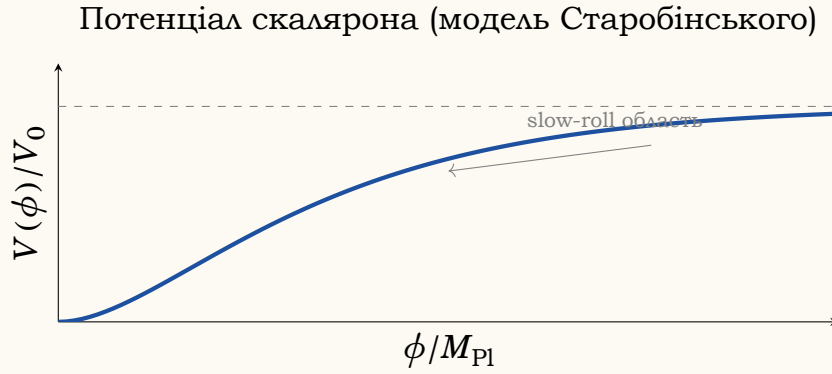
**Slow-roll параметри і передбачення.** На плато ( $\phi \gg M_{\text{Pl}}$ ) параметри slow-roll (??):

$$\epsilon_V \approx \frac{4}{3} e^{-2\sqrt{2/3} \phi/M_{\text{Pl}}} \approx \frac{3}{4N^2}, \quad (3.21)$$

$$\eta_V \approx -\frac{4}{3} e^{-\sqrt{2/3} \phi/M_{\text{Pl}}} \approx -\frac{1}{N}. \quad (3.22)$$

Це дає спостережувані параметри (для  $N = 50-60$ ):

$$\boxed{n_s \approx 1 - \frac{2}{N} \approx 0.967,} \quad \boxed{r \approx \frac{12}{N^2} \approx 0.003.} \quad (3.23)$$



**Рис. 3.3:** Потенціал скалярона (3.20). На великих  $\phi$  потенціал виходить на плато  $V \rightarrow V_0$  — саме там відбувається slow-roll інфляція. На відміну від хаотичної інфляції ( $V \propto \phi^2$ ), плато забезпечує дуже мале тензорне відношення  $r$ .

Обидва значення потрапляють у самий центр довірчої області Planck 2018 [3] і BICEP/Keck [15] — саме тому модель Старобінського є сьогодні «золотим стандартом» інфляції.

**Масштаб  $M$ .** Амплітуда первинного спектра  $A_s \approx 2.1 \times 10^{-9}$  фіксує:

$$M \approx 1.3 \times 10^{-5} M_{\text{Pl}} \approx 3 \times 10^{13} \text{ Гев.} \quad (3.24)$$

Це природний масштаб теорій Великого об’єднання (GUT) — ще одна підказка що інфляція і GUT-фізика пов’язані.

**Важливе концептуальне зауваження: який фрейм фізичний?**

Теорема конформної еквівалентності говорить що  $f(R)$  і ЗТВ+скалярне поле *математично* еквівалентні. Але чи еквівалентні вони *фізично* — досі відкрите концептуальне питання. У йорданівському фреймі маси частинок — константи, але гравітаційна «константа»  $G_{\text{eff}} \propto 1/\phi$  змінна. В айнштайнівському фреймі  $G$  стала, але маси частинок залежать від  $\phi$ . Якщо матерія мінімально зачеплена з метрикою (що є стандартним припущенням), обидва фрейми дають однакові спостережувані на рівні класичної теорії — але можуть розрізнитися при квантових поправках. Для розрахунку спектра  $P_{\mathcal{R}}(k)$  це не важливо: результат однаковий в обох фреймах.

Якщо геометрія потенціалу на цій «непомітній» ділянці різко змінюється — наприклад, з’являється локальна сходінка або ділянка ультра-повільного кочення (USR) — режим slow-roll тимчасово порушується. Флуктуації, що виходять за горизонт саме в цей момент, зазнають різкого підсилення, формуючи *зламаний спектр потужності*. Цей механізм відкриває широке поле для феноменологічного пошуку: окрім вирішення проблеми надлишку ранніх структур за даними JWST, тут є над чим попрацювати в контексті напруженості Хаббла (Hubble tension). Оскільки модифікація первинного спектра на малих масштабах неминуче зміщує найкращі фіти фонових параметрів  $\Lambda\text{CDM}$  при сумісному MCMC-аналізі, можливо існує реальна перспектива часткового послаблення цієї кризи, що детально розглядається у § 10. Але перш ніж перейти до нього — нам потрібно зрозуміти, як саме квантові флуктуації інфлатона перетворюються на початкові неоднорідності Всесвіту. Саме тут інфляція є унікальною: на відміну від будь-якого сценарію з довільними початковими умовами, вона генерує ці неоднорідності з квантового вакууму — без жодного зовнішнього задання. Як саме це відбувається — предмет наступного розділу.

## Задачі

**№ 3.1** *Slow-roll параметри та умова інфляції* Для скалярного поля  $\phi$  із потенціалом  $V(\phi)$  у наближенні повільного кочення:

1. Використовуючи  $\epsilon = -\dot{H}/H^2$  та рівняння Фрідмана, доведіть, що  $\epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2 M_{\text{Pl}}^2}$ .
2. Покажіть, що умова інфляції  $\ddot{a} > 0$  еквівалентна  $\epsilon < 1$ .
3. Виразіть  $\epsilon$  через потенціал  $V(\phi)$  та його похідну  $V'(\phi)$  у наближенні slow-roll, тобто виведіть  $\epsilon_V$ .

**№ 3.2** *Рівняння атрактора та його фізичний зміст* Рівняння Кляйна–Гордона для однорідного поля в розширюваному Всесвіті:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0.$$

1. У наближенні повільного кочення нехтують членом  $\ddot{\phi}$ . Чому це виправдано за умови  $|\eta_H| \ll 1$ ?
2. Запишіть рівняння атрактора  $3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi)$ . Поясніть фізичну аналогію з «кулькою на схилі у в'язкому середовищі».
3. Використовуючи атрактор, покажіть, що  $\dot{\phi}$  визначається локальним нахилом потенціалу, а не початковими умовами. Чому це важливо для передбачуваності інфляції?

**№ 3.3** *Зв'язок між  $\eta_H$  та  $\eta_V$*  Кінематичний параметр  $\eta_H = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$  і потенціальний параметр  $\eta_V = M_{\text{Pl}}^2 V''/V$  пов'язані у наближенні slow-roll.

1. Продиференціюйте рівняння атрактора  $3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi)$  за часом.
2. Враховуючи  $\dot{H} = -\dot{\phi}^2/(2M_{\text{Pl}}^2)$  та  $H^2 \approx V/(3M_{\text{Pl}}^2)$ , виведіть співвідношення:

$$\eta_H \approx \epsilon_V - \frac{1}{2}\eta_V.$$

3. Чому не можна стверджувати, що  $\eta_H \approx \eta_V$ ? Наведіть контрприклад (наприклад, потенціал  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ ).

**№ 3.4** *Тривалість інфляції та кількість e-folds* Кількість e-folds інфляції визначається як  $N = \int H dt$ .

1. Використовуючи  $\dot{\phi} \approx -V'/(3H)$  та  $H^2 \approx V/(3M_{\text{Pl}}^2)$ , покажіть, що

$$dN = \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \frac{V}{V'} d\phi.$$

2. Для потенціалу  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$  обчисліть  $N$  як функцію початкового значення поля  $\phi_{\text{start}}$  та кінцевого  $\phi_{\text{end}}$ .
3. Якщо інфляція закінчується при  $\phi_{\text{end}} \sim M_{\text{Pl}}$ , знайдіть  $\phi_{\text{start}}$ , необхідне для  $N \approx 60$ .

**№ 3.5** **Спектральний індекс  $n_s$  та його залежність від потенціалу** Спектральний індекс скалярних збурень у наближенні slow-roll:

$$n_s - 1 = -2\epsilon_V - \eta_V.$$

1. Для потенціалу  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$  (хаотична інфляція) обчисліть  $\epsilon_V$ ,  $\eta_V$  та  $n_s$  як функцію  $N$ .
2. Чому така модель сьогодні вважається виключеною спостереженнями? (Використайте  $n_s = 0.9649 \pm 0.0042$  та  $r = 16\epsilon_V$ .)
3. Для моделі Старобінського (плато)  $n_s \approx 1 - 2/N$ . Оцініть  $n_s$  для  $N = 60$  та порівняйте з даними Planck.

**№ 3.6** **Чому поле Хіггса не може бути інфлатоном?** Потенціал Хіггса Стандартної моделі має вигляд

$$V(h) = \frac{\lambda}{4} (h^2 - v^2)^2,$$

де  $v \approx 246$  GeV — вакуумне очікуване значення,  $\lambda \approx 0.13$ , а  $M_{\text{Pl}} \approx 2.4 \times 10^{18}$  GeV.

1. При  $h \gg v$  спростіть потенціал до вигляду  $V(h) \approx \frac{\lambda}{4}h^4$ .
2. Використовуючи визначення  $\epsilon_V = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2$ , обчисліть  $\epsilon_V$  як функцію  $h$ .
3. Якщо інфляція відбувається при  $h \sim M_{\text{Pl}}$ , то яке значення має  $\epsilon_V$ ? Чи виконується умова інфляції  $\epsilon_V < 1$ ? Зробіть висновок, чи може стандартне поле Хіггса виступати в ролі інфлатона.
4. Відомо, що додавання до дії члена  $\xi h^2 R$  (не мінімальний зв'язок із гравітацією) може зробити поле Хіггса придатним для інфляції. Чому цей член змінює ситуацію?

**№ 3.7** **Хаотична інфляція Лінде (модель  $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ )** Для потенціалу  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ :

1. Обчисліть параметри повільного кочення  $\epsilon_V$ ,  $\eta_V$  та спектральний індекс  $n_s$  як функцію  $N$ .
2. Використовуючи  $A_s = \frac{V}{24\pi^2 M_{\text{Pl}}^4 \epsilon_V} \approx 2.1 \times 10^{-9}$  та  $N \approx 60$ , оцініть масу  $m$  інфлатона в одиницях  $M_{\text{Pl}}$  та в GeV.
3. Обчисліть тензорно-скалярне відношення  $r = 16\epsilon_V$  для  $N = 60$ . Порівняйте з поточною верхньою межею  $r < 0.036$  (BICEP/Keck 2021). Чому ця модель вважається виключеною?
4. (Бонус) Умова вічної інфляції:  $V(\phi) \gtrsim 3M_{\text{Pl}}^4$ . Оцініть критичне значення  $\phi$ , за якого виникає вічна інфляція.

# **Частина II.**

## **Збурення**



## 4. Збурення метрики: SVT-розклад і калібрування

Рівняння Фрідмана описують ідеально симетричний фон. Реальний Всесвіт відхиляється від нього: є флуктуації густини, потоки речовини, гравітаційні хвилі. Щоб описати ці відхилення кількісно — і зв'язати їх з СМВ — потрібна мова малих збурень навколо метрики FLRW. Ця мова — лінійна теорія збурень метрики — стане фундаментом для квантування збурень у наступному розділі.

Малі відхилення  $\delta g_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x})$  від фонового значення  $\bar{g}_{\mu\nu}(\eta)$  класифікуються за їхньою поведінкою під просторовими обертаннями. Ключовий факт: оскільки фон є однорідним і ізотропним, збурення різних тензорних рангів не взаємодіють між собою у лінійному порядку — скалярні, векторні і тензорні компоненти еволюціонують незалежно. Це твердження відоме як SVT-розклад [19]:

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}^{(S)} + \delta g_{\mu\nu}^{(V)} + \delta g_{\mu\nu}^{(T)}. \quad (4.1)$$

Незалежність трьох секторів означає, що кожен з них можна вивчати окремо:

- **Скалярні збурення (S):** Параметризуються двома скалярними функціями  $(\Phi, \Psi)$ . Динамічно пов'язані з флуктуаціями густини матерії  $\delta\rho$  — це джерело великомасштабної структури.
- **Векторні збурення (V):** Описують вихрові рухи і моменти імпульсу. За відсутності джерел вони згасають як  $a^{-2}$  [20] і в стандартній моделі ролі не відіграють. Ми вводимо їх тут для повноти класифікації і далі не розглядаємо.
- **Тензорні збурення (T):** Вільні поперечні безслідові деформації просторової метрики — первинні гравітаційні хвилі. Народжуються під час інфляції і практично не взаємодіють з речовиною.

### 4.1. Конформно-ньютонівське калібрування

Рівняння загальної теорії відносності є загально-коваріантними, що забезпечує свободу вибору просторово-часових координат. У лінеаризованій теорії космологічних збурень ця коваріантність призводить до появи суто калібрувальних (gauge) ступенів вільності, які є артефактами координатного опису і позбавлені безпосереднього фізичного змісту. Для усунення цієї неоднозначності та фіксації фізичних мод ми використовуємо *конформно-ньютонівське* (поздовжнє) калібрування. У цьому формулюванні позадіагональні компоненти метрики тожно дорівнюють нулю, а збурений інтервал набуває вигляду:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\Phi) d\eta^2 + ((1 - 2\Psi) \delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right]. \quad (4.2)$$

Тут скалярні флуктуації геометрії описуються двома потенціалами Бардіна  $\Phi$  та  $\Psi$  [21], які у квазістатичному граничному випадку на масштабах під горизонтом зводяться до класичного ньютонівського потенціалу, а  $h_{ij}$  відповідає за тензорні збурення.

Фізичний зміст кожного доданку:

1.  $\Phi$  — ньютонівський гравітаційний потенціал: визначає прискорення пробних частинок і гравітаційне червоне зміщення фотонів СМВ.
2.  $\Psi$  — потенціал просторової кривини: описує локальне стиснення або розтягнення просторових гіперповерхонь. За відсутності анізотропного напруження  $\Phi = \Psi$ .
3.  $h_{ij}$  — задовольняє умовам поперечності ( $\partial^i h_{ij} = 0$ ) і безслідовості ( $h^i_i = 0$ ); описує два стани поляризації гравітаційних хвиль  $h_+$  та  $h_\times$ .

Таким чином, цей розділ побудував мову: збурена метрика параметризована потенціалами  $\Phi$ ,  $\Psi$  і тензором  $h_{ij}$ , а SVT-розклад гарантує їхню незалежну еволюцію. Але мова збурень метрики корисна лише тоді, коли ми знаємо, як ця збурена геометрія впливає на речовину. Покажемо це явно — отриманий результат стане фундаментом для гідродинаміки фотон-баріонної плазми у розділі 7.

Тепер можна поставити центральне питання: звідки взяли самі збурення  $\delta\rho$ ,  $\Phi$  — початкові умови для цієї гідродинаміки? Відповідь — квантові флуктуації інфлатона — є темою наступного розділу.

## Задачі

**№ 4.1 SVT-розклад та незалежність секторів** У лінійній теорії космологічних збурень метрики FLRW з малими відхиленнями розкладають на скалярний, векторний та тензорний сектори.

1. Скільки незалежних ступенів вільності має кожен із секторів (S, V, T) у збуреній метриці? Поясніть, чому тензорні збурення описують лише дві поляризації гравітаційних хвиль.
2. Чому скалярні, векторні та тензорні збурення еволюціонують незалежно в лінійному порядку? Яка властивість фоновому простору-часу за це відповідає?
3. Векторні збурення за відсутності джерел згасають як  $a^{-2}$ . Поясніть фізичну причину цього згасання. Чому в стандартній космології вони зазвичай не розглядаються?

**№ 4.2 Конформно-ньютонівське калібрування та потенціали Бардіна** У конформно-ньютонівському (поздовжньому) калібруванні збурена метрика має вигляд:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\Phi) d\eta^2 + ((1 - 2\Psi) \delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right].$$

1. Поясніть фізичний зміст потенціалів  $\Phi$  та  $\Psi$ . У якому випадку вони збігаються ( $\Phi = \Psi$ )?
2. Що таке "калібрувальна свобода" в загальній теорії відносності? Чому для усунення неоднозначності потрібно фіксувати калібрування?
3. Уявіть, що ви обрали інше калібрування (наприклад, синхронне). Чи будуть фізичні передбачення (наприклад, кутовий спектр СМВ) залежати від вибору калібрування? Відповідь обґрунтуйте.

**№ 4.3 Тензорні збурення та гравітаційні хвилі** Тензорні збурення  $h_{ij}$  задовольняють умовам поперечності ( $\partial^i h_{ij} = 0$ ) та безслідовості ( $h^i_i = 0$ ).

1. Скільки незалежних компонент залишається в  $h_{ij}$  після накладання цих умов у тривимірному просторі?
2. Чому ці незалежні компоненти відповідають двом поляризаціям гравітаційних хвиль ( $h_+$  та  $h_\times$ )?
3. Покажіть, що для плоскої хвилі, яка поширюється вздовж осі  $z$ , тензор  $h_{ij}$  має вигляд:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як трансформуються  $h_+$  та  $h_\times$  при повороті на кут  $45^\circ$  навколо осі  $z$ ?

## 5. Квантові флуктуації і збурення

У §3 інфлатон розглядався як класичне однорідне поле  $\bar{\phi}(t)$ , а у §4 ми побудували математичний апарат для опису збурень метрики. Тепер постає фундаментальне питання про їхнє походження.

Будь-яке квантове поле неминуче флуктує — навіть у вакуумному стані. Ці нульові коливання можна представити як сукупність хвиль (мод Фур'є) найрізноманітніших масштабів — від субмікроскопічних до космологічних, де кожна мода характеризується своїм хвильовим числом  $k$  та відповідною фізичною довжиною хвилі  $\lambda = 2\pi a(t)/k$ . Під час інфляції ці нульові коливання існують скрізь, зокрема й у нашій майбутній області простору. Але стрімке інфляційне розширення розтягує фізичну довжину хвилі кожної моди ( $\lambda \propto a(t)$ ). Щойно для моди з певним  $k$  виконується умова  $\lambda \approx cH^{-1}$ , вона перетинає горизонт Хаббла. Протилежні фази цієї хвилі втрачають причинний контакт: вони більше не «взаємодіють» між собою, і часові осциляції припиняються. Амплітуда хвиль класично заморожується на тому значенні, яке мода мала в момент виходу з-під горизонту.

Проте горизонт Хаббла не залишається фіксованим назавжди. Після закінчення інфляції та переходу до радіаційно-домінованої епохи закон розширення Всесвіту кардинально змінюється. Якщо під час інфляції масштабний фактор зростав прискорено ( $\ddot{a} > 0$ ), то у гарячу епоху, коли домінує релятивістська плазма, він сповільнюється як  $a(t) \propto t^{1/2}$ . Відповідно, параметр Хаббла спадає як  $H = \dot{a}/a = 1/(2t)$ . Це призводить до того, що співвідношення між супутнім горизонтом Хаббла та масштабним фактором змінюється: під час інфляції  $d(aH)^{-1}/dt < 0$  (горизонт стискається в супутніх координатах), а після її закінчення

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{aH} \right) > 0. \quad (5.1)$$

(Тут  $c = 1$  в природних одиницях, що використовуються в усій главі.) На мові фізичних відстаней це означає, що реальний радіус горизонту  $R_H = 1/H \propto t$  зростає лінійно, випереджаючи ріст довжини хвилі збурень  $\lambda \propto t^{1/2}$ . Внаслідок цієї нерівності раніше заморожені моди одна за одною знову повертаються під горизонт — і саме тут вони «розморозжуються», знову починаючи осцилювати з тією самою амплітудою, яку отримали під час інфляції. Ця амплітуда стає початковою умовою для коливань гарячої фотон-баріонної плазми й зрештою відбивається в температурній анізотропії реліктового випромінювання (СМВ) та великомасштабній структурі Всесвіту.

Для того щоб кількісно описати цей складний процес і розрахувати конкретні спостережувані наслідки, реальні збурення розкладають за типами симетрії простору. Оскільки на ранніх етапах еволюції ці коливання залишаються вкрай малими відхиленнями від однорідного фону (як ми побачимо далі, їхня амплітуда становить усього близько однієї стотисячної долі від середньої густини,  $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ ), їхній розвиток можна розглядати ізольовано в межах теорії збурень першого порядку.

У лінійному наближенні квантові збурення поділяються на два незалежні класи:

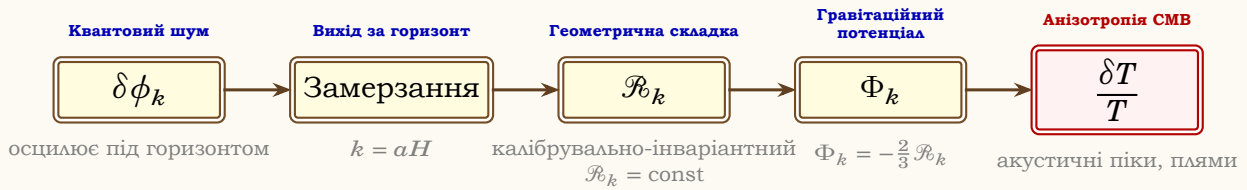
1. **Флуктуації інфлатона**  $\delta\phi(\eta, \mathbf{x}) = \phi(\eta, \mathbf{x}) - \bar{\phi}(\eta, \mathbf{x})$  — породжують первинні

скалярні збурення кривини, що стають «насінням» для формування галактик та їхніх скупчень.

2. **Флуктуації метрики**  $h_{ij}(\eta, \mathbf{x})$  — тензорні збурення простору-часу, які інтерпретуються як первинні гравітаційні хвилі.

Ці два класи еволюціонують незалежно і залишають кардинально різні відбитки у поляризації реліктового випромінювання (так звані  $E$ - та  $B$ -моди, які ми детально розглянемо у §9).

**Логічна карта розділу.** Перш ніж заглибитись у математику, окреслимо маршрут — бо шлях від квантового вакууму до температурних плям СМВ неочевидний і має кілька несподіваних поворотів.



**Крок 1:  $\delta\phi_k$  як квантовий шум.** Починаємо з найпростішого об'єкта — флуктуації самого поля інфлатона  $\delta\phi_k$ . Це звичайний квантовий осцилятор у просторі де-Сіттера: під горизонтом він коливається, за горизонтом — замерзає з амплітудою  $H/\sqrt{2k^3}$ . Саме тут народжується первинний шум.

**Крок 2: чому не  $\delta\rho_k$ , а  $\mathcal{R}_k$  — і чому це зручно.** Здавалося б, природна міра неоднорідності — це збурення густини  $\delta\rho_k$ . Але  $\delta\rho_k$  залежить від вибору системи координат (калібрування): просто перейшовши в іншу систему відліку, можна штучно «знищити» або «створити» збурення. Натомість *супутнє збурення кривини*

$$\mathcal{R}_k \equiv \Psi_k - \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi_k$$

є калібрувально-інваріантним: воно однакове в будь-якій системі координат і описує реальну геометричну складку простору. Головна перевага: за горизонтом  $\mathcal{R}_k = \text{const}$  — воно «замерзає» і не змінюється ні під час розігріву, ні при зміні рівняння стану. Це робить його ідеальним «конвертом», в якому первинна квантова інформація без втрат доставляється від інфляційної епохи до моменту входу мод під горизонт у гарячому Всесвіті.

**Крок 3: від  $\mathcal{R}_k$  до спостережень.** Повернувшись під горизонт у *радіаційно-домінованій* епосі,  $\mathcal{R}_k$  породжує ньютонівський гравітаційний потенціал через співвідношення  $\Phi_k = -\frac{2}{3}\mathcal{R}_k$  (коефіцієнт  $2/3$  специфічний для радіаційної епохи; у матеріально-домінованій він інший). Цей потенціал запускає акустичні осциляції фотон-баріонної плазми — і саме їх ми бачимо у вигляді піків на спектрі СМВ і температурних плям на карті Planck.

Увесь цей ланцюжок —  $\delta\phi_k \rightarrow \mathcal{R}_k \rightarrow \Phi_k \rightarrow \delta T/T$  — і є темою цього розділу.

## 5.1. Скалярні флуктуації у просторі де-Сіттера

Рівняння (3.2) описує фонове поле  $\bar{\phi}(t)$ . Лінеаризуємо його для малого збурення  $\delta\phi = \phi - \bar{\phi}$ , нехтуючи членом  $V''(\bar{\phi})\delta\phi$  у субхаббловому режимі ( $k^2 \gg \mathcal{H}^2$ , де

масою поля можна знехтувати), і переходимо до конформного часу  $\eta$  та Фур'є-простору. Використовуючи  $\dot{f} = f'/a$  і  $\ddot{f} = (f'' - \mathcal{H}f')/a^2$ <sup>1</sup>, отримуємо для  $k$ -ї моди [20]:

$$\delta\phi_k'' + 2\mathcal{H}\delta\phi_k' + k^2\delta\phi_k = 0, \quad (5.2)$$

де штрих — похідна за конформним часом  $\eta$ ,  $k \equiv |\mathbf{k}|$  — хвильове число у супутній системі координат (фізична довжина хвилі  $\lambda_{\text{phys}} = a/k$  росте з часом, тоді як супутне  $k$  залишається сталим). Поведінка кожної моди визначається співвідношенням між  $\lambda_{\text{phys}}$  та горизонтом Хаббла  $H^{-1}$ :

- **Субхаббловий режим** ( $k \gg \mathcal{H}$ ): Для осцилюючої моди  $\delta\phi_k' \sim k\delta\phi_k$ , тому хабблівський член за порядком величини:  $2\mathcal{H}\delta\phi_k' \sim \mathcal{H}k\delta\phi_k \ll k^2\delta\phi_k$ , оскільки  $\mathcal{H} \ll k$ . Рівняння (5.2) зводиться до звичайного гармонічного осцилятора:

$$\delta\phi_k'' + k^2\delta\phi_k \approx 0.$$

Це рівняння вільного поля у пласкому просторі Мінковського — таке саме, як для фотона або будь-якого іншого квантового поля. Його квантовий вакуумний стан добре відомий: це стан з мінімальною енергією, де кожна мода  $k$  знаходиться у нульових коливаннях з амплітудою  $\sim 1/\sqrt{2k}$  (як амплітуда нульових коливань звичайного квантового осцилятора із частотою  $\omega = k$  у природній системі одиниць  $\hbar = c = 1$ ). У розширюваному просторі де-Сіттера цей стан називається *вакуумом Банча-Девіса* [22] — це природний вибір початкового стану: на достатньо малих масштабах ( $k \gg \mathcal{H}$ ) кривина простору непомітна, і поле «не знає», що воно знаходиться в де-Сіттері. А отже, його вакуум збігається зі звичайним вакуумом Мінковського. Саме цей стан і є природною початковою умовою. З урахуванням масштабного фактора  $a$  нормування амплітуди набуває вигляду:

$$|\delta\phi_k(\eta)| \sim \frac{1}{a(\eta)\sqrt{2k}}.$$

Множник  $1/a$  має простий фізичний зміст: супутне хвильове число  $k$  не змінюється з часом, але фізична довжина хвилі  $\lambda_{\text{phys}} = a/k$  розтягується разом із простором. Енергія моди «розмазується» по більшому об'єму, і амплітуда спадає як  $1/a$  — аналогічно до того, як температура реліктового випромінювання спадає обернено пропорційно масштабному фактору.

- **Суперхаббловий режим** ( $k \ll \mathcal{H}$ ): Градієнтний член  $k^2\delta\phi_k$  стає нехтовно малим порівняно з  $\mathcal{H}^2\delta\phi_k$ , і рівняння (5.2) перетворюється з осцилятора на рівняння згасання (тертя):

$$\delta\phi_k'' + 2\mathcal{H}\delta\phi_k' \approx 0.$$

Член  $k^2$  — це «пружина» осцилятора, яка змушує моду коливатися. Коли мода виходить за горизонт,  $k/\mathcal{H} \rightarrow 0$  і пружина «зникає». Фізично це означає, що протилежні фази хвилі більше не перебувають у причинному контакті через надто швидке розширення простору — хвиля замерзає. Розв'язок для домінуючої моди:  $\delta\phi_k = \text{const}$ . Мода «виходить за горизонт» і заморожується [23].

<sup>1</sup>З означення  $d\eta = dt/a$  маємо  $\dot{f} = f'/a$ . Диференціюємо ще раз:  $\ddot{f} = \frac{d}{dt}\left(\frac{f'}{a}\right) = \frac{f''}{a^2} - \frac{a'}{a^2}\frac{f'}{a} = \frac{1}{a^2}(f'' - \mathcal{H}f')$ .



**Аналітичний розв'язок суперхабблової моди**

Щоб зрозуміти, чому з рівняння другого порядку виникає константа, розв'яжемо суперхабблову систему  $\delta\phi_k'' + 2\mathcal{H}\delta\phi_k' \approx 0$  аналітично. Зробимо заміну для швидкості зміни поля:  $Y(\eta) \equiv \delta\phi_k'$ , що дає рівняння першого порядку  $Y' + 2\mathcal{H}Y = 0$ , або:

$$\frac{dY}{Y} = -2\mathcal{H}d\eta.$$

Під час інфляції конформний параметр Хаббла змінюється як  $\mathcal{H} = -1/\eta$  (де конформний час  $\eta < 0$  і прямує до нуля). Підставивши це, отримуємо  $dY/Y = 2d\eta/\eta$ . Інтегрування дає:

$$\ln Y = 2 \ln \eta + \text{const} \implies Y(\eta) = C_1 \eta^2.$$

Тепер, щоб знайти саме поле  $\delta\phi_k$ , проінтегруємо отриману швидкість ще раз:

$$\delta\phi_k(\eta) = \int Y(\eta) d\eta = \int C_1 \eta^2 d\eta = A\eta^3 + B,$$

де  $A$  і  $B$  — сталі інтегрування. Перший доданок ( $A\eta^3$ ) за умов  $\eta \rightarrow 0$  стрімко згасає (загасаюча мода), тому глибоко за горизонтом від усього розв'язку залишається лише чиста константа (домінуюча мода):  $\delta\phi_k \approx B = \text{const}$ .

Конкретне значення цієї константи  $B$  визначається в момент перетину горизонту ( $k = \mathcal{H} = a_*H$ ), коли хвиля тільки-но замерзає. «Зшиваючи» цей результат із амплітудою швидких вакуумних коливань під горизонтом  $|\delta\phi_k| \sim 1/(a\sqrt{2k})$  у точці перетину, де масштабний фактор дорівнює  $a_* = k/H$ , ми однозначно фіксуємо величину константи:

$$B = \frac{1}{a\sqrt{2k}} \Big|_{a=a_*} = \frac{1}{\left(\frac{k}{H}\right)\sqrt{2k}} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}.$$

Таким чином, суперхабблова амплітуда поля є фіксованим «стоп-кадром» квантового шуму в мить його виходу за горизонт [24].

З урахуванням значення для замороженої амплітуди  $|\delta\phi_k| \rightarrow \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$ , ми можемо розрахувати головну статистичну характеристику цього просторового квантового шуму — первинний *спектр потужності*<sup>2</sup> флуктуацій [25].

Щоб побачити його математичний зміст, знайдемо повну дисперсію поля  $\langle\delta\phi^2\rangle$ , підсумувавши внески від усіх можливих фур'є-мод у тривимірному просторі хвильових векторів:

$$\langle\delta\phi^2\rangle = \int_0^\infty \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\delta\phi_k|^2.$$

Перейдемо у сферичні координати ( $d^3k = 4\pi k^2 dk$ ) та перепишемо інтеграл так, щоб виділити інтегрування за одиничним логарифмічним інтервалом масштабів  $d \ln k = dk/k$ :

$$\langle\delta\phi^2\rangle = \int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} |\delta\phi_k|^2 = \int_0^\infty \left( \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\phi_k|^2 \right) \frac{dk}{k} = \int_0^\infty \mathcal{P}_{\delta\phi}(k) d \ln k.$$

Величина у дужках, за визначенням, і є безрозмірним спектром потужності  $\mathcal{P}_{\delta\phi}(k)$ . Підставляючи сюди вираз для нашої замороженої на горизонті амплі-

<sup>2</sup>Термін запозичений із теорії сигналів та спектрального аналізу. У математичній статистиці спектр потужності — це просто розподіл середнього квадрата відхилення (дисперсії) випадкового поля за просторовими масштабами  $k$ .

туди, отримуємо фінальний результат:

$$\mathcal{P}_{\delta\phi}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\phi_k|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \left( \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \right)^2 = \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (5.3)$$

Дивовижний результат формули (5.3) полягає в тому, що вся залежність від хвильового числа  $k$  повністю скоротилася (геометричний множник  $k^3$  ідеально компенсував об'ємний фактор  $k^3$  у знаменнику амплітуди). Це означає, що інфляція генерує *масштабно-інваріантний* спектр флуктуацій — амплітуда космологічного шуму є практично однаковою на будь-яких просторових масштабах. Цей результат відомий як *спектр Гаррісона–Зельдовича* [26, 27] — перший теоретичний передбачений вигляд первинного спектра збурень.

**Зауваження: де-Сіттерівська температура і термодинамічний зміст спектра**

Результат (5.3) має значно глибший зміст, ніж просто вдале алгебраїчне скорочення степенів. Простір де-Сіттера має горизонт подій, обмеження доступу до інформації за яким, згідно з Гіббонсом і Гокінгом [28], призводить до виникнення теплового випромінювання вакуумних флуктуацій із характерною температурою:

$$T_{\text{dS}} = \frac{H}{2\pi}.$$

Таким чином, комбінація  $H/(2\pi)$  у формулі (5.3) є прямим наслідком квантової термодинаміки горизонту. Оскільки флуктуації всіх масштабів народжуються з однаковою ефективною «температурою» де-Сіттерівського вакууму, ми й отримуємо спектр, який майже не залежить від  $k$ .

Проте тут слід зробити важливе фізичне уточнення щодо часу: під час реальної інфляції параметр Хаббла не є строгою константою, а повільно зменшується у режимі повільного скочування (*slow-roll*). Через це значення температури  $T_{\text{dS}}$  (а отже, й параметра  $H$ ) у формулі спектра береться індивідуально для кожної моди — **у момент її власного перетину горизонту** ( $k = aH$ ). Моди великих просторових масштабів (малі  $k$ ) виходять за горизонт раніше, коли величина  $H$  була більшою, а моди малих масштабів (великі  $k$ ) — пізніше, коли інфляція вже наближалася до фіналу і  $H$  трохи знизився. Саме цей динамічний ефект порушує ідеальну масштабну інваріантність і призводить до того, що первинний спектр реального Всесвіту набуває легкого «червоного нахилу» (спектральний індекс  $n_s \approx 0.965 \neq 1$ ), що блискуче підтверджується сучасними спостереженнями реліктового випромінювання [3].

## 5.2. Збурення кривини і первинний спектр

Досі ми розглядали флуктуації скалярного поля  $\delta\phi$  так, наче вони живуть у фіксованому просторі де-Сіттера. Проте у реальному Всесвіті поле інфлатона є головним джерелом гравітації: його густина енергії викривляє простір-час. Тому, згідно з рівняннями Ейнштейна, будь-які квантові коливання поля  $\delta\phi$  неминуче «продавляють» геометрію Всесвіту, миттєво генеруючи збурення метрики.

Оскільки поле і метрика жорстко зв'язані між собою гравітаційною взаємодією, розділити їх у чистому вигляді неможливо. Щобільше, сама величина збурення поля  $\delta\phi = \phi - \bar{\phi}$  залежить від того, як саме ми проведемо просторові

перерізи (гіперповерхні) у чотиривимірному просторі-часі. Зміна системи координат (калібрування) може штучно створювати або знищувати збурення поля, що є суто математичним артефактом.

### Фізичний механізм: як флуктуація поля народжує кривину

Щоб зрозуміти, як квантовий шум поля трансформується в геометрію, уявімо інфлатон як «космічний годинник», що своїм значенням  $\phi(t)$  відраховує час до кінця інфляції. Через квантові флуктуації цей годинник у різних точках простору йде неузгоджено. Величина  $\delta t = \delta\phi/\dot{\phi}$  має фундаментальний сенс: це *локальна затримка в часі* (або «запізнення» поля у конкретній точці порівняно з середнім фоновим рухом).

Оскільки Всесвіт стрімко розширюється з темпом Хаббла  $H$ , у тих областях, де поле запізнилося ( $\delta\phi > 0$ ), інфляція триває трохи довше, і простір встигає локально розширитися в  $e^{H\delta t}$  разів сильніше. Це додаткове нерівномірне розтягнення простору геометрично означає лише одне — появу реальних складок просторової кривини:  $\mathcal{R} \sim H\delta t = \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi$ .

### Калібрувально-інваріантний опис

Щоб позбутися координатної невизначеності та враховувати цей ефект на будь-яких масштабах, нам потрібна *калібрувально-інваріантна* величина, яка фізично об'єднує збурення поля та геометрії в один монолітний об'єкт. У конформно-ньютонівському калібруванні таке *супутнє збурення кривини*<sup>3</sup> (comoving curvature perturbation) визначається як [21]:

$$\mathcal{R}_k \equiv \Psi_k - \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi_k. \quad (5.4)$$

Рівняння руху для  $\mathcal{R}_k$  у Фур'є-просторі має вигляд [21] (рівняння Муханова-Сасаки):

$$\mathcal{R}_k'' + \frac{2z'}{z} \mathcal{R}_k' + k^2 \mathcal{R}_k = 0, \quad z \equiv \frac{a\dot{\phi}}{H}. \quad (5.5)$$

#### Рівняння Муханова-Сасаки

Рівняння Муханова-Сасаки є результатом лінеаризації системи рівнянь Ейнштейна  $\delta G_\nu^\mu = 8\pi G \delta T_\nu^\mu$  першого порядку малості. Ми використовуємо загальну збурену метрику (4.2), проте оскільки зараз розглядаються суто *скалярні збурення* (генеровані полем інфлатона), тензорний член гравітаційних хвиль покладається рівним нулю ( $h_{ij} = 0$ ). Крім того, за відсутності анізотропного тиску скалярні потенціали тотожно рівні між собою:  $\Phi = \Psi$ .

У Фур'є-просторі геометрична ліва частина ( $\delta G_\nu^\mu$ ) та польова права частина ( $\delta T_\nu^\mu$ ) для такої метрики мають наступну структуру компонент:

1. **Часова компонента** ( $\delta G_0^0 = 8\pi G \delta T_0^0$ ) — аналог рівняння Пуассона:

$$\begin{aligned} \delta G_0^0 &= \frac{2}{a^2} [k^2 \Psi_k + 3\mathcal{H}(\Psi_k' + \mathcal{H}\Psi_k)], \\ \delta T_0^0 &= -\delta\rho_k = -\frac{1}{a^2} \left[ \dot{\phi} \delta\phi_k' - \dot{\phi}^2 \Psi_k - (\dot{\phi}' + 2\mathcal{H}\dot{\phi}) \delta\phi_k \right]. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Не плутати зі скалярною кривиною Рімана  $R$  з рівнянь Ейнштейна:  $\mathcal{R}$  є безрозмірною амплітудою збурення метрики, тоді як  $R$  має розмірність [довжина<sup>-2</sup>].

Тут ми врахували фонове рівняння руху поля (3.2) ( $a^2 V_{,\phi} = -\dot{\phi}' - 2\mathcal{H}\dot{\phi}$ ). Ця рівність показує, як квантові неоднорідності густини енергії поля ( $\delta\rho_k$ ) миттєво продавляють просторову геометрію ( $k^2\Psi_k$ ).

## 2. Просторово-часова компонента ( $\delta G_i^0 = 8\pi G\delta T_i^0$ ) — баланс імпульсу:

$$\begin{aligned}\delta G_i^0 &= \frac{2}{a^2} i k_i (\Psi_k' + \mathcal{H}\Psi_k), \\ \delta T_i^0 &= \frac{1}{a^2} i k_i \left( \dot{\phi} \delta\phi_k \right).\end{aligned}$$

Після скорочення загального хвильового множника  $i k_i$  це рівняння зводиться до прямого лінійного зв'язку між швидкістю зміни геометричного потенціалу та амплітудою поля:  $\Psi_k' + \mathcal{H}\Psi_k = 4\pi G \dot{\phi} \delta\phi_k$ .

Оскільки  $\Psi_k$  та  $\delta\phi_k$  диференціально переплетені у цих компонентах ЗТВ, для розплутування системи використовують визначення (5.4). З просторово-часової компоненти маємо:

$$\Psi_k' + \mathcal{H}\Psi_k = 4\pi G \dot{\phi} \delta\phi_k \implies \Psi_k = \frac{\mathcal{H}}{\dot{\phi}} \delta\phi_k + \mathcal{R}_k$$

(останній крок — з означення (5.4)). Підставляючи це у часову компоненту і застосовуючи закон збереження  $\nabla_\mu \delta T^{\mu\nu} = 0$ , більшість членів скорочується завдяки фоновому рівнянню руху (3.2), і система зводиться до одного рівняння для  $\mathcal{R}_k$ :

$$\mathcal{R}_k'' + 2 \left( \mathcal{H} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\dot{H}}{H} \right) \mathcal{R}_k' + k^2 \mathcal{R}_k = 0.$$

Громіздкий коефіцієнт «космічного тертя» у дужках математично тотожний логарифмічній похідній  $2z'/z$  від функції  $z \equiv \frac{a\dot{\phi}}{H}$ . Використовуючи раніше введені фонові характеристики інфлатона (3.3), цю функцію можна записати у красивому термодинамічному вигляді:

$$z^2 = \frac{a^2 \dot{\phi}^2}{H^2} = \frac{a^2 (\bar{\rho}_\phi + \bar{p}_\phi)}{H^2} = 3M_{\text{Pl}}^2 a^2 (1 + w_\phi),$$

де  $w_\phi \equiv \bar{p}_\phi/\bar{\rho}_\phi$  — параметр рівняння стану поля. Заміна дужок на  $2z'/z$  і дає фінальне компактне рівняння Муханова — Сасаки (5.5).

Тепер фізичний зміст  $z$  стає очевидним: якщо Всесвіт заповнений чистою космологічною сталою ( $w_\phi = -1$ ), то  $z = 0$ , і збурення кривини не генеруються, бо простір ідеально однорідний. Народження кривини  $\mathcal{R}_k$  можливе лише тоді, коли  $1 + w_\phi \neq 0$ , тобто коли інфлатон має кінетичну енергію і повільно скочується, а сама функція  $z$  — це «гідродинамічно скоригований» масштабний фактор.

## Еволюція розв'язків на різних масштабах: від кванту до класики

Рівняння (5.5) спрощується канонічною заміною  $u_k \equiv z \mathcal{R}_k$ , яка виносить «тертя» і зводить задачу до осцилятора зі змінною масою:

$$u_k(\eta) \equiv z(\eta) \mathcal{R}_k(\eta). \quad (5.6)$$

У Фур'є-просторі еволюція рівняння (5.5) приймає вигляд:

$$u_k'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0, \quad (5.7)$$

де штрих означає похідну за конформним часом  $\eta$ . Поведінка розв'язків цього рівняння повністю визначається просторовим масштабом хвилі відносно при-

чинного горизонту Хаббла  $\mathcal{H} = aH$ . Залежно від співвідношення між геометричним та кінетичним членами у дужках, виділяють два фундаментальних режими еволюції збурень:

1. **Глибоко субхаббловий режим** ( $k \gg \mathcal{H}$  або  $\lambda \ll H^{-1}$ ): На ранніх етапах інфляції довжина хвилі збурення  $\lambda$  є мізерною порівняно з радіусом причинності. У цьому режимі конформний фактор гравітаційного потенціалу у рівнянні Муханова–Сасакі є нехтовно малим порівняно з кінетичним членом:  $k^2 \gg |z''/z| \approx 2/\eta^2$ . За цієї умови загальне рівняння руху для квантової змінної  $u_k$  спрощується до вигляду:

$$u_k'' + k^2 u_k \approx 0. \quad (5.8)$$

Рівняння (5.8) за своєю структурою тотожне рівнянню звичайного гармонічного осцилятора у плоскому просторі-часі Мінковського. Його фундаментальним квантовим розв'язком, що задовольняє умові мінімуму енергії, є вакуумний стан Банча–Дейвіса:

$$u_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}. \quad (5.9)$$

У цьому режимі комплексна фаза хвилі стрімко обертається, а її квантове середнє значення дорівнює нулю.

Метричні потенціали  $\Psi_k$  та  $\Phi_k$  тут є нехтовно малими. З лінеаризованих рівнянь Айнштайна (аналога рівняння Пуассона) випливає, що високочастотні коливання інфлатона генерують потенціал амплітудою  $\Psi_k \sim \dot{\phi} \delta\phi_k / (kM_{\text{Pl}}^2)$ . Пряме порівняння метричного та польового внесків у повному релятивістському визначенні кривизни показує їхнє відношення:

$$\frac{\Psi_k}{\frac{\mathcal{H}}{\dot{\phi}} \delta\phi_k} \sim \frac{\dot{\phi}^2}{M_{\text{Pl}}^2 H^2} \cdot \frac{\mathcal{H}}{k} \sim 2\epsilon \left( \frac{\mathcal{H}}{k} \right) \ll 1. \quad (5.10)$$

Формула (5.10) демонструє подійне придушення гравітаційного відгуку: по-перше, через малість параметра повільного скочування ( $\epsilon \ll 1$ ), а по-друге — геометрично, оскільки мікроскопічна хвиля ( $k \gg \mathcal{H}$ ) не встигає суттєво викривити простір на своїх масштабах. Фізично простір-час здається такої моді практично плоским. Тому, зважаючи на кінематичний зв'язок  $u_k \approx a \delta\phi_k$ , збурення супутньої кривизни повністю зводиться до чистої коливальної вакуумної динаміки самого поля інфлатона [20]:

$$\mathcal{R}_k \approx -\frac{\mathcal{H}}{\dot{\phi}} \delta\phi_k = -\frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi_k. \quad (5.11)$$

2. **Суперхаббловий режим** ( $k \ll \mathcal{H}$  або  $\lambda \gg H^{-1}$ ): Оскільки Всесвіт розширюється експоненціально, фізична довжина хвилі збурення зростає значно швидше за майже сталий радіус Хаббла  $c/H$ . Мода перетинає горизонт ( $k \approx \mathcal{H}$ ) і виходить за його межі. У суперхаббловому режимі член просторового градієнта  $k^2 \mathcal{R}_k \rightarrow 0$ . Якщо знехтувати цим членом, рівняння Муханова–Сасакі легко інтегрується в загальному вигляді:

$$\mathcal{R}_k(\eta) = C_1 + C_2 \int \frac{d\eta}{z^2(\eta)}, \quad (5.12)$$



де супутній параметр  $z \equiv a\dot{\phi}/\mathcal{H}$ . У наближенні повільного скочування швидкість поля  $\dot{\phi}$  та параметр Хаббла  $H$  змінюються дуже повільно, тому  $z(\eta) \propto a(\eta)$ . Згадавши, що для де-Сіттерівського розширення масштабний фактор пов'язаний із конформним часом як  $a(\eta) = -1/(H\eta)$ , де  $\eta \in (-\infty, 0)$ , ми можемо явно обчислити цей інтеграл:

$$\int \frac{d\eta}{z^2} \propto \int \frac{d\eta}{a^2} = \int H^2 \eta^2 d\eta = \frac{H^2 \eta^3}{3} \propto \frac{1}{a^3}. \quad (5.13)$$

Підставляючи результат (5.13) у загальний розв'язок (5.12), остаточно знаходимо часову еволюцію моди поза горизонтом:

$$\mathcal{R}_k(\eta) = C_1(k) + C_2(k) \cdot \frac{1}{a^3(\eta)}. \quad (5.14)$$

Отже, поза горизонтом залишається лише стала мода —  $\mathcal{R}_k$  буквально «фотографує» квантовий шум у момент виходу за горизонт і зберігає цей знімок назавжди.

Математичний вигляд розв'язку (5.14) має фундаментальний фізичний зміст, який кодує в собі поведінку збурень:

- **Загасаюча мода ( $\propto a^{-3}$ ):** Другий член, що походить від конформного інтеграла, стрімко руйнується експоненціальним розширенням простору. Всього за кілька  $e$ -folds інфляції ця мода повністю обнуляється, не залишаючи жодного сліду в еволюції Всесвіту.
- **Зростаюча (стаціонарна) мода ( $C_1 = \text{const}$ ):** Перший член абсолютно не залежить від часу. Це означає, що амплітуда хвилі буквально «заморожується» на тому рівні, який вона мала в момент перетину горизонту Хаббла ( $k = aH$ ).

Фізично це замерзання означає, що вершина і низина гігантської хвилі рознесені у просторі на відстань, більшу за радіус причинності  $c/H$ . Локальні області простору більше не можуть обмінюватися світловими чи звуковими сигналами, а гідродинамічний тиск плазми принципово не здатний перерозподілити енергію та згладити збурення. Коливання повністю припиняються: комплексна фаза хвилі застигає. Квантова мода опиняється у сильно стиснутому стані, в якому некомутаційні поправки  $[\hat{\mathcal{R}}_k, \hat{\mathcal{R}}'_k] \sim \hbar$  стають нехтовно малими порівняно з класичною амплітудою — і мода ефективно поводить себе як звичайне *класичне стохастичне гауссове поле*.

Стабільність  $\mathcal{R}_k = \text{const}$  поза горизонтом робить її абсолютно невразливою до будь-яких мікрофізичних процесів наприкінці інфляції, зокрема до радикальної зміни рівняння стану речовини під час розігріву (reheating) Всесвіту. Це перетворює  $\mathcal{R}_k$  на ідеальну «сейфову» початкову умову, в якій Всесвіт без жодних втрат чи зашумлення переносить первинну інформацію від квантової епохи ( $t \sim 10^{-36}$  с) до моменту входу в гарячу фазу.

### Геометричний зв'язок Простору і Часу

Важливо уникати термінологічного ступору щодо природи збурення супутньої кривизни  $\mathcal{R}_k$ . Безрозмірна величина  $\mathcal{R}_k$  сидить у просторовій частині метрики ( $g_{ij} \approx a^2(1 - 2\mathcal{R})\delta_{ij}$ ),



безпосередньо описуючи локальне розтягнення чи стиснення координатної сітки, що рухається разом із плазмою.

Математичний зв'язок цієї величини зі справжньою геометричною кривизною розкривається через розрахунок тривимірного скаляра кривизни  ${}^{(3)}R$  у першому порядку теорії збурень:

$${}^{(3)}R = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \mathcal{R} \xrightarrow{\text{Фур'є}} {}^{(3)}R_k = -\frac{4k^2}{a^2} \mathcal{R}_k. \quad (5.15)$$

Рівняння (5.15) показує, що  $\mathcal{R}_k$  є просторовим «гравітаційним потенціалом», лапласіан якого ( $\nabla^2 \equiv -k^2$ ) задає реальне викривлення тривимірного простору.

Проте в ЗТВ простір і час жорстко зчеплені рівняннями Айнштейна ( $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ ). Тому просторова деформація геометрії поза горизонтом дзеркально відбивається у часову компоненту метрики ( $g_{00} \approx -(1 + 2\Phi)$ ), миттєво генеруючи класичний ньютонівський гравітаційний потенціал  $\Phi_k$ . На початковому етапі радіаційно-домінованої епохи ( $w = 1/3$ ) цей релятивістський зв'язок є строго фіксованим:

$$\Phi_k = -\frac{2}{3} \mathcal{R}_k. \quad (5.16)$$

Знак «мінус» має глибокий фізичний сенс: там, де простір під час інфляції був сильніше розтягнутий ( $\mathcal{R}_k > 0$ ), виникає класична гравітаційна яма ( $\Phi_k < 0$ ). Щойно після закінчення інфляції відповідна мода знову увійде під горизонт, ця часова яма почне притягувати речовину, змушуючи фотон-баріонне желе стискатися і запускаючи акустичні осциляції.

Оскільки  $\mathcal{R}_k$  є класичною випадковою гауссовою величиною, ми описуємо її через статистичні характеристики. За визначенням, безрозмірний спектр потужності випадкового поля пов'язаний із середнім квадратом його Фур'є-мод як  $\mathcal{P}_X(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |X_k|^2 \rangle$ . Домножуючи співвідношення (5.11) на коефіцієнт  $\frac{k^3}{2\pi^2}$  в момент перетину горизонту ( $k = aH$ ), отримуємо прямий зв'язок між первинними спектрами поля та кривизни:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \mathcal{P}_{\delta\phi}(k). \quad (5.17)$$

Підставляючи сюди спектр квантових флуктуацій вільного скалярного поля у просторі де Сіттера  $\mathcal{P}_{\delta\phi}(k) = (H/2\pi)^2$ , остаточно знаходимо фундаментальну амплітуду первинних збурень кривизни:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{H^4}{4\pi^2 \dot{\phi}^2} \Big|_{k=aH}. \quad (5.18)$$

Відхилення від суворо плоського (масштабно-інваріантного) спектру Гаррісона-Зельдовича параметризується спектральним індексом  $n_s$ :

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = -2\epsilon - \eta_V, \quad (5.19)$$

де  $\epsilon$  та  $\eta_V$  — параметри повільного скочування (3.4) та (3.13), обчислені в момент виходу моди  $k$  за горизонт.

### Математичне виведення співвідношення для $n_s$

Оскільки мода перетинає горизонт при  $k = aH \approx \text{const} \cdot a$ , то диференціал хвильового числа прямо пов'язаний із числом  $e$ -folds:  $d \ln k \approx d \ln a = dN$ . Тоді диференціюванням рівняння (5.18) за числом  $e$ -folds маємо:

$$n_s - 1 = \frac{d}{dN} \ln \left( \frac{H^4}{\dot{\phi}} \right) = 4 \frac{\dot{H}}{H^2} - 2 \frac{\ddot{\phi}}{H \dot{\phi}} = -4\epsilon + 2\eta_H.$$

Диференціюванням за часом рівняння класичного атрактора повільного скочування  $3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi)$  та враховуючи поправки другого порядку [20], знаходимо зв'язок хабблівського параметра другого порядку з параметрами потенціалу:  $\eta_H \approx \epsilon - \frac{1}{2}\eta_V$ . Підставляючи це значення, остаточно отримуємо:

$$n_s - 1 = -4\epsilon + 2(\epsilon - \frac{1}{2}\eta_V) = -2\epsilon - \eta_V. \quad \square$$

Космічна обсерваторія *Planck* 2018 виміряла це значення з безпрецедентною точністю:  $n_s = 0.9649 \pm 0.0042$ , що строго підтверджує динаміку повільного кочення (спектр є «червоним», тобто нахиленим,  $n_s < 1$ , що виключає статичні моделі) [3].

Проте, якщо на шляху інфлатона трапляються локальні аномалії потенціалу (наприклад, різкі зміни нахилу чи сходинки), швидкість кочення  $\dot{\phi}$  може на короткий час стрімко впасти. Оскільки первинний спектр (5.18) обернено пропорційний квадрату швидкості ( $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \propto \dot{\phi}^{-2}$ ), таке гальмування викликає локальний сплеск амплітуди флуктуацій, формуючи так званий **зламаний спектр**. Фізичні наслідки та феноменологічні обмеження таких аномалій ми детально розберемо у § 10.

Повернувшись назад під причинний горизонт Хаббла вже у постінфляційну гарячу епоху, ці стабільні класичні моди  $\mathcal{R}_k$  миттєво «вмикають» градієнти тиску і стають тими самими когерентними початковими умовами у фазі косинуса для гідродинаміки фотон-баріонної плазми, які ми детально вивчили у розділі про акустичні осциляції (BAO).

## 5.3. Динаміка первинних гравітаційних хвиль

З'ясуємо, як еволюціонують тензорні збурення  $h_{ij}$ . Підставляючи тензорну частину збуреної метрики у лінеаризовані рівняння Ейнштейна, отримуємо хвильове рівняння для кожної Фур'є-моди:

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H} h'_{ij} + k^2 h_{ij} = 0. \quad (5.20)$$

Його структура ідентична структурі рівнянь для скалярного поля (осцилятор із хабблівським тертям). Тому тензорні моди так само заморожуються за горизонтом, а їхній первинний спектр визначається виключно масштабом Хаббла під час інфляції [29]:

$$\mathcal{P}_h(k) = \frac{2}{\pi^2 M_{\text{Pl}}^2} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 = \frac{H^2}{\pi^2 M_{\text{Pl}}^2}. \quad (5.21)$$

Присутність планківської маси  $M_{\text{Pl}}^{-2}$  підкреслює квантово-гравітаційну природу цих хвиль та слабкість їхньої взаємодії. Експериментально амплітуда тензорної

моди шукається через  $B$ -моди поляризації реліктового випромінювання за допомогою тензорно-скалярного відношення  $r$ :

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_h(k_*)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*)} = 16\epsilon. \quad (5.22)$$

Сучасне обмеження  $r < 0.036$  [15] жорстко лімітує енергетичний масштаб верхніх меж інфляції, відсікаючи великий клас теоретичних моделей. Детальний аналіз зв'язку між  $r$  та поляризацією наведено у § 9.

### Зауваження про квантово-класичний перехід скалярних і тензорних мод

Після виходу за горизонт обидва типи мод — скалярні  $\mathcal{R}_k$  і тензорні  $h_{ij}$  — поведуться як класичні стохастичні поля. Практичним механізмом є *стиснення квантового стану*: у просторі де-Сіттера дисперсія амплітудної квадратури зростає як  $e^{2Ht}$ , тоді як спряжена фазова компонента пригнічується як  $e^{-2Ht}$ . У такому граничному стані мода практично невідрізняється від класичного стохастичного поля — незалежно від того, чи відбулася повноцінна декогеренція [30, 31].

Точний механізм переходу (вибір базису вказівників, роль довкілля) залишається відкритим концептуальним питанням. Проте це питання концептуальне, а не вимірвальне: гауссова статистика заморожених мод прекрасно узгоджується зі спостереженнями — зокрема з відсутністю первинної негауссовості за даними Planck 2018 [3].

## Задачі

**№ 5.1 Вихід моди за горизонт та заморожування амплітуди** Розглянемо квантову моду  $\delta\phi_k$  скалярного поля в де-Сіттерівському просторі.

1. Використовуючи рівняння (5.2) та наближення  $\mathcal{H} = -1/\eta$  (де  $\eta < 0$ ), покажіть, що в суперхаббловому режимі ( $k \ll \mathcal{H}$ ) розв'язок має вигляд  $\delta\phi_k = A + B\eta^3$ .
2. Чому домінуючою є мода  $\delta\phi_k = \text{const}$ ? Поясніть фізично, чому амплітуда заморожується після перетину горизонту.
3. Оцініть момент виходу моди за горизонт  $k = aH$  через конформний час  $\eta$ . Який зв'язок між  $k$  та  $\eta_*$  у точці перетину?

**№ 5.2 Спектр потужності та де-Сіттерівська температура** Спектр потужності флуктуацій інфлатона на суперхабблових масштабах дорівнює  $\mathcal{P}_{\delta\phi}(k) = (H/2\pi)^2$ .

1. Поясніть, чому цей спектр називається *масштабно-інваріантним*. Якби залежність була  $\mathcal{P}_{\delta\phi} \propto k^{n_s-1}$ , то яке значення  $n_s$  відповідає масштабній інваріантності?
2. Де-Сіттерівська температура Гіббонса-Гокінга дорівнює  $T_{\text{ds}} = H/(2\pi)$ . Як цей факт пов'язаний із спектром  $\mathcal{P}_{\delta\phi}$ ?
3. Чому в реальному Всесвіті  $n_s \approx 0.965 \neq 1$ ? Яка фізична причина порушення масштабної інваріантності?

**№ 5.3 Збурення кривини та його збереження за горизонтом** Супутнє збурення кривини визначається як  $\mathcal{R}_k = \Psi_k - \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi_k$ .

1. На субхабблових масштабах ( $k \gg \mathcal{H}$ ) можна знехтувати  $\Psi_k$ . Чому це наближення виправдане? Як спрощується  $\mathcal{R}_k$  у цьому випадку?

2. У суперхаббловому режимі ( $k \ll \mathcal{H}$ ) доведіть, що  $\mathcal{R}_k = \text{const}$ , використовуючи рівняння Муханова-Сасаки (5.5) та той факт, що  $z \propto a$  зростає.
3. Чому збереження  $\mathcal{R}_k$  за горизонтом є критично важливим для зв'язку інфляції зі спостереженнями СМВ?

**№ 5.4 Тензорні збурення та параметр  $r$**  Тензорні збурення (первинні гравітаційні хвилі) мають спектр потужності  $\mathcal{P}_h = H^2 / (\pi^2 M_{\text{Pl}}^2)$ , а тензорно-скалярне відношення визначається як  $r = \mathcal{P}_h / \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ .

1. Використовуючи  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = H^4 / (4\pi^2 \dot{\phi}^2)$  та  $\epsilon = \dot{\phi}^2 / (2H^2 M_{\text{Pl}}^2)$ , доведіть, що  $r = 16\epsilon$ .
2. Сучасне обмеження  $r < 0.036$  (BICEP/Keck + Planck). Яку верхню межу на енергетичний масштаб інфляції  $V^{1/4}$  це дає? (Підказка:  $H^2 \approx V / (3M_{\text{Pl}}^2)$ .)
3. Чому виявлення  $B$ -мод поляризації СМВ, викликаних  $r \gtrsim 0.001$ , вважається «святим граалем» космології?

**№ 5.5 Квантово-класичний перехід та стиснені стани**

У просторі де-Сіттера кожна суперхабблівська мода еволюціонує у *стиснутий когерентний стан*. Для такої моди дисперсія однієї квадратурної компоненти зростає як  $e^{2Ht}$ , а спряженої — спадає як  $e^{-2Ht}$ .

1. Чому зростання дисперсії однієї з квадратур дозволяє говорити про *класичну* поведінку моди? (Підказка: згадайте співвідношення невизначеностей Гайзенберга.)
2. Чи є цей перехід *декогеренцією* у звичайному сенсі? Чому автори [30] стверджують, що стиснення саме по собі вже достатнє для класичності?
3. Який експериментальний факт підтверджує, що збурення справді поведуться як класичне стохастичне поле, а не як квантова суперпозиція?

**Частина ІІІ.**

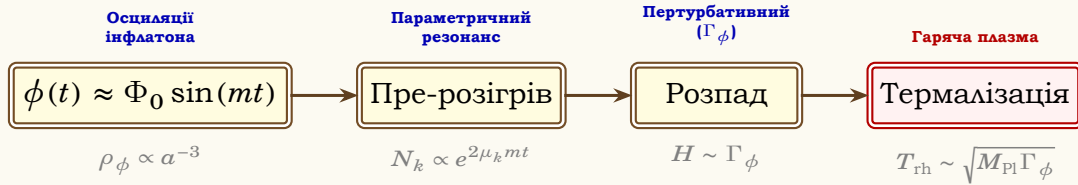
**Спостереження**

## 6. Розігрів і народження матерії

Коли інфлатон досягає мінімуму потенціалу  $V(\phi)$ , умова інфляції порушується ( $\epsilon \rightarrow 1$ ) і прискорене розширення припиняється. Але Всесвіт у цей момент перебуває у парадоксальному стані: він розширився в  $e^{50} - e^{60}$  разів, охолов майже до абсолютного нуля і є практично порожнім — вся енергія зосереджена у вигляді однорідних класичних коливань поля  $\phi$  навколо мінімуму. Жодної плазми, жодних часток Стандартної моделі.

Перехід від цього «холодного» стану до гарячого ультрарелятивістського Всесвіту, з якого починається стандартна космологія Великого вибуху, описується теорією *розігріву* [6, 7]. Динаміку розігріву поділяють на дві послідовні стадії: спочатку нелінійний вибуховий **пре-розігрів**, де параметричний резонанс за лічені осциляції перекачує енергію з поля у частинки, а потім повільний **пертурбативний розпад**, де залишки інфлатона розпадаються і система термалізується.

### Логічна карта розділу



### 6.1. Прерозігрів та параметричний резонанс

Поблизу мінімуму параболічного потенціалу  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ , рівняння (3.2) має вигляд:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0.$$

Оскільки частота масових осциляцій значно перевищує швидкість розширення Всесвіту ( $m \gg H$ ), у WKB-наближенні повільно мінливої амплітуди розв'язок шукається у вигляді

$$\phi(t) \approx \Phi_0(t) \sin(mt),$$

що після підстановки та нехтування вищими похідними ( $\dot{\Phi}_0 \ll m\Phi_0$ ) зводить систему до диференціального рівняння першого порядку  $\dot{\Phi}_0 + \frac{3}{2}H\Phi_0 = 0$ . Інтегрування цього виразу дає степеневий закон загасання амплітуди  $\Phi_0(t) \propto a(t)^{-3/2}$ , внаслідок чого усереднена за період коливань густина енергії поля падає як  $\rho_\phi \approx \frac{1}{2}m^2\Phi_0^2 \propto a^{-3}$ , змушуючи квантовий конденсат імітувати термодинамічну поведінку звичайної пілоподібної матерії.

Якщо інфлатон пов'язаний з іншим квантованим скалярним полем  $\chi$  через лагранжіан взаємодії  $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2$ , то коливання інфлатона створюють періодичний зовнішній фон. Ефективна маса поля  $\chi$  починає осцилювати в часі:  $m_{\text{eff}}^2(t) = m_\chi^2 + g^2\Phi_0^2 \sin^2(mt)$ . Рівняння руху для  $k$ -ї Фур'є-моди  $\chi_k$  набуває форми рівняння Мат'є у просторі, що розширюється [32, 33]:

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + [k_{\text{phys}}^2 + m_\chi^2 + g^2\Phi_0^2 \sin^2(mt)]\chi_k = 0. \quad (6.1)$$



Щоб зрозуміти, чому саме рівняння Мат'є керує народженням часток, корисно провести аналогію з механікою: рівняння (6.1) є точним аналогом рівняння маятника зі змінною довжиною підвісу. Якщо ритмічно смикати нитку маятника з подвоєною власною частотою, розгойдування наростатиме експоненціально — навіть від нескінченно малого початкового відхилення. У нашому випадку роль «підвісу» відіграє ефективна маса поля  $\chi$ : коливання інфлатона періодично змінюють  $m_{\text{eff}}^2(t)$ , а отже й «жорсткість пружини» в рівнянні руху для кожної моди  $\chi_k$ . Принципова різниця від механічного маятника — квантова: навіть якщо поле  $\chi$  на початку перебуває у вакуумному стані ( $N_k = 0$ ), нульові коливання забезпечують ненульову «початкову амплітуду», від якої резонанс починає розгойдуватися. Саме тому параметричний резонанс є неминучим за наявності будь-якої зв'язки  $g \neq 0$  — він не потребує «посівного» теплового фону.

Для аналізу нестабільності зручно зробити заміну поля  $\chi_k = X_k \cdot a^{-3/2}$  та перейти до безрозмірного часу  $z = mt$ , що усуває хабблівське тертя і зводить вираз до канонічного вигляду  $\frac{d^2 X_k}{dz^2} + [A_k - 2q \cos(2z)]X_k = 0$ , де параметр резонансу дорівнює  $q = \frac{g^2 \Phi_0^2}{4m^2}$ . Це диференціальне рівняння з періодичними коефіцієнтами має чітко визначені зони нестабільності на площині параметрів  $(A_k, q)$ . Коли частота фонових коливань інфлатона потрапляє в резонансну смугу, амплітуда моди  $X_k$  починає зростати експоненціально:  $X_k \propto e^{\mu_k mt}$ , де  $\mu_k$  — показник нестабільності.

На мові квантової теорії поля цей процес описується як *параметричний резонанс*, що призводить до неадіабатичної еволюції вакуумного стану. Народження часток  $\chi$  визначається через коефіцієнти Боголюбова  $\beta_k$ , а чисельність заповнення квантових станів росте як  $N_k(t) = |\beta_k|^2 \propto e^{2\mu_k mt}$ . Таке народження відбувається не поштучно, а вибухово: бозонні поля мають стимульоване народження у вже заповнені стани (що є прямим наслідком квантової статистики Бозе—Айнштейна), тому заселеність кожної резонансної моди подвоюється за лічені осциляції інфлатона. Цей початковий етап — **пре-розігрів** (preheating) — є суттєво нелінійним і за надкороткий час перекачує значну частку кінетичної енергії однорідного конденсату інфлатона у високоенергетичні кванти поля  $\chi$ , закладаючи фундамент для подальшої повної термалізації Всесвіту.

## 6.2. Пертурбативний розпад та термалізація

Коли амплітуда коливань інфлатона падає нижче критичного порогу  $\Phi_0 \ll \Phi_{\text{crit}}$ , нелінійні ефекти неадіабатичного пре-розігріву затухають, і параметричний резонанс повністю вимикається. Подальша дисипація залишків енергії конденсату однорідного поля інфлатона відбувається повільно на квантовому рівні через поштучний розпад на легкі ступені вільності Стандартної моделі. Ця стадія описується пертурбативною теорією розпадів, де мікрофізичні процеси враховуються через феноменологічну ширину розпаду  $\Gamma_\phi$ , обчислену за золотим правилом Фермі для відповідних діаграм Фейнмана.

З погляду класичної макроскопічної фізики, цей процес є прямим аналогом дисипації механічної енергії зануреного у рідину маятника за рахунок в'язкого тертя Ньютона, де робота сил опору безповоротно переходить у тепло. Еволюція густин енергії системи задається системою зв'язаних диференціальних рівнянь балансу, які узагальнюють класичний закон радіоактивного розпаду Резерфорда—

Содді для двох послідовних резервуарів:

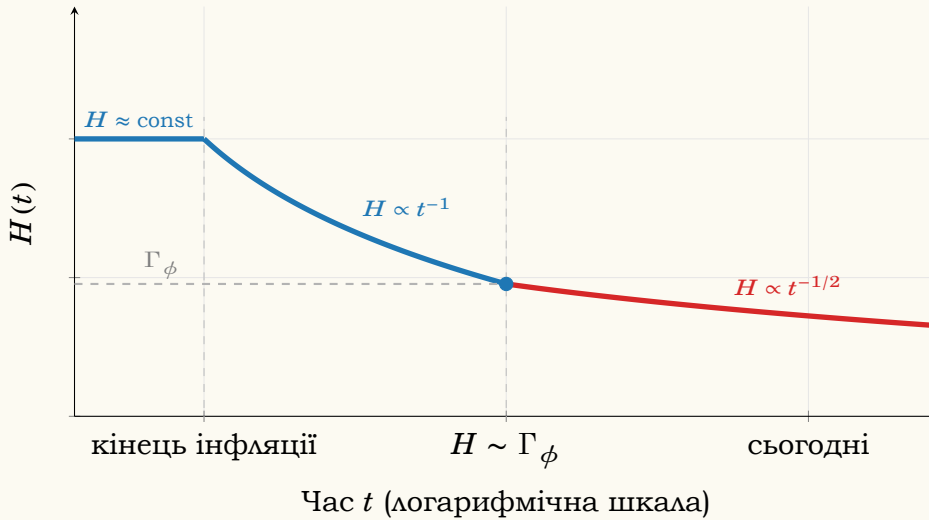
$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi = -\Gamma_\phi \rho_\phi, \quad (6.2)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = +\Gamma_\phi \rho_\phi. \quad (6.3)$$

Рівняння (6.2) описує експоненціальне зменшення енергії інфлатона через канал розпаду, тоді як рівняння (6.3) задає динаміку джерела для утворення вторинної ультрарелятивістської радіації (газу частинок, чия кінетична енергія значно перевищує їхню масу спокою,  $E \approx pc \gg m_0 c^2$ ).

Доданки  $3H\rho_\phi$  та  $4H\rho_r$  у лівих частинах є чисто класичними гідродинамічними наслідками (1.3в). Математична розбіжність у коефіцієнтах строго визначається відповідними рівняннями стану. Нагадаємо (§ 1.1): осцилюючий інфлатон з  $w \approx 0$  розбавляється як  $\rho_\phi \propto a^{-3}$ , а ультрарелятивістські продукти розпаду з  $w = 1/3$  — як  $\rho_r \propto a^{-4}$ ; саме ця різниця визначає динаміку передачі енергії під час розігріву.

Поки темп розширення значно перевищує швидкість мікрофізичних процесів ( $H \gg \Gamma_\phi$ ), хабблівське розрідження домінує, і густина енергії випромінювання перебуває у динамічній рівновазі між припливом енергії від розпаду та її охолодженням розширенням, поводячись як  $\rho_r \propto a^{-3/2}$ . Пертурбативний розпад завершується, коли параметри зрівнюються:  $H \approx \Gamma_\phi$ . Цей момент — злам на рис. 6.1 — є точкою переходу від інфлатонного до радіаційного домінування. У цей момент залишки конденсату інфлатона розпадаються майже миттєво.



**Рис. 6.1:** Еволюція параметра Хаббла  $H(t)$  від інфляції до радіаційної епохи. Під час інфляції  $H \approx \text{const}$ . Після закінчення інфляції осцилюючий інфлатон ( $w \approx 0$ ) дає  $H \propto t^{-1}$ . При  $H \sim \Gamma_\phi$  відбувається розігрів — злам кривої — після чого радіаційне домінування ( $w = 1/3$ ) дає пологіший спад  $H \propto t^{-1/2}$ .

Первинні високоенергетичні продукти розпаду, що перебували у сильно нерівноважному стані, починають інтенсивно взаємодіяти.

Під **термалізацією** в космології розуміють макроскопічний фазовий перехід системи від сильно нерівноважного кінетичного стану до стану локальної термодинамічної рівноваги, що супроводжується максимізацією ентропії. Цей процес відбувається через каскад пружних і непружних (із незбереженням кількості частинок) процесів розсіяння. Математично цей етап описується класичним кінетичним рівнянням Больцмана, де інтеграл зіткнень швидко перерозподіляє

енергію по ступенях вільності. Це призводить до затирання будь-якої пам'яті про початковий спектр продуктів розпаду та встановлює розподіл Планка з єдиною температурою для всіх релятивістських компонентів плазми.

### Температура розігріву $T_{\text{rh}}$

Температура розігріву визначається з умови рівності параметра Габбла і ширини розпаду  $H \approx \Gamma_\phi$ . Підставляючи класичний закон Стефана—Больцмана для густини енергії чорного тіла  $\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$  у перше рівняння Фрідмана  $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_r = \frac{8\pi}{3M_{\text{Pl}}^2} \rho_r$ , отримуємо фінальне значення температури завершення розігріву:

$$T_{\text{rh}} = \left( \frac{90}{8\pi^3 g_*} \right)^{1/4} \sqrt{M_{\text{Pl}} \Gamma_\phi}, \quad (6.4)$$

де  $M_{\text{Pl}} = G^{-1/2} \approx 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}$  — планківська маса, а  $g_* \sim 100$  — ефективна кількість релятивістських ступенів вільності Стандартної моделі при високих енергіях.

Величина  $T_{\text{rh}}$  є фундаментальним космологічним параметром, що задає початкові термодинамічні умови для всієї подальшої гарячої історії Всесвіту: від баріогенезису та електрослабкого фазового переходу до загартування первинного нуклеосинтезу (BBN) і термодинамічного відщеплення темної матерії.

Для нашої задачі критично важливим є наступний перехід: саме в момент остаточної термалізації утворена гаряча фотон-баріонна плазма дзеркально «успадковою» просторовий рельєф первинних неоднорідностей кривини  $\mathcal{R}_k$ , які були згенеровані квантовими флуктуаціями та заморожені поза космологічним горизонтом під час інфляції. Щойно радіація стає панівним компонентом Всесвіту, ці супергоризонтні збурення починають входити під горизонт. З цього моменту вони втрачають свій статичний характер — колосальний градієнт тиску ультрарелятивістського фотонного газу виступає як повертаюча сила, змушуючи речовину коливатися.

Цей процес повністю є еквівалентним класичній задачі гідродинаміки про поширення звуку в суцільному середовищі: градієнт тиску грає роль пружної сили, а баріони забезпечують інерційну масу. Саме ці гідродинамічні акустичні коливання, зафіксовані в епоху рекомбінації, ми спостерігаємо сьогодні у вигляді анізотропії температури на карті реліктового випромінювання (рис. 8.1) та у формі строгої послідовності акустичних піків на її кутовому спектрі потужності (рис. 8.2).

## Задачі

**№ 6.1 Загасання амплітуди інфлатона під час осциляцій** Поблизу мінімуму параболічного потенціалу  $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$  інфлатон осцилює за законом  $\phi(t) \approx \Phi_0(t) \sin(mt)$ .

1. Підставте цей розв'язок у рівняння Кляйна—Гордона  $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0$  і, нехтуючи  $\dot{\Phi}_0$  та  $\dot{\Phi}_0^2$ , покажіть, що  $\ddot{\Phi}_0 + \frac{3}{2}H\dot{\Phi}_0 = 0$ .
2. Розв'яжіть це рівняння та знайдіть  $\Phi_0(t)$  як функцію масштабного фактора  $a(t)$ .
3. Обчисліть усереднену за період густину енергії  $\rho_\phi = \frac{1}{2} m^2 \Phi_0^2$  та покажіть, що  $\rho_\phi \propto a^{-3}$ . Якій речовині відповідає така залежність?

**№ 6.2 Рівняння Мат'є та параметричний резонанс** Рівняння для моди  $\chi_k$  під час пре-розігріву має вигляд рівняння Мат'є з затуханням.

1. Виконайте заміну  $\chi_k = X_k \cdot a^{-3/2}$  та перейдіть до безрозмірного часу  $z = mt$ . Покажіть, що рівняння (6.1) зводиться до

$$\frac{d^2 X_k}{dz^2} + [A_k - 2q \cos(2z)] X_k = 0,$$

де  $q = \frac{g^2 \Phi_0^2}{4m^2}$ . Чому хабблівське тертя зникає після цієї заміни?

2. Поясніть фізичний зміст параметра  $q$ . У якому випадку резонанс є найефективнішим?
3. Чому народження частинок  $\chi$  відбувається навіть із початково вакуумного стану ( $N_k = 0$ )? Яку роль тут відіграють нульові коливання?

**№ 6.3 Пертурбативний розпад та температура розігріву** Після закінчення пре-розігріву залишки енергії інфлатона розпадаються пертурбативно з шириною  $\Gamma_\phi$ .

1. Використовуючи систему рівнянь (6.2)–(6.3), покажіть, що в режимі  $H \gg \Gamma_\phi$  густина радіації  $\rho_r \propto a^{-3/2}$ . (Підказка: припустіть, що  $\rho_\phi$  домінує і розпадається повільно.)
2. Умова завершення розігріву:  $H \approx \Gamma_\phi$ . Використовуючи  $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_r$  та  $\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$ , виведіть формулу для температури розігріву  $T_{\text{rh}} = \left( \frac{90}{8\pi^3 g_*} \right)^{1/4} \sqrt{M_{\text{Pl}} \Gamma_\phi}$ .
3. Для типової ширини розпаду  $\Gamma_\phi \sim 10^5 \text{ GeV}$  оцініть  $T_{\text{rh}}$ . Чи достатньо ця температура для електрослабкого фазового переходу ( $T \sim 100 \text{ GeV}$ )?

**№ 6.4 Чи може пре-розігрів створити надлишок темної матерії?**

Параметричний резонанс може народжувати частинки  $\chi$  дуже ефективно, навіть якщо  $\chi$  не має пертурбативних каналів розпаду. Припустимо, що  $\chi$  є стабільним або довгоживучим кандидатом на темну матерію.

1. Оцініть максимальну густину числа  $n_\chi$ , яку можна отримати за час пре-розігріву, якщо показник нестабільності  $\mu_k \sim 0.1$ .
2. Сучасне спостережене значення густини темної матерії  $\Omega_{\text{DM}} \approx 0.27$ . Яку масу  $m_\chi$  повинна мати частинка, щоб повністю складала темну матерію, народжену під час пре-розігріву?
3. Чому такий механізм називають *непертурбативним* народженням темної матерії? Які переваги він має перед термальним сценарієм?

## 7. Гідродинаміка фотон-баріонної плазми та акустичні осциляції

Після розігріву Всесвіт входить у радіаційно-доміновану епоху. Температура настільки висока, що баріонна матерія повністю іонізована: протони та електрони утворюють плазму, в якій фотони інтенсивно розсіюються на вільних електронах (томсонівське розсіяння). Середня довжина вільного пробігу фотона набагато менша за космологічний горизонт, тому випромінювання і баріони поведуться як єдина *фотон-баріонна плазма* [20].

Первинні неоднорідності кривини  $\mathcal{R}_k$ , успадковані від інфляції, стають початковими умовами для цієї плазми. Подальша динаміка визначається конкуренцією двох сил: гравітаційне притягання намагається стиснути речовину у потенціальні ями  $\Phi$ , а внутрішній тиск фотонного газу чинить опір. Результат — акустичні коливання.

Перш ніж переходити до суворих кількісних рівнянь релятивістської кінетики, уявимо фізичну картину цих процесів наочно.

Космологічне середовище того часу можна порівняти з гігантським пружним батутом. Роль самого полотна батута відіграє тканина простору-часу (гравітаційне поле). Первинні збурення кривини  $\mathcal{R}_k$ , які Всесвіт успадкував від інфляції — це початкові нерівності, «вм'ятини» та «горби» на самому полотні цього батута.

Холодна темна матерія, яка майже не має власного тиску і є абсолютно «прозорою» для фотонного випромінювання, намагається реагувати на первинні нерівності  $\mathcal{R}_k$  першою. Однак у радіаційно-доміновану епоху зростанню її збурень заважає так звана *стагнація Месароша* [34]: оскільки густина енергії випромінювання переважає, параметр Хаббла визначається ним, і це гальмує гравітаційний колапс темної матерії — збурення її густини ростуть лише логарифмічно по  $a$ , а не степеневу. Ситуація корінним чином змінюється після епохи рівності матерії та випромінювання ( $z_{\text{eq}} \approx 3400$ ). Скинувши ці обмеження, темна матерія починає домінувати гравітаційно. Вона безперешкодно злітається на дно вм'ятин і своєю масою остаточно продавляє «батут» простору-часу, перетворюючи первинний рельєф на стабільні, нерухомі «гравітаційні колодязі» — потенціали  $\Phi$ .

Потрапляючи в ці вже підготовлені структури, фотон-баріонна плазма, що заперта власним тиском, поводить себе як динамічна система з двох міцно склеєних компонентів:

- **Фотони** працюють як суперпружна, невагома *пружина*. Вони створюють колосальний тиск, чинять опір будь-якому стисненню і прагнуть розштовхати середовище назад.
- **Баріони** (протони та електрони) працюють як важкі *цеглини* або мішки з піском. Самі по собі вони не мають пружності, але забезпечують системі масу та інерцію.

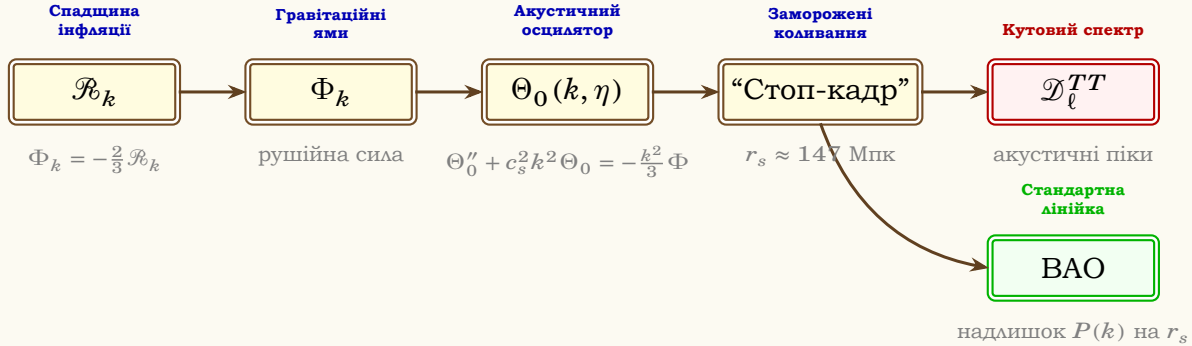
Коли такий згусток плазми опиняється в гравітаційній ямі, зовнішнє поле  $\Phi$  затягує важкі баріони до центру (фаза стиснення). Проте, стискаючись, фотонна «пружина» накопичує тиск і в певний момент із силою виштовхує речовину на-



зад (фаза розширення). Цей циклічний процес акустичних коливань триватиме всередині готових колодязів аж до моменту рекомбінації.

Тепер, тримаючи в голові цю механічну аналогію, математично опишемо, як саме виводяться ці закони руху із тензора енергії-імпульсу.

### Логічна карта розділу.



**Крок 1:**  $\mathcal{R}_k \rightarrow \Phi_k$  — **спадщина інфляції**. Первинна кривина  $\mathcal{R}_k$ , заморожена під час інфляції, після реогріву перетворюється на класичний ньютонівський гравітаційний потенціал. **У радіаційно-доміновану епоху, на надхабблових масштабах** ( $k \ll aH$ ) співвідношення має вигляд:

$$\Phi_k = -\frac{2}{3} \mathcal{R}_k.$$

Це «гравітаційні ями» і «горби», успадковані від квантового шуму — початкові умови для всієї подальшої динаміки.

**Крок 2:**  $\Phi_k \rightarrow \Theta_0(k, \eta)$  — **акустичний осцилятор**. Фотон-баріонна плазма реагує на ці ями конкуренцією двох сил: гравітаційне притягання стискає речовину, фотонний тиск — розштовхує. Результат — гармонічний осцилятор із рівнянням

$$\Theta_0'' + c_s^2 k^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3} \Phi, \quad c_s = \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}},$$

де  $\Theta_0 = \delta T/T$  — температурна флуктуація, а  $c_s$  — швидкість звуку у плазмі. Кожна мода  $k$  коливається незалежно, але всі стартують з однакової фази косинуса — наслідок когерентності інфляційних початкових умов.

**Крок 3:**  $\Theta_0(k, \eta_{\text{rec}})$  — **«стоп-кадр»**. У момент рекомбінації ( $z \approx 1100$ ) фотони відриваються від баріонів і вільно летять до нас. Акустичні коливання «заморожуються» у тому стані, в якому їх застала рекомбінація. Максимальна відстань, яку встигла пройти звукова хвиля — звуковий горизонт  $r_s \approx 147$  Мпк — є єдиним лінійним масштабом у задачі.

**Крок 4:**  $\Theta_0(k, \eta_{\text{rec}}) \rightarrow \mathcal{D}_\ell^{TT}$  — **проекція на небо**. Просторове поле  $\Theta_0(\mathbf{r}, \eta_{\text{rec}})$  проектується на небесну сферу: моди, що в момент рекомбінації були у точці максимального стиснення або розширення, дають піки кутового спектра  $\mathcal{D}_\ell^{TT}$ . Положення піків визначається виключно  $r_s$ , а їхні відносні висоти — баріонною густиною  $\Omega_b h^2$  і темною матерією  $\Omega_c h^2$ .

**Крок 5:** **ВАО — той самий  $r_s$  у галактиках**. Той самий звуковий горизонт залишає слід і в баріонній речовині: після рекомбінації баріони «замерзають» на радіусі  $r_s$  навколо кожної первинної неоднорідності. Сьогодні це проявляється як надлишок у кореляційній функції галактик на відстані  $\sim 147$  Мпк — «стандартна лінійка» для вимірювання  $H(z)$ .



## 7.1. Рівняння руху матерії у збуреній метриці

Динаміка будь-якої речовини у викривленому просторі-часі визначається законом збереження тензора енергії-імпульсу:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (7.1)$$

Для ідеальної рідини з густиною  $\rho$ , тиском  $p$  і 4-швидкістю  $u^\mu$ :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}. \quad (7.2)$$

Розкладемо кожен величину на однорідний фон і мале збурення:

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho, \quad p = \bar{p} + \delta p, \quad u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u^\mu,$$

де фонові 4-швидкості для співрухомого спостерігача  $\bar{u}^\mu = (1/a, \mathbf{0})$  у конформному часі. Збурення просторової швидкості позначимо  $\delta u^i \equiv v^i/a^1$ , де  $\mathbf{v}$  — фізична пекулярна швидкість рідини.

### Рівняння неперервності ( $\nu = 0$ )

Нульова компонента (7.1) у конформно-ньютонівській метриці (4.2) після лінеаризації дає:

$$\delta' + (1 + w)(\theta - 3\Psi') + 3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta = 0, \quad (7.3)$$

де  $\delta \equiv \delta\rho/\bar{\rho}$  — відносний контраст густини,  $\theta \equiv \partial_i v^i$  — дивергенція поля швидкостей,  $w \equiv \bar{p}/\bar{\rho}$  — параметр рівняння стану,  $c_s^2 \equiv \delta p/\delta\rho$  — квадрат швидкості звуку<sup>2</sup>. Член  $(1 + w)(\theta - 3\Psi')$  — потік речовини з урахуванням метричного збурення;  $3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta$  — хаббловське розбавлення густини.

Для фотонів ( $w = 1/3$ ,  $c_s^2 = 1/3$ ,  $\delta_\gamma \equiv \delta\rho_\gamma/\bar{\rho}_\gamma$ ) і на субхабблових масштабах де  $\Psi' \ll k^2\Psi$ , рівняння (7.3) у Фур'є-просторі спрощується до:

$$\delta'_\gamma = -\frac{4}{3}\theta + 4\Phi', \quad (7.4)$$

де член  $4\Phi'$  відображає зміну об'єму просторових гіперповерхонь через потенціал  $\Phi$ .

### Рівняння Ейлера ( $\nu = i$ )

Просторові компоненти (7.1) після лінеаризації дають рівняння руху для поля швидкостей. Фізичний зміст кожного члена стає прозорим, якщо записати результат у вигляді узагальненого другого закону Ньютона для елемента рідини:

$$\theta' + \mathcal{H}(1 - 3w)\theta = -\frac{c_s^2}{1 + w}k^2\delta - k^2\Phi. \quad (7.5)$$

Тут:

<sup>1</sup>Множник  $1/a$  має простий геометричний зміст. Просторові координати  $x^i$  у метриці FLRW є *супутніми* — вони не змінюються при хаббловському розширенні. Фізична пекулярна швидкість (відхилення від хаббловського потоку) дорівнює  $v^i = a\dot{x}^i$ , тобто  $\dot{x}^i = v^i/a$ . Оскільки просторова компонента 4-швидкості у конформному часі  $\delta u^i = dx^i/d\eta = a\dot{x}^i/a = \dot{x}^i$  — виходить  $\delta u^i = v^i/a$ . Інакше кажучи:  $v^i$  — це фізична пекулярна швидкість, а  $\delta u^i$  — її аналог у конформних координатах, послаблений множителем  $a$  через розтягування просторової сітки.

<sup>2</sup>Для адіабатичних збурень (які ми розглядаємо)  $c_s^2 = \dot{p}/\dot{\rho}$ ; для фотон-баріонної плазми ця умова виконується.

- $\theta'$  — прискорення елемента рідини,
- $\mathcal{H}(1-3w)\theta$  — хаббловське гальмування (тертя через розширення простору): для нерелятивістської матерії ( $w = 0$ ) воно сповільнює рух, для радіації ( $w = 1/3$ ) воно зникає,
- $-\frac{c_s^2}{1+w}k^2\delta$  — сила градієнта тиску: саме вона є *відновлювальною силою* акустичних коливань,
- $-k^2\Phi$  — гравітаційне притягання до потенціальних ям — сила що намагається стиснути речовину.

Для об'єднаної фотон-баріонної рідини з параметром  $R \equiv 3\bar{\rho}_b/4\bar{\rho}_\gamma^3$  рівняння Ейлера (7.5) після лінеаризації та врахування тісного зчеплення набуває вигляду:

$$\theta' + \mathcal{H}\frac{R}{1+R}\theta = \frac{k^2}{1+R}\Theta_0 - k^2\Phi, \quad (7.6)$$

де  $\Theta_0 \equiv \delta_\gamma/4 = \delta T/T$  — температурна флуктуація.

Фізичний зміст окремих членів:

- Член  $\mathcal{H}\frac{R}{1+R}\theta$  описує ефективне тертя, зумовлене розширенням простору. Він менший, ніж у чистій фотонній плазмі, оскільки баріони додають інерцію, але не збільшують тертя пропорційно.
- Член  $\frac{k^2}{1+R}\Theta_0$  походить від градієнта фотонного тиску. Велика інерція баріонів ( $R > 0$ ) зменшує прискорення, яке створює цей градієнт — тому в знаменнику з'являється  $1 + R$ .
- Член  $-k^2\Phi$  — звичайне гравітаційне притягання до потенціальної ями.

### Від двох рівнянь до акустичного осцилятора

Акустичні коливання виникають лише на *субхабблових* масштабах ( $k \gg \mathcal{H}$ ): тільки тоді різні точки плазми перебувають у причинному контакті і можуть коливатися узгоджено. На *надхабблових* масштабах ( $k \ll \mathcal{H}$ ) моди заморожені.

Щоб побачити структуру осцилятора явно, виключимо  $\theta$  з системи (7.4) і (7.6): диференціюємо перше рівняння за  $\eta$  і підставляємо  $\theta'$  з другого. У конформно-ньютонівському калібруванні  $\Phi = \Psi$ ; нехтуємо членами з  $\mathcal{H}$  на субхабблових масштабах — отримуємо рівняння вимушеного акустичного осцилятора:

$$\frac{d}{d\eta}[(1+R)\delta'_\gamma] + \frac{k^2}{3(1+R)}\delta_\gamma = -\frac{k^2}{3}\Phi. \quad (7.7)$$

**Ліва частина** — осцилятор із змінною ефективною масою  $(1+R)$  у першому члені (похідна) та частотою, що залежить від  $1/(1+R)$ . Чому саме  $(1+R)$ ? У релятивістській рідині відновлювальна сила визначається тиском, а інерція —

<sup>3</sup>Множник  $3/4$  не є довільним: у релятивістській гідродинаміці роль інертної маси відіграє ентальпія  $\rho + p$ , а не лише  $\rho$ . Для фотонного газу  $p_\gamma = \rho_\gamma/3$ , тому  $\rho_\gamma + p_\gamma = \frac{4}{3}\rho_\gamma$ , і параметр  $R$  є відношенням інерційної маси баріонів до інерційної маси фотонів:  $R = \bar{\rho}_b/(\frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma) = 3\bar{\rho}_b/4\bar{\rho}_\gamma$ . Власна швидкість звуку баріонного газу при  $T \sim 10^4$  К нерелятивістська:  $c_s^{(b)} \sim \sqrt{T/m_p} \sim 10^{-5}c$  — тому баріонний тиск нехтовний і тиск плазми визначається виключно фотонами.

ентальпією  $\rho + p$ , а не лише  $\rho$ . Для фотон-баріонної суміші ефективна інерція є  $\rho_\gamma + p_\gamma + \rho_b = \frac{4}{3}\rho_\gamma(1 + R)$ , звідси швидкість звуку:

$$c_s(\eta) = \frac{1}{\sqrt{3(1 + R(\eta))}}. \quad (7.8)$$

При  $R \rightarrow 0$ :  $c_s \rightarrow 1/\sqrt{3}$  — чиста фотонна плазма. При  $R \gg 1$ :  $c_s \rightarrow 0$  — важкі баріони гальмують коливання. Оскільки  $R \propto a$ , швидкість звуку монотонно спадає до рекомбінації.

**Права частина** — гравітаційне вимушення потенціалом  $\Phi$ , що зміщує рівноважне положення осцилятора: баріони «скочуються» у ями темної матерії, що підсилює стиснення і підвищує непарні піки відносно парних.

Зауважимо, що рівняння (7.7) записане лише для фотонної компоненти  $\delta_\gamma$  — але це не спрощення. У режимі тісного зчеплення — коли фотони встигають розсіятися на електронах багато разів за один хаббловський час ( $\tau_c \ll H^{-1}$ ) — томсонівське розсіяння утримує фотони і баріони як єдину рідину:  $\delta_b \approx \frac{3}{4}\delta_\gamma$  і поля пекулярних швидкостей двох компонент збігаються ( $\theta_b = \theta_\gamma$ , де  $\theta \equiv \partial_i v^i$  — дивергенція поля швидкостей). Вплив баріонів повністю закодований у параметрі  $R$  — через ефективну інерцію  $(1 + R)$  і швидкість звуку  $c_s = 1/\sqrt{3(1 + R)}$ .

Кожна мода  $k$  коливається незалежно. Початкова умова для всіх мод задається інфляційним збуренням  $\mathcal{R}_k$  (§5): при вході під горизонт  $\delta_\gamma \propto \mathcal{R}_k$  і  $\delta'_\gamma \approx 0$  — тобто всі моди стартують з максимального стиснення, у фазі косинуса. Розв'язок осцилятора тому має вигляд  $\delta_\gamma(k, \eta) \propto \mathcal{R}_k \cos(kr_s(\eta))$ , де  $r_s = \int_0^\eta c_s d\eta'$  — звуковий горизонт. Оскільки початкова фаза однакова для всіх мод з однаковим  $k$  незалежно від їхнього просторового положення, осциляції є *когерентними* — саме це породжує чіткі акустичні піки на спектрі СМВ, на відміну від некогерентних джерел типу топологічних дефектів, які дають лише згладжений горб (рис. 7.2).

Зручно увести скорочене позначення для середньої (по напрямках) температурної флуктуації<sup>4</sup>:

$$\Theta_0 \equiv \frac{\delta_\gamma}{4} = \frac{\delta T}{T}, \quad (7.9)$$

де останній зв'язок випливає із  $\rho_\gamma \propto T^4$ <sup>5</sup>.

Підставимо  $\delta_\gamma = 4\Theta_0$  у рівняння осцилятора (7.7):

$$\frac{d}{d\eta}[(1 + R) \cdot 4\Theta'_0] + \frac{k^2}{3} \cdot 4\Theta_0 = -\frac{k^2}{3}(1 + R) \Phi.$$

Множник 4 скорочується. Розкриємо похідну в лівій частині:

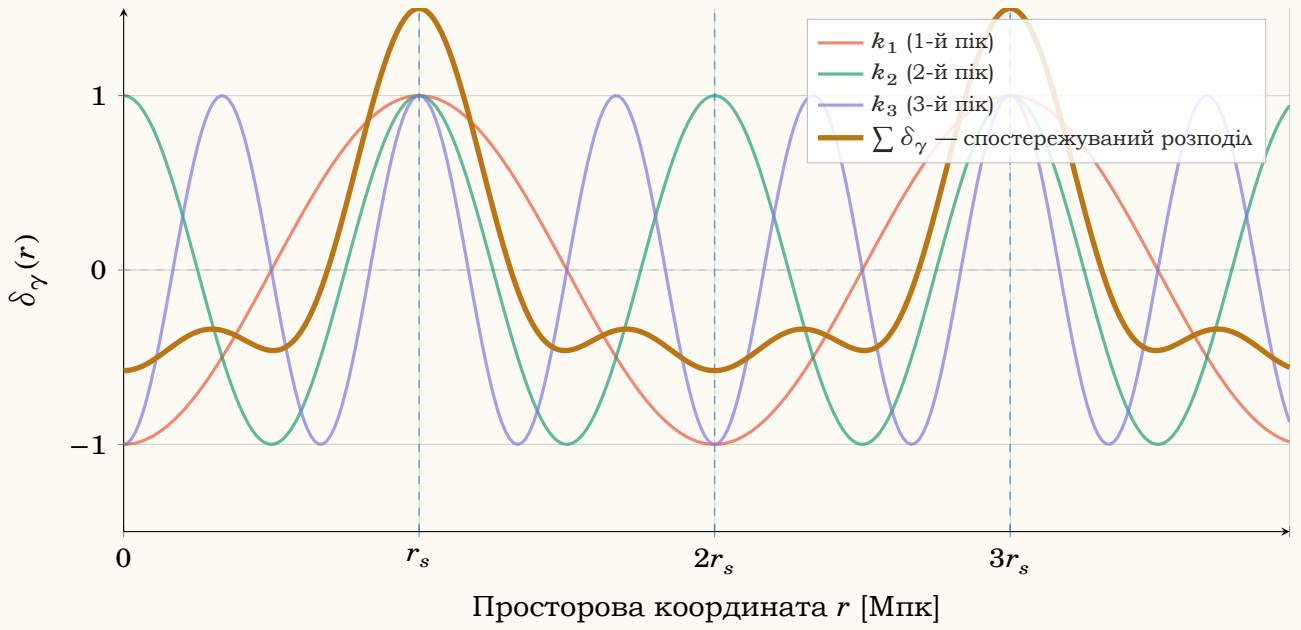
$$(1 + R) \Theta''_0 + R' \Theta'_0 + \frac{k^2}{3(1 + R)} \Theta_0 = -\frac{k^2}{3} \Phi.$$

Ділимо на  $(1 + R)$  і отримуємо **рівняння гармонічного осцилятора** із зовнішньою силою та згасаючим членом:

$$\Theta''_0 + \frac{R'}{1 + R} \Theta'_0 + c_s^2 k^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3} \Phi, \quad c_s^2 = \frac{1}{3(1 + R)}. \quad (7.10)$$

<sup>4</sup>Строго кажучи,  $\Theta_0$  — нульовий момент (монополь) розкладу  $\delta T/T$  за сферичними гармоніками по напрямку імпульсу фотона; це стане зрозумілішим у розділі про анізотропії СМВ, де розглядається повна ієрархія  $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \dots$

<sup>5</sup> $\delta\rho_\gamma = 4(\rho_\gamma/T) \delta T$ , тому  $\delta_\gamma \equiv \delta\rho_\gamma/\bar{\rho}_\gamma = 4 \delta T/T$ . Множник 4 — просто показник степеня.



**Рис. 7.1:** Просторовий «знімок» розподілу  $\delta_\gamma(r)$  у момент рекомбінації — суперпозиція мод, заморожених у різних амплітудах (пор. з рис. 7.2). Бурштинова крива — спостережуваний сигнал, що кодується у кутовий спектр  $\mathcal{D}_\ell^{TT}$ . Пунктирні вертикалі — масштаби  $r_s$ ,  $2r_s$ ,  $3r_s \approx 147$  Мпк, що відповідають акустичним пікам.

Тут  $c_s$  — швидкість звуку (7.8). Права частина — постійна зовнішня сила (зміщення рівноваги гравітаційним потенціалом темної матерії).

Загальний розв'язок — косинус плюс зміщення рівноваги:

$$\Theta_0(k, \eta) = [\Theta_0(0) + (1 + R)\Phi] \cos(kc_s\eta) - (1 + R)\Phi.$$

Для адіабатичних початкових умов ( $\Theta_0(0) = -\Phi/2$ ,  $\Theta'_0(0) = 0$ ) у наближенні  $R \ll 1$ :

$$\Theta_0(k, \eta) \approx \Theta_0(0) \cos(kc_s\eta). \quad (7.11)$$

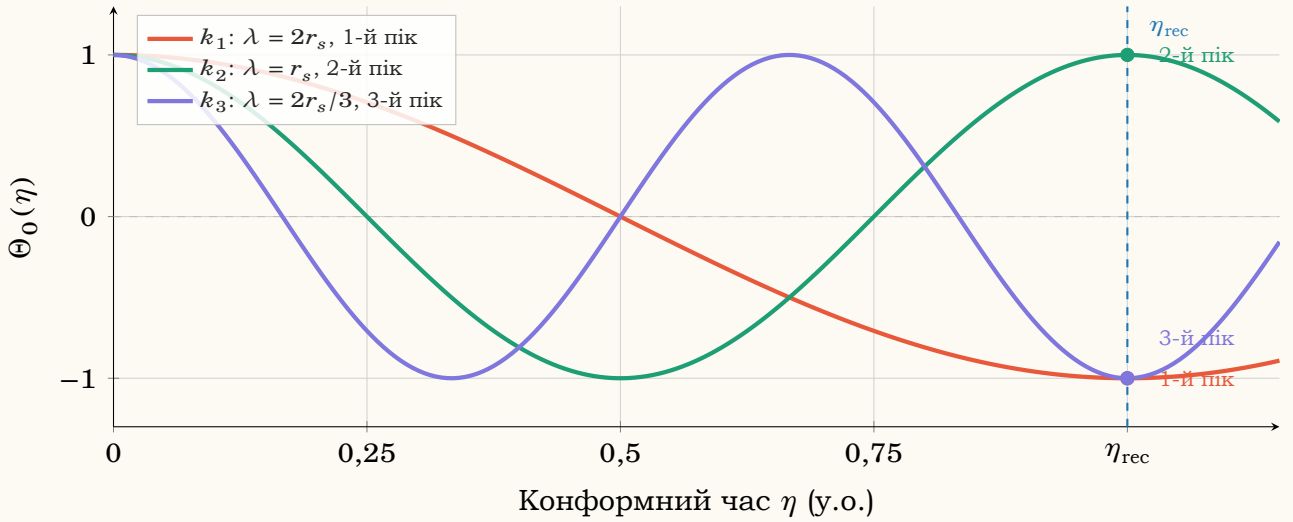
Це і є ті косинусні коливання, що зображені на рис. 7.2: кожна мода коливається зі своєю частотою  $\omega_k = kc_s$ , але всі стартують з однакової фази — звідси когерентність і чіткі піки.

### Чому косинус, а не синус?

Початкова умова від інфляції:  $\delta'_\gamma(0) \approx 0$  — плазма стартує зі стану максимального стиснення, без початкової швидкості. Це як відпустити пружину зі стиснутого стану — вона починає з максимуму, а не з нуля. Якби початкова умова була  $\delta_\gamma(0) = 0$ ,  $\delta'_\gamma(0) \neq 0$  — отримали б синус, і піки СМВ стояли б в інших місцях. Саме тому когерентність (однакова фаза для всіх  $k$ ) — це пряма ознака інфляційного походження збурень: некогерентні джерела (топологічні дефекти) дають випадкові фази і розмазаний горб замість чітких піків.

## 7.2. Рекомбінація, звуковий горизонт і ВАО

Акустичні коливання тривають до *рекомбінації* ( $z_{\text{rec}} \approx 1100$ ,  $T \approx 3000$  К): протони захоплюють електрони, іонізація припиняється, томсонівське розсіяння вимикається і фотони починають вільно поширюватися. Плазма «заморожується» в тому стані, в якому її застала рекомбінація.



**Рис. 7.2:** Еволюція трьох характерних мод  $\Theta_0(\eta) = \delta_\gamma/4$  у конформному часі (нормовано на  $\eta_{\text{rec}}$ ). Всі моди стартують з однакової фази — це наслідок інфляційного збурення  $\mathcal{P}_k$  (§ 5). Точки показують амплітуду кожної моди в момент «стоп-кадру» — рекомбінації  $\eta_{\text{rec}}$ .

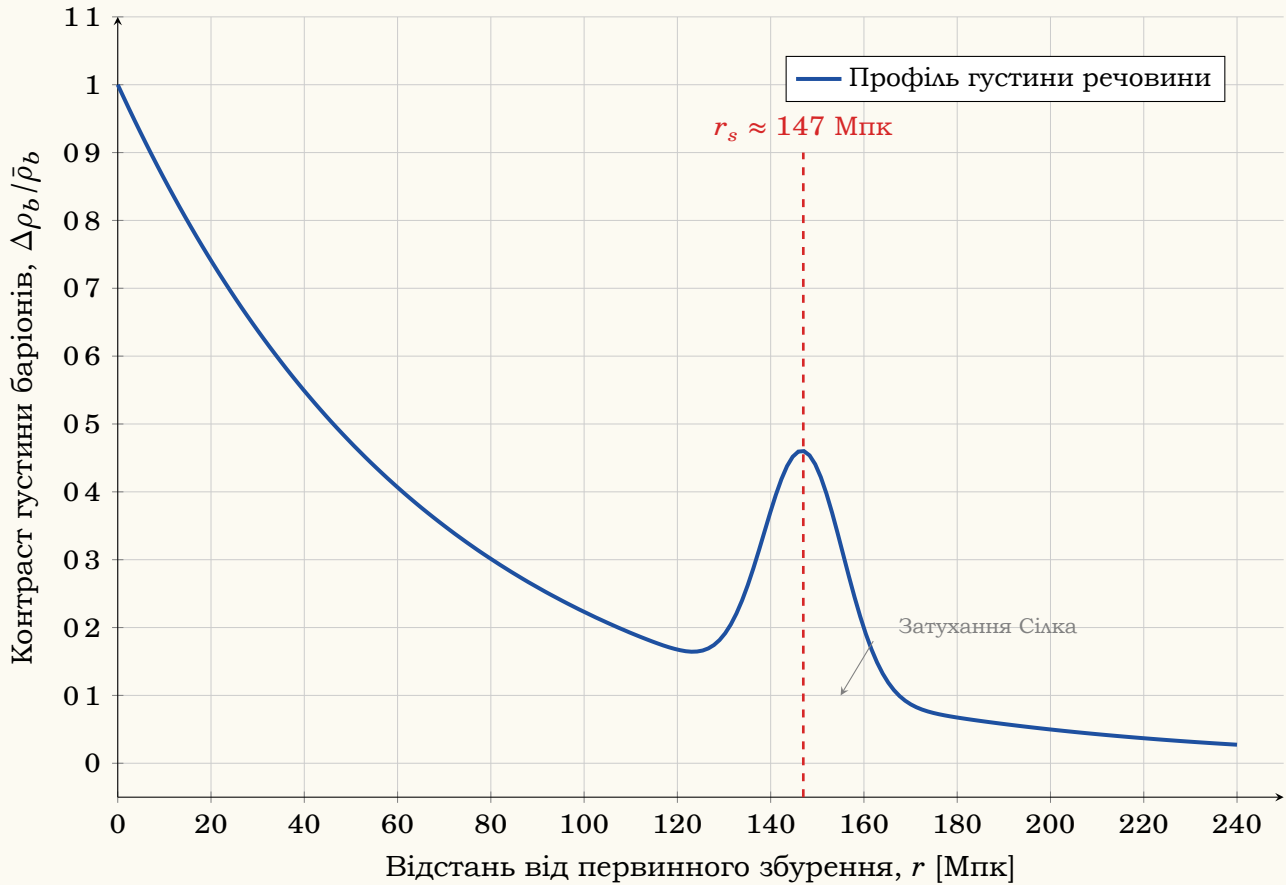
Максимальна відстань, яку встигла пройти звукова хвиля від початку гарячої епохи до рекомбінації, — *радіус звукового горизонту*:

$$r_s(\eta_{\text{rec}}) = \int_{\eta_{\text{reh}}}^{\eta_{\text{rec}}} c_s(\eta) d\eta \approx 147 \text{ Мпр}, \quad (7.12)$$

де  $\eta_{\text{reh}}$  — момент реогріву (початок гарячої епохи); оскільки  $c_s \rightarrow 1/\sqrt{3}$  при ранніх часах, нижня межа практично не впливає на результат і часто пишуть 0. Це єдиний лінійний масштаб у задачі. Моди, що в момент рекомбінації перебували у точці максимального стиснення або розширення, проявляються у температурному спектрі СМВ як серія *акустичних піків* — докладніше у § 8. Просторовий розподіл  $\delta_\gamma(r)$  у цей момент — «стоп-кадр» заморожених коливань — показано на рис. 7.1.

Але акустичні хвилі залишають слід не лише у фотонах. Після рекомбінації фотони пішли геть, а баріонна речовина «замерзла» у вигляді сферичної оболонки радіусом  $r_s$  навколо кожної початкової неоднорідності темної матерії (рис. 7.3). Це — **баріонні акустичні осциляції (БАО)** [35]. На рисунку показано профіль густини баріонів навколо точкового первинного збурення: вісь  $r$  — відстань від центру збурення, крива — надлишок густини баріонів. Чіткий пік на  $r \approx r_s \approx 147$  Мпк — це «відлуння» звукової хвилі, замороженої у момент рекомбінації.

У сучасну епоху масштаб БАО проявляється як фіксований надлишок у просторовій кореляційній функції розподілу галактик на відстані  $\sim 147$  Мпк. Оскільки  $r_s$  жорстко визначений лінійною фізикою раннього Всесвіту (7.12), БАО — ідеальна «стандартна лінійка»: вимірюючи цей масштаб на різних червоних зміщеннях, можна реконструювати  $H(z)$  і параметри темної енергії незалежно від СМВ.



**Рис. 7.3:** Схематичний профіль поширення первинного адіабатичного збурення у баріонній компоненті плазми (модельна крива). Надлишок речовини на радіусі звукового горизонту  $r_s$  відповідає сучасному масштабу ВАО.

### Чому ВАО — «стандартна лінійка»?

Уявіть що у стародавні часи хтось розставив мітки кожні 147 Мпк у просторі. Тепер, вимірюючи кутовий розмір цих міток на різних відстанях ( $z$ ), можна дізнатися як простір між нами і ними розширювався — тобто  $H(z)$ . Головне: відстань 147 Мпк визначена фізикою раннього Всесвіту (швидкість звуку і час рекомбінації), яка добре відома — тому «лінійка» надійна.

Той самий звуковий горизонт  $r_s$ , що визначає масштаб ВАО у розподілі галактик, відповідає і за положення акустичних піків у температурному спектрі СМВ. Як саме ці піки формуються — і які інші ефекти на них накладаються — розглядається у наступному розділі.

## Задачі

**№ 7.1 Рівняння неперервності та Ейлера для фотон-баріонної плазми** Закон збереження тензора енергії-імпульсу  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  дає рівняння неперервності (7.3) та Ейлера (7.5).

1. Для фотонів ( $w = 1/3$ ,  $c_s^2 = 1/3$ ) на субхабблових масштабах спростіть рівняння неперервності до вигляду  $\delta'_\gamma = -\frac{4}{3}\theta + 4\Phi'$ . Поясніть фізичний зміст кожного члена.
2. Для фотон-баріонної рідини з параметром  $R = 3\bar{\rho}_b/4\bar{\rho}_\gamma$  рівняння Ейлера набуває



вигляду (7.6). Поясніть, чому присутність баріонів ( $R > 0$ ) зменшує прискорення рідини під дією градієнта тиску.

3. У границі  $R \rightarrow 0$  (чиста фотонна плазма) покажіть, що з цих рівнянь випливає  $\Theta_0'' + \frac{k^2}{3} \Theta_0 = -\frac{k^2}{3} \Phi$ .

**№ 7.2 Акустичний осцилятор та початкові умови** Рівняння для температурної флуктуації  $\Theta_0 = \delta_\gamma/4$  у наближенні  $R \ll 1$  має вигляд  $\Theta_0'' + c_s^2 k^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3} \Phi$ , де  $c_s^2 = 1/3$ .

1. Знайдіть загальний розв'язок цього рівняння при сталому  $\Phi$ .
2. Інфляційні збурення задають початкові умови:  $\Theta_0(0) = -\Phi/2$ ,  $\Theta_0'(0) = 0$ . Покажіть, що тоді  $\Theta_0(\eta) = \Theta_0(0) \cos(kc_s\eta)$ .
3. Чому початкова фаза косинусна, а не синусна? Що б змінилося в кутовому спектрі СМВ, якби  $\Theta_0'(0) \neq 0$ ?

**№ 7.3 Звуковий горизонт та його значення** Звуковий горизонт визначається як  $r_s(\eta_{\text{rec}}) = \int_0^{\eta_{\text{rec}}} c_s(\eta) d\eta$ .

1. У радіаційно-доміновану епоху  $c_s = 1/\sqrt{3}$  (в одиницях  $c = 1$ ), а конформний час  $\eta \propto a$ . Покажіть, що  $r_s(\eta_{\text{rec}}) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_{\text{rec}}$ .
2. Використовуючи  $\eta = \int da/(a^2 H)$  та  $H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3}}$ , виконайте чисельне інтегрування або скористайтесь відомим результатом:  $r_s \approx 147$  Мпк.
3. Чому  $r_s \approx 147$  Мпк є «стандартною лінійкою» для ВАО? Як зміна  $r_s$  вплинула б на положення акустичних піків у спектрі СМВ?

**№ 7.4 Ефект баріонного завантаження** Параметр  $R = 3\bar{\rho}_b/4\bar{\rho}_\gamma$  зростає з часом, оскільки  $\rho_b \propto a^{-3}$ , а  $\rho_\gamma \propto a^{-4}$ . На момент рекомбінації  $R \sim 0.6$ .

1. Використовуючи точний розв'язок рівняння (7.10), покажіть, що повне збурення, яке визначає температурну анізотропію, має вигляд  $(\Theta_0 + \Phi)_{\text{rec}} = \Theta_0(0) \cos(kr_s) - R\Phi$ .
2. Поясніть, чому непарні акустичні піки ( $\cos(kr_s) = -1$ ) підсилюються відносно парних ( $\cos(kr_s) = +1$ ).
3. Як за відношенням висот перших двох піків можна визначити баріонну густину  $\Omega_b h^2$ ?

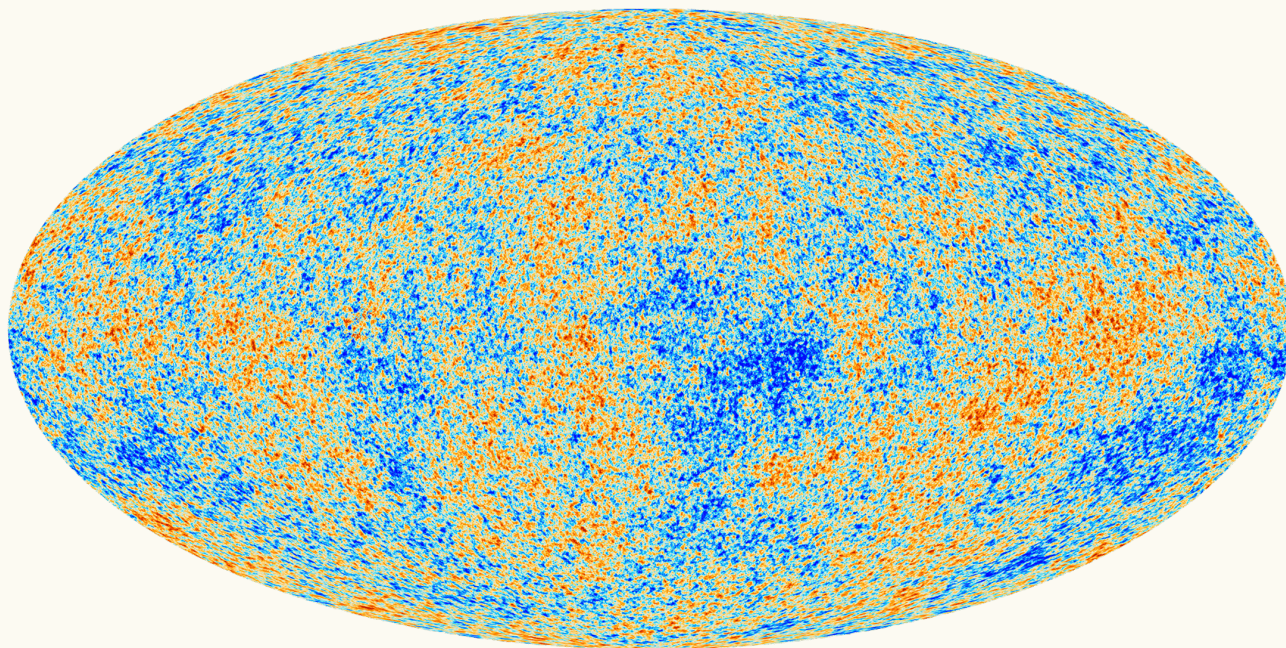
**№ 7.5 Чи можна побачити акустичні осциляції в розподілі галактик сьогодні?**

Після рекомбінації баріонна речовина «замерзає» на радіусі звукового горизонту  $r_s$  навколо кожної первинної неоднорідності темної матерії. Це створює надлишок ймовірності знайти галактики на відстані  $\sim r_s$  одна від одної.

1. Оцініть фізичний масштаб  $r_s$  у сучасну епоху (з урахуванням розширення). Виразіть його в Мпк.
2. Який кутовий масштаб  $\theta$  на небі відповідає цій відстані на червоному зсуві  $z \sim 0.5$ ? ( $d_A(z)$  — кутова відстань.)
3. Чому вимірювання ВАО на різних  $z$  дозволяє визначити  $H(z)$  незалежно від калібрування відстаней?

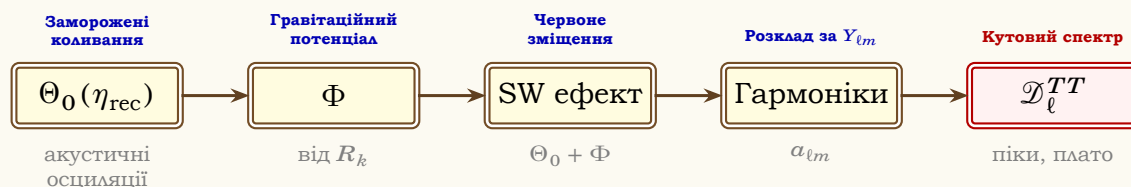
## 8. Ефект Закса-Вольфа та формування кутового спектра СМВ

Кутова анізотропія температури реліктового випромінювання (СМВ), яку ми спостерігаємо сьогодні (рис. 8.1), є безпосереднім реліктовим «знімком» стану раннього Всесвіту в епоху рекомбінації ( $z_{\text{rec}} \approx 1100$ ). Флуктуації температури на небесній сфері формуються внаслідок накладання кількох фізичних процесів, що відбувалися на поверхні останнього розсіяння (LSS).



**Рис. 8.1:** Карта температурних анізотропій СМВ від місії Planck 2018 [3]. Кольори відображають відхилення від середнього  $T_0 = 2.725 \text{ K}$  у діапазоні  $\pm 300 \mu\text{K}$  — спостережуваний відбиток первинних флуктуацій інфлатона після  $\sim 380\,000$  років еволюції. Зображення: ESA and the Planck Collaboration [36].

### Логічна карта розділу



**Крок 1:  $\Theta_0$  та  $\Phi$  на поверхні останнього розсіяння.** Після рекомбінації ( $z \approx 1100$ ) фотони вільно летять до нас. Їхня температура модулюється двома ефектами: внутрішньою температурною флуктуацією  $\Theta_0$  (акустичні осциляції) та гравітаційним червоним зміщенням  $\Phi$  при виході з потенціальних ям.

**Крок 2: ефект Закса-Вольфа.** Комбінація  $(\Theta_0 + \Phi)_{\text{rec}}$  є калібрувально-інваріантною і безпосередньо визначає температурну анізотропію на поверхні останнього розсіяння. На супергоризонтних масштабах вона дає плато; на субхабблових — акустичні піки.

**Крок 3: проекція на небесну сферу.** Розкладаємо карту  $\delta T/T(\theta, \phi)$  за сферичними гармоніками  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ . Коефіцієнти  $a_{\ell m}$  містять інформацію про всі масштаби.

**Крок 4: кутовий спектр потужності.** Усереднення за  $m$  дає  $C_\ell = \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$  — статистичну характеристику, інваріантну відносно орієнтації. Масштабований спектр  $\mathcal{D}_\ell = \ell(\ell + 1)C_\ell/(2\pi)$  візуально виділяє акустичні піки.

**Крок 5: баріонне завантаження.** Параметр  $R = 3\rho_b/4\rho_\gamma$  асиметризує піки: непарні піки підсилюються відносно парних, що дозволяє виміряти  $\Omega_b h^2$ .

З погляду релятивістської кінетичної теорії, повна варіація температури у заданому напрямку  $\hat{\mathbf{n}}$  описується калібровочно-інваріантним рівнянням, що враховує як внутрішні властивості плазми, так і геометрію простору-часу [37]:

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = (\Theta_0 + \Phi)_{\text{rec}} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_b)_{\text{rec}} + 2 \int_{\eta_{\text{rec}}}^{\eta_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\eta, \quad (8.1)$$

де  $\Theta_0 = \delta_\gamma/4 = \delta T/T$  на поверхні останнього розсіяння (див. (7.9)).

Тут перший доданок відображає *ефект Закса-Вольфа* — комбінацію монопольної компоненти збурення температури фотонів  $\Theta_0$  (введеної у розділі 7) та гравітаційного червоного зміщення  $\Phi$  при виході фотонів з потенціальних ям. Другий доданок відповідає за доплерівський зсув частоти через пекулярний рух баріонної компоненти зі швидкістю  $\mathbf{v}_b$ . Третій доданок є *інтегральним ефектом Закса-Вольфа (ISW)* — він враховує еволюцію гравітаційних потенціалів  $\Phi$  вздовж траєкторії фотонів до спостерігача. ISW діє на двох епохах: у ранній радіаційно-домінантній фазі потенціали розпадаються через перехід мод під горизонт, де тиск радіації підтримує коливання, що дає ранній ISW ефект на мультиполях  $\ell \sim 100\text{--}200$ ; а в сучасну епоху темна енергія прискорює розширення і потенціали знову змінюються — це пізній ISW, який проявляється як слабкий підйом спектра при найменших  $\ell \lesssim 10$ .

Рівняння (8.1) є фундаментальним, оскільки воно повністю описує локальну мікрофізику на реліктовому обрії. Проте безпосереднє зіставлення цього виразу з астрофізичними спостереженнями стикається з принциповою перешкодою: ми спроможні виміряти параметри плазми не в кожній тривимірній точці раннього Всесвіту, а лише фіксуємо двовимірну проекцію цих процесів на небесну сферу. Щобільше, конкретний візерунок гарячих і холодних плям у нашому куточку Космосу є випадковою реалізацією первинних квантових флуктуацій. Для перевірки теоретичних моделей нам потрібні не локальні значення  $\delta T/T$  у конкретному напрямку, а об'єктивні статистичні характеристики, що є інваріантними відносно положення спостерігача. Саме ця потреба змушує перейти від конфігураційного простору до гармонічного аналізу сигналів на сфері.

## 8.1. Гармонічний аналіз та кутовий спектр потужності

Оскільки спостережуваний візерунок температурних флуктуацій  $\Delta T(\theta, \phi) = T(\theta, \phi) - T_{\text{avg}}$  фіксується на двовимірній сфері, природним математичним базисом для його статистичного опису є розклад за ортонормованими *сферичними гармоніками*  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ :

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (8.2)$$



де безрозмірні комплекснозначні коефіцієнти  $a_{\ell m}$  відіграють роль амплітуд флуктуацій. Мультипольний момент  $\ell$  визначає просторову частоту і є обернено пропорційним кутовому масштабу структури на небі:  $\theta \approx 180^\circ/\ell$ .

Для побудови теорії, вільної від вибору конкретної системи координат чи орієнтації інструментів спостереження, вводять безрозмірний *кутовий спектр потужності*  $C_\ell$ . Припускаючи статистичну ізотропію та однорідність первинних збурень, двоточковий корелятор коефіцієнтів усереднюється за всіма можливими проекціями  $m$ , повністю затираючи просторові координати:

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_\ell \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (8.3)$$

Проте в реальних експериментах (наприклад, у космічній місії *Planck*) вимірюють флуктуації безпосередньо в термодинамічних одиницях температури (мікрокельвінах,  $\mu\text{K}$ ). Крім того, на практиці замість сирого спектра  $C_\ell$  прийнято оперувати *масштабованим (або згладженим) кутовим спектром потужності*  $\mathcal{D}_\ell^{TT}$ , який означається як:

$$\mathcal{D}_\ell^{TT} \equiv \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} T_0^2 C_\ell^{TT}, \quad (8.4)$$

де  $T_0 \approx 2.7255 \text{ K}$  — середня температура реліктового фону сьогодні. Множник  $\ell(\ell+1)$  має глибокий фізичний зміст: він повністю компенсує спадання амплітуди великомасштабних флуктуацій, перетворюючи чисто геометричний ефект Закса-Вольфа на плоске плато в області малих мультиполів, що значно спрощує візуальний аналіз спектра.

Прямий фізичний зв'язок між тривимірними модами первинних збурень у просторі Фур'є (що мають хвильове число  $k$ ) та двовимірними мультиполями  $\ell$  задається відстанню кутового діаметра  $d_A$  до поверхні останнього розсіювання. З простої геометричної проекції плоскої хвилі довжиною  $\lambda = 2\pi/k$  випливає наближене співвідношення:

$$\ell \approx k \cdot d_A. \quad (8.5)$$

Строгий математичний перехід здійснюється через інтегрування за допомогою сферичних функцій Бесселя  $j_\ell(kd_A)$ :

$$C_\ell \propto \int_0^\infty |\Theta_k(\eta_{\text{rec}})|^2 \cdot j_\ell^2(kd_A) \cdot k^2 dk. \quad (8.6)$$

Кінематична властивість функції  $j_\ell(x)$  полягає в тому, що вона є практично нульовою при  $x < \ell$  і зазнає різкого локального сплеску саме в околі точки  $x \approx \ell$ , що математично легалізує та обґрунтовує наближення (8.5).

## 8.2. Від акустичних коливань до піків спектра

У розділі 7 ми показали, що фотон-баріонна плазма на субхабблових масштабах коливається як гармонічний осцилятор (7.10), і що розв'язок для адіабатичних початкових умов має вигляд  $\Theta_0(k, \eta) \approx \Theta_0(0) \cos(kc_s \eta)$  (формула (7.11)).

Рекомбінація діє як «стоп-кадр»: фаза коливань заморожується при  $\eta = \eta_{\text{rec}}$ . Внесок кожної моди  $k$  у кутову анізотропію визначається саме цією замороженою амплітудою, тому кутовий спектр потужності пропорційний її квадрату:

$$C_\ell \propto \cos^2(kc_s \eta_{\text{rec}}) \Big|_{k \approx \ell/d_A}. \quad (8.7)$$

Екстремуми при  $kc_s\eta_{\text{rec}} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  дають серію *акустичних піків* у спектрі  $\mathcal{D}_\ell^{TT}$ .

На супергоризонтних масштабах ( $k \ll aH$ , тобто  $\ell \lesssim 30$ ) коливань немає — домінує чисто геометричний ефект Закса-Вольфа. Для адіабатичних збурень  $\Theta_0 = -\frac{2}{3}\Phi$ , і ефективна температурна флуктуація при виході з ями:

$$(\Theta_0 + \Phi) \Big|_{\text{супергоризонт}} = \frac{1}{3}\Phi = \text{const}, \quad (8.8)$$

що після множення на  $\ell(\ell + 1)$  у формулі (8.4) дає *горизонтальне плато* при малих  $\ell$ .

Важливо: звукові хвилі не затерли первинний розподіл густини від інфлатона, а лише *модулювали* його. Темна матерія не взаємодіє з фотонами — її потенціальні ями залишалися нерухомими, і баріон-фотонний газ коливався відносно цих застиглих центрів. Тому  $\Theta_0(0)$  несе в собі первинний квантовий «відбиток» інфлатона.

### 8.3. Ефект баріонного завантаження та порушення симетрії

Наявність важкої баріонної компоненти, що описується параметром  $R$ , відображається на внутрішній симетрії фотонних осциляцій. Якщо повернутися до точного розв'язку неоднорідного рівняння (7.10) зі збереженням гравітаційного члена у правій частині, виявляється, що присутність баріонів зміщує положення динамічної рівноваги (нуля) коливань осцилятора. Математично, загальний розв'язок для монополя температури набуває вигляду:

$$\Theta_0(\eta_{\text{rec}}) = \Theta_0(0) \cdot \cos(kc_s\eta_{\text{rec}}) - (1 + R)\Phi, \quad (8.9)$$

де  $\Theta_0(0)$  — амплітуда косинусних коливань (початкове значення у  $\eta = 0$ ), а  $(1 + R)\Phi$  — зміщення рівноваги, зумовлене гравітаційним потенціалом.

З урахуванням ефекту Закса-Вольфа, повне ефективне збурення, яке виривається з потенціальної ями, визначається комбінацією  $\Theta_0 + \Phi$ . Підставляючи сюди розв'язок (8.9), знаходимо:

$$(\Theta_0 + \Phi)_{\text{rec}} = \Theta_0(0) \cdot \cos(kc_s\eta_{\text{rec}}) - R\Phi. \quad (8.10)$$

Безрозмірний зсув нуля  $\Delta \equiv -R\Phi/\Theta_0(0)$  створює суттєву асиметрію між парними та непарними акустичними піками у спектрі потужності  $\mathcal{D}_\ell^{TT}$ . Оскільки  $\Phi < 0$  у потенціальній ямі темної матерії (гравітаційний потенціал від'ємний за визначенням), а  $R > 0$ , маємо  $\Delta > 0$  — зсув рівноваги осцилятора відбувається у бік стиснення:

- **Непарні піки (перший, третій тощо)** відповідають фазі максимального гравітаційного стиснення плазми всередині потенціальних ям темної матерії. Гравітаційне поле баріонів діє синергетично з колапсом, підсилюючи амплітуду ефективного збурення до величини  $(1 + \Delta)$ . Відповідно, кутова потужність пропорційна квадрату цього значення:

$$\text{Потужність непарних піків} \propto (1 + \Delta)^2. \quad (8.11)$$

- **Парні піки (другий, четвертий тощо)** фіксують протилежну фазу — момент максимального пружного розширення (радіаційного розрідження). У

цій точці фотонний тиск намагається викинути речовину з ями, але гравітаційний потенціал баріонів утримує її, послаблюючи чисту амплітуду до  $(-1 + \Delta)$ . Для кутового спектра потужності це дає:

$$\text{Потужність парних піків} \propto (-1 + \Delta)^2 = (1 - \Delta)^2. \quad (8.12)$$

Оскільки і метричний потенціал  $\Phi$ , і початкове збурення плазми  $\Theta_0(0)$  народилися з єдиного первинного скалярного поля, їхнє відношення є безрозмірною константою порядку одиниці. Якби у Всесвіті були відсутні баріони ( $R = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ ), осцилятор коливався б симетрично відносно нуля, і перший та другий піки мали б абсолютно однакову висоту. Отже, прецизійне вимірювання відносної висоти перших двох піків спектра  $\mathcal{D}_\ell^{TT}$  дозволяє астрофізикам з високою точністю «зважити» баріонний вміст Всесвіту, відокремивши його від внеску холодної темної матерії (див. рис. 8.2).

## Задачі

**№ 8.1 Ефект Закса-Вольфа та супергоризонтні масштаби** Для адіабатичних збурень на супергоризонтних масштабах ( $k \ll aH$ ) справедливе співвідношення  $\Theta_0 = -\frac{2}{3}\Phi$ .

1. Покажіть, що комбінація  $(\Theta_0 + \Phi)$  на цих масштабах дорівнює  $\frac{1}{3}\Phi$  і не залежить від часу.
2. Поясніть, чому цей результат призводить до горизонтального плато в масштабованому кутовому спектрі  $\mathcal{D}_\ell^{TT}$  при малих  $\ell$  ( $\ell \lesssim 30$ ).
3. Як зміниться цей висновок, якщо збурення не є адіабатичними?

**№ 8.2 Від хвильового числа  $k$  до мультиполя  $\ell$**  Кутовий розмір звукового горизонту на момент рекомбінації задається співвідношенням  $\theta_s = r_s/d_A$ , де  $r_s \approx 147$  Мпк — звуковий горизонт, а  $d_A$  — кутова відстань до поверхні останнього розсіяння.

1. У плоскому Всесвіті ( $\Omega_k = 0$ ) кутова відстань дорівнює  $d_A = \eta_0 - \eta_{\text{rec}} \approx 14$  Гпк. Оцініть кутовий розмір звукового горизонту  $\theta_s$  в радіанах та градусах.
2. Використовуючи наближення  $\ell \approx \pi/\theta_s$ , оцініть мультипольний номер  $\ell$ , що відповідає першому акустичному піку. Порівняйте зі спостережуваним значенням  $\ell \approx 200$ .
3. Чому наближення  $\ell = kd_A$  працює добре для великих  $\ell$ , але дає похибку для малих?

**№ 8.3 Баріонне завантаження та асиметрія піків** Точний розв'язок рівняння для  $\Theta_0$  з урахуванням гравітаційного потенціалу дає:

$$(\Theta_0 + \Phi)_{\text{rec}} = \Theta_0(0) \cos(kr_s) - R\Phi,$$

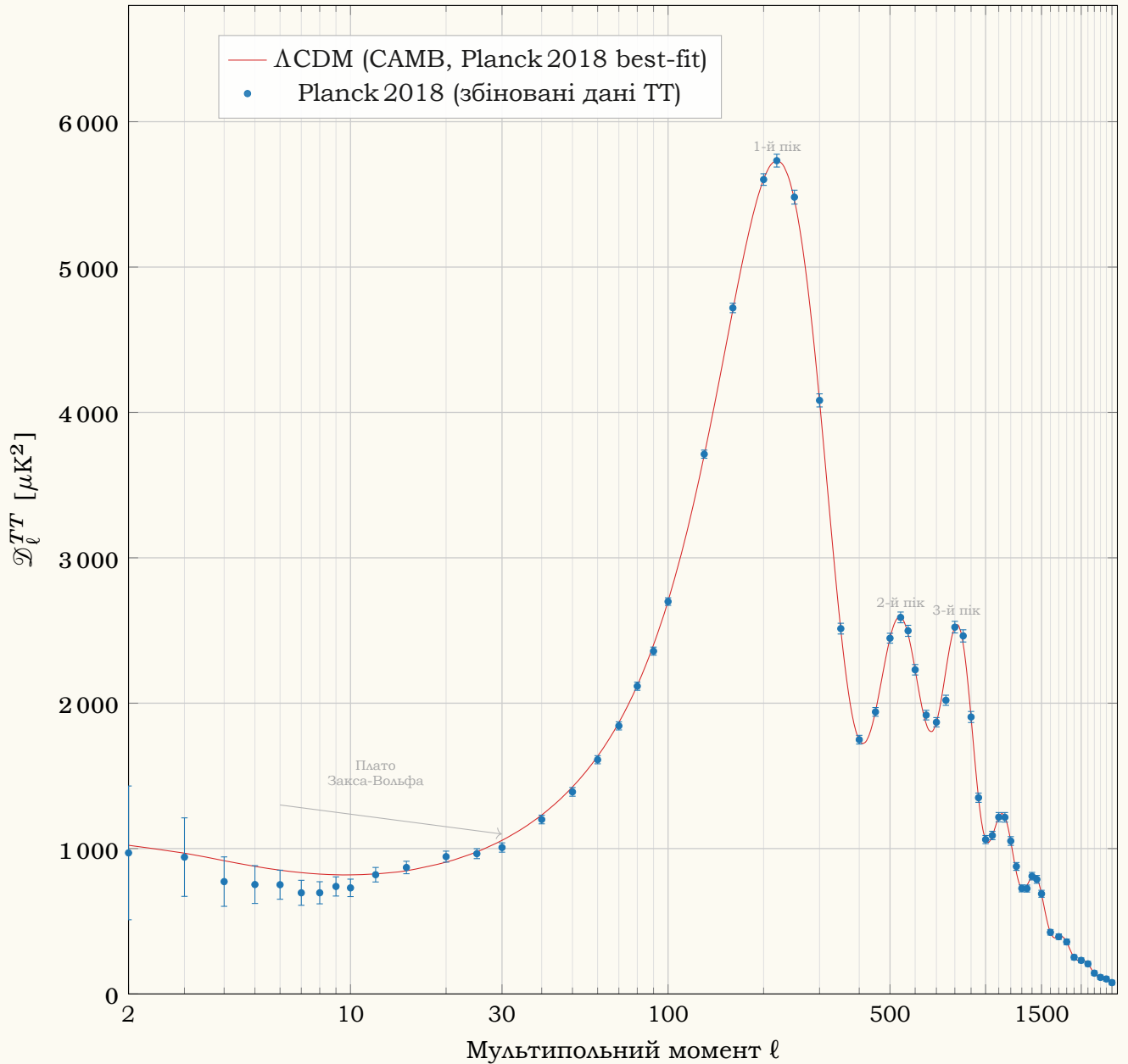
де  $r_s = \int_0^{\eta_{\text{rec}}} c_s d\eta$  — звуковий горизонт,  $R = 3\rho_b/4\rho_\gamma$  — баріонне завантаження.

1. Для парних піків  $\cos(kr_s) = +1$ , для непарних  $\cos(kr_s) = -1$ . Покажіть, що відношення потужностей непарного та парного піків дорівнює

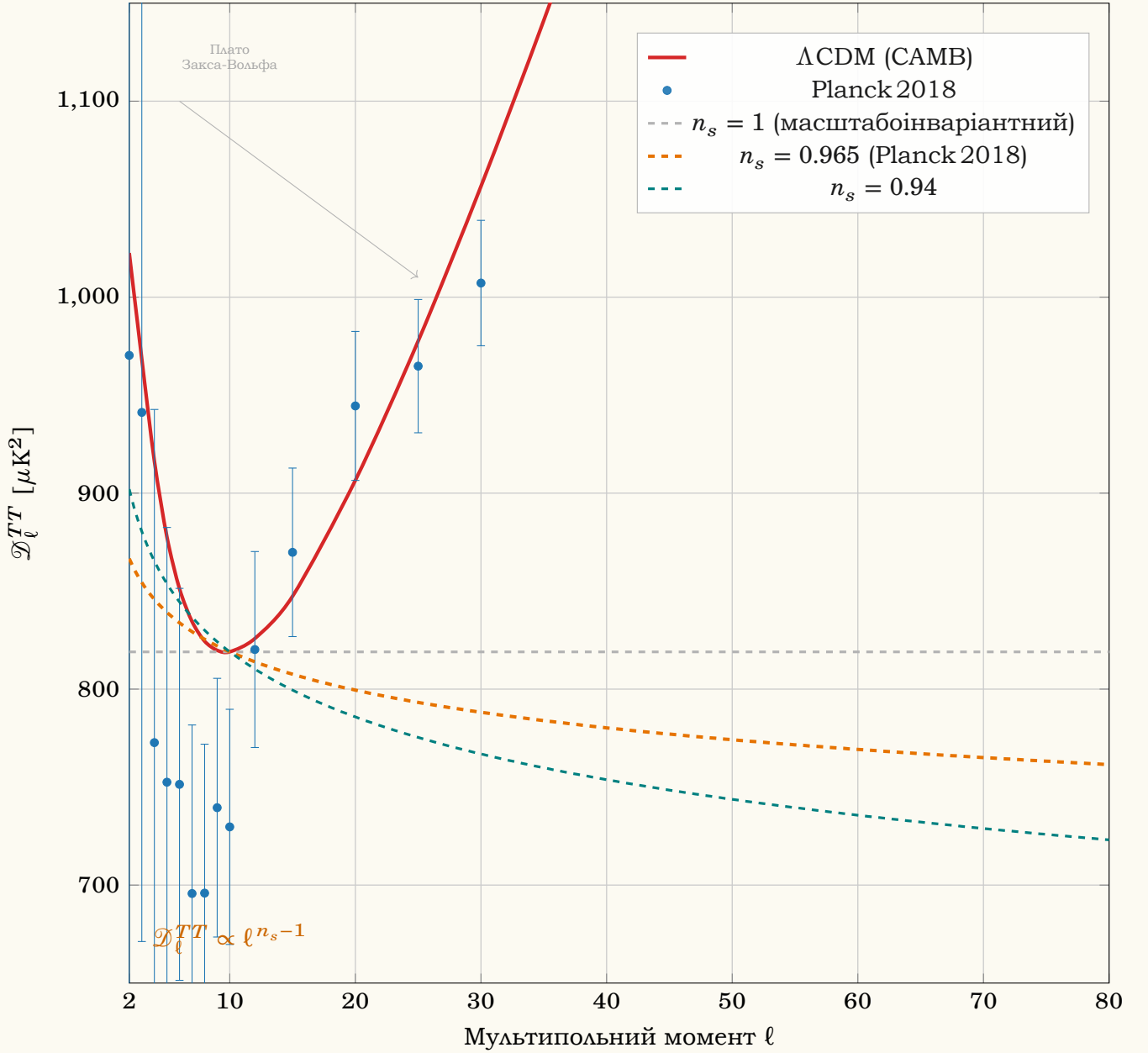
$$\frac{\mathcal{D}_{\text{непар}}}{\mathcal{D}_{\text{пар}}} = \left( \frac{1 + \Delta}{1 - \Delta} \right)^2,$$

де  $\Delta = -R\Phi/\Theta_0(0) > 0$ .





**Рис. 8.2:** Кутовий спектр потужності температурної анізотропії реліктового випромінювання за даними космічної місії *Planck 2018*. Суцільна червона лінія відповідає найкращему фіту стандартної космологічної моделі  $\Lambda$ CDM. Положення першого акустичного піка ( $\ell \approx 220$ ) жорстко фіксує кутовий розмір звукового горизонту на момент рекомбінації, виступаючи чутливим індикатором просторової кривини Космосу ( $\Omega_k \approx 0$ ). Відносна висота парних і непарних піків відображає ефект баріонного завантаження: відношення другого піка до першого дозволяє з високою точністю обчислити фізичну густину баріонів  $\Omega_b h^2$ , тоді як третій пік контролює густину холодної темної матерії  $\Omega_c h^2$ .



**Рис. 8.3:** Збільшений вигляд плато Закса-Вольфа ( $2 \leq \ell \leq 80$ ) кутового спектра потужності  $\mathcal{D}_\ell^{TT}$  за даними місії *Planck 2018* [3]. Штрихові лінії ілюструють нахил первинного спектра  $\mathcal{D}_\ell^{TT} \propto \ell^{n_s-1}$  для трьох значень спектрального індексу  $n_s$ . Горизонтальна лінія відповідає масштабінваріантному спектру Гарісона-Зельдовича ( $n_s = 1$ ); відхилення від неї для планківського значення  $n_s = 0.965 \pm 0.004$  підтверджує червоний нахил первинних скалярних збурень — базове передбачення інфляційних моделей повільного кочення поля. Усі криві нормовано в точці  $\ell = 10$ , де  $\mathcal{D}_{10}^{\Lambda\text{CDM}} \approx 819 \mu\text{K}^2$ .

2. Використовуючи  $\Phi \approx -2/3 \mathcal{R}$  та  $\Theta_0(0) \approx \mathcal{R}/3$  (для адіабатичних збурень), оцініть  $\Delta$  через параметр  $R$ .
3. Для  $R \approx 0.6$  (значення на рекомбінації) обчисліть відношення висот першого (непарного) та другого (парного) піків. Порівняйте з рис. 8.2.

**№ 8.4 Спектральний індекс та нахил плато** У наближенні Закса-Вольфа ( $\ell \lesssim 30$ ) масштабований кутовий спектр  $\mathcal{D}_\ell^{TT}$  пов'язаний із первинним спектром  $\mathcal{P}_\zeta(k)$  співвідношенням:

$$\mathcal{D}_\ell^{TT} \propto \ell(\ell+1) C_\ell^{SW} \propto \mathcal{P}_\zeta(k) \Big|_{k \approx \ell/d_A}.$$

1. Припускаючи степеневий вигляд  $\mathcal{P}_\zeta(k) = A_s (k/k_0)^{n_s-1}$ , покажіть, що  $\mathcal{D}_\ell^{TT} \propto \ell^{n_s-1}$ .
2. Використовуючи планківське значення  $n_s = 0.965 \pm 0.004$ , обчисліть відношення  $\mathcal{D}_{30}^{TT} / \mathcal{D}_{10}^{TT}$ .
3. Чому відхилення  $n_s$  від одиниці (так званий «червоний нахил») є важливим підтвердженням інфляційної парадигми?

**№ 8.5 Інтегральний ефект Закса-Вольфа (ISW)** Пізній ISW виникає, коли гравітаційний потенціал  $\Phi$  змінюється в часі через домінування темної енергії:

$$\frac{\Delta T}{T} \Big|_{\text{ISW}} = 2 \int_{\eta_{\text{rec}}}^{\eta_0} \dot{\Phi} d\eta.$$

1. У матеріально-домінованому Всесвіті без темної енергії  $\Phi = \text{const}$ . Чому тоді ISW-внесок відсутній?
2. Поясніть, чому пізній ISW проявляється лише на найменших мультиполях ( $\ell \lesssim 10$ ).
3. Запропонуйте спостережний тест, який дозволяє відокремити ISW-внесок від інших ефектів (наприклад, за допомогою крос-кореляції з даними великомасштабної структури).

## 9. Поляризація СМВ

Температурний спектр  $C_\ell^{TT}$ , розглянутий у попередньому розділі, несе інформацію переважно про скалярні збурення. Але СМВ містить і другий канал інформації — *поляризацію*. Вона виникає при томсонівському розсіянні фотонів і дозволяє розрізнити два типи первинних збурень: скалярні (флуктуації густини) і тензорні (гравітаційні хвилі). Детекція тензорного сигналу у поляризації СМВ стала б прямим підтвердженням квантової природи гравітації — саме тому пошук В-мод є однією з центральних задач сучасної космології.

### 9.1. Механізм поляризації: розсіяння Томсона

Фотони поляризуються при останньому розсіянні на електронах. Томсонівське розсіяння поляризує фотон *лише* якщо навколо електрона існує **квадрупольна** температурна анізотропія: якщо температура однакова з усіх боків — поляризації немає.

Безпосередньо до рекомбінації фотонів і електронів ще достатньо для ізотропізації, тому квадруполь малий і поляризація слабка. Але під час самої рекомбінації ( $\Delta z \sim 80$ ) оптична глибина падає швидко — квадруполь встигає вирости і поляризація «відбивається» в поверхні останнього розсіяння.

Напрямок поляризації залежить від **поперечного** перепаду температури навколо точки розсіяння.

### 9.2. Параметри Стокса та спін-2 характер поляризації

Лінійна поляризація у заданому напрямку  $\hat{\mathbf{n}}$  на небесній сфері описується двома параметрами Стокса  $Q(\hat{\mathbf{n}})$  та  $U(\hat{\mathbf{n}})$ , визначеними відносно локального базису  $(\hat{\theta}, \hat{\phi})$ :  $Q$  вимірює різницю інтенсивностей уздовж цих двох осей, а  $U$  — те саме, але для осей, повернутих на  $45^\circ$ . Третій параметр Стокса,  $V$  (циркулярна поляризація), точно дорівнює нулю для томсонівського розсіяння неполяризованого випромінювання — це чисто лінійний ефект.

Ключова відмінність  $Q, U$  від звичайного скалярного поля (як  $\Theta_0$ ) у тому, що вони **не інваріантні** відносно повороту локального базису. Якщо повернути осі на кут  $\psi$ , параметри перетворюються як

$$(Q \pm iU)'(\hat{\mathbf{n}}) = e^{\mp 2i\psi} (Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}). \quad (9.1)$$

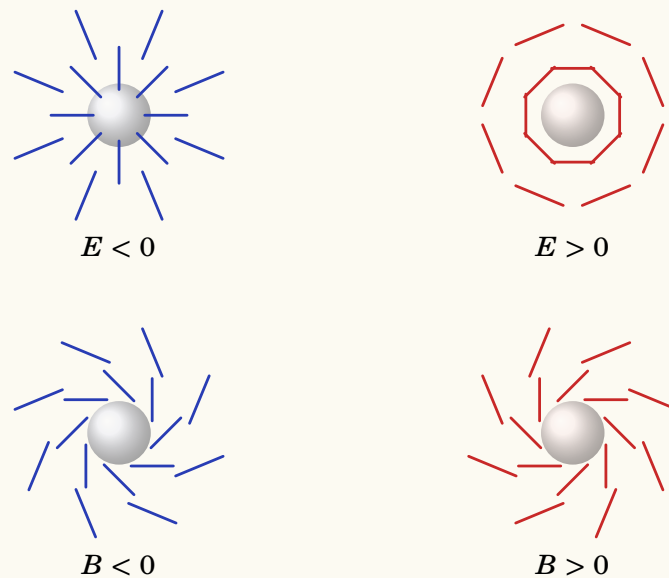
Множник  $e^{\mp 2i\psi}$  (а не  $e^{\mp i\psi}$ , як для вектора) означає, що комбінація  $Q \pm iU$  є полем **спіральності (спін-ваги)  $\pm 2$** : поворот базису на  $180^\circ$  повертає поляризацію саму на себе — це і є те «безголове» (headless) означення напрямку, використане на рис. 9.1.

Оскільки  $Q \pm iU$  не є звичайними скалярами, їх не можна розкласти за звичайними сферичними гармоніками  $Y_{\ell m}$ . Натомість використовують *спін-зважені сферичні гармоніки*  ${}_{\pm 2}Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}})$  [38, 39]:

$$(Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\pm 2, \ell m} {}_{\pm 2}Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (9.2)$$

### 9.3. Е- і В-моди

Поляризаційне поле на сфері, як і будь-яке тензорне поле, однозначно розкладається на дві компоненти — аналогічно до розкладу вектора на потенціальну і вихрову частини. Ці дві компоненти мають різне фізичне джерело і різний статус спостережень (рис. 9.1):



**Рис. 9.1:** Характерні візерунки поляризації навколо точки останнього розсіяння. Штрихи позначають напрямки поляризації і навмисно без стрілок — поляризація є *безголовим* напрямком (визначена з точністю до  $180^\circ$ , а не  $360^\circ$ , як звичайний вектор). **Е-моди** ( $E < 0$ ,  $E > 0$ ) — радіальний або тангенціальний візерунок, парний відносно віддзеркалення (як і скалярне джерело, що його породжує). **В-моди** ( $B < 0$ ,  $B > 0$ ) — візерунок, повернутий на  $45^\circ$  відносно Е-моди, з вираженою закрученістю (handedness), що й відповідає їхній непарній паритетній природі.

| Тип                                         | Джерело                  | Статус           |
|---------------------------------------------|--------------------------|------------------|
| Е-моди (градієнтний, симетричний візерунок) | Скалярні флуктуації      | Виміряні         |
| В-моди (ротаційний, закручений візерунок)   | Тензорні флуктуації (GW) | Поки не знайдені |

Чому два типи збурень дають різні моди поляризації — питання симетрії, а не лише статистики:

#### Чому скалярні збурення не дають В-мод?

Скалярні збурення мають потенціальний (паритетно-парний) характер:  $\Phi(\mathbf{x})$  визначає поле швидкостей  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ . Е-моди мають ту ж симетрію паритету — вони парні. В-моди псевдоскалярні (непарні), і лінійне скалярне збурення їх не генерує. Тензорне збурення  $h_{ij}$  має обидва стани, в тому числі непарний — звідси В-моди від гравітаційних хвиль. *Практичний забруднювач:* гравітаційне лінзування на великих масштабах перетворює Е-моди в В-моди — це треба враховувати при пошуку первинних В-мод.

Формально Е- і В-моди означаються через (анти)симетричну комбінацію коефіцієнтів  $a_{\pm 2, \ell m}$  з рівняння (9.2):

$$a_{\ell m}^E = -\frac{1}{2} (a_{2, \ell m} + a_{-2, \ell m}), \quad a_{\ell m}^B = \frac{i}{2} (a_{2, \ell m} - a_{-2, \ell m}). \quad (9.3)$$

Під дією просторової інверсії  $\hat{\mathbf{n}} \rightarrow -\hat{\mathbf{n}}$  скалярні гармоніки  $Y_{\ell m}$  перетворюються як  $(-1)^\ell$ , тоді як  $a_{\ell m}^E$  успадковує цю ж парність  $(-1)^\ell$  (як і температура  $a_{\ell m}^T$ ), а  $a_{\ell m}^B$  отримує **додатковий** знак — парність  $(-1)^{\ell+1}$ . Саме ця різниця у трансформаційних властивостях, а не якась відмінність в амплітудах, і є строгим математичним змістом твердження в рамці вище.

## 9.4. Кутові спектри поляризації

За аналогією з  $C_\ell^{TT}$  означають кутові спектри потужності для всіх пар полів  $X, Y \in \{T, E, B\}$ :

$$\langle a_{\ell m}^X a_{\ell' m'}^{Y*} \rangle = C_\ell^{XY} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}. \quad (9.4)$$

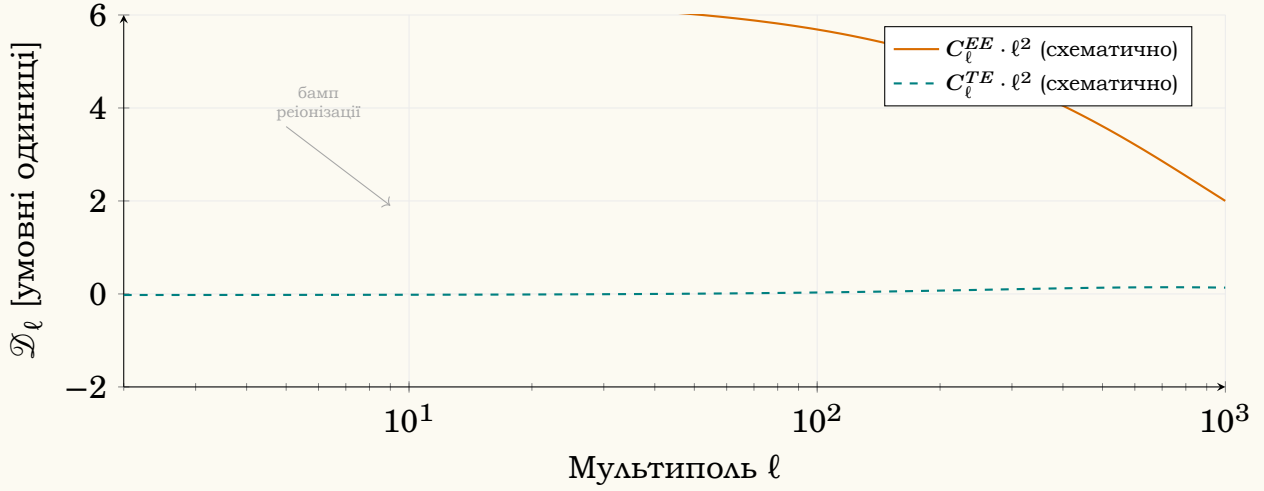
Якщо первинні збурення (скалярні й тензорні) паритетно-симетричні, як у стандартній інфляційній картині, то крос-спектри  $C_\ell^{TB}$  і  $C_\ell^{EB}$  мусять тотожно дорівнювати нулю — вони змінюють знак під інверсією, а статистично ізотропний паритетно-симетричний Всесвіт не може виділити такий знак. Ненульові  $C_\ell^{TB}$  або  $C_\ell^{EB}$  є або систематичною помилкою вимірювання (найчастіше), або, у принципі, ознакою нової паритетно-непарної фізики.

Натомість  $C_\ell^{TE}$  дозволений і несе важливу інформацію: обидва поля,  $T$  і  $E$ , походять з одного джерела — акустичних осциляцій плазми до рекомбінації. Але поляризацію сорсує не сама монопольна температура  $\Theta_0$ , а швидкість баріонів  $v_b \propto \Theta_0$ , яка зсунута за фазою на  $\pi/2$  відносно  $\Theta_0$  у акустичному осциляторі. Це дає характерну картину:

- Спектр  $C_\ell^{EE}$  також осцилює з піками акустичної природи, але його піки **зсунуті за фазою** відносно піків  $C_\ell^{TT}$  — там, де температурний спектр має екстремум, поляризаційний проходить через нуль (і навпаки).
- Спектр  $C_\ell^{TE}$  змінює знак кілька разів; перший виражений провал (антикореляція) на  $\ell \sim 150$  є прямим наслідком **адіабатичності** первинних збурень і використовується як незалежний тест проти ізокривизняних альтернатив.
- При малих мультиполях ( $\ell \lesssim 10$ ) у  $C_\ell^{EE}$  з'являється додатковий **бамп реіонізації**: фотони повторно розсіюються на вільних електронах під час епохи реіонізації ( $z_{\text{re}} \sim 7-10$ ), генеруючи новий квадруполь і, отже, нову поляризацію на надгоризонтних масштабах цієї епохи. Амплітуда цього бампу — практично єдиний спосіб незалежно виміряти оптичну глибину реіонізації  $\tau$ , не покладаючись на форму плато Закса-Вольфа в  $TT$ .

Спектр  $C_\ell^{BB}$  на цьому ж малюнку показати важко: первинний (тензорний) сигнал за амплітудою на 2–3 порядки менший за  $C_\ell^{EE}$ , і додатково існує *вторинний*  $C_\ell^{BB}$ , породжений гравітаційним лінзуванням Е-мод великомасштабною структурою (див. далі).





**Рис. 9.2:** Якісна ілюстрація форми спектрів  $C_\ell^{EE}$  та  $C_\ell^{TE}$  (не апроксимація реальних даних Planck, лише для пояснення фазових співвідношень). Зверніть увагу на зсув фази піків  $EE$  відносно  $TT$  (рис. 8.2 у попередньому розділі), знакозмінність  $TE$  та додатковий бамп реіонізації при  $\ell \lesssim 10$ .

## 9.5. Тензорно-скалярне відношення $r$

Амплітуда первинних В-мод параметризується *тензорно-скалярним відношенням*

$$r \equiv \frac{A_t}{A_s}, \quad (9.5)$$

де  $A_t$  і  $A_s$  — амплітуди спектрів потужності тензорних (гравітаційні хвилі) і скалярних (густина) збурень у момент виходу за горизонт під час інфляції. Для однопольових моделей повільного кочення це відношення безпосередньо пов'язане з енергетичним масштабом інфляції:

$$V^{1/4} \approx 1.06 \times 10^{16} \text{ GeV} \times \left( \frac{r}{0.01} \right)^{1/4}. \quad (9.6)$$

Додатково, у цьому класі моделей діє *consistency relation* — співвідношення, яке пов'язує  $r$  з нахилом тензорного спектра  $n_t$  без жодного вільного параметра:

$$n_t = -\frac{r}{8}. \quad (9.7)$$

Перевірка цього співвідношення (потребує вимірювання й  $r$ , і  $n_t$  окремо) є одним із найчистіших тестів однопольової інфляції — але при поточній чутливості вимірити  $n_t$  окремо від  $r$  поки нереалістично.

## 9.6. Практичні виклики: фон, лінзування і delensing

Крім гравітаційного лінзування, згаданого в рамці вище, пошук первинних В-мод ускладнюють два додаткові ефекти.

**Галактичні форграунди.** Поляризоване випромінювання пилу (теплого) і синхротронне випромінювання від Чумацького Шляху самі створюють В-моди на тих самих кутових масштабах, що й первинний сигнал, причому за амплітудою можуть суттєво його перевищувати. Розділити космологічний сигнал і форграунд можна лише завдяки різній частотній залежності — звідси потреба у багаточастотних вимірюваннях (десятки–сотні ГГц).

**Урок BICEP2 (2014)**

У березні 2014 року колаборація BICEP2 оголосила про детекцію первинних В-мод з  $r \approx 0.2$  — сенсаційний результат, що відповідав би прямому спостереженню гравітаційних хвиль з інфляції. Подальший спільний аналіз з даними Planck по пилу показав, що основну частину сигналу пояснює поляризоване випромінювання галактичного пилу, яке недооцінили на момент першої публікації [40, 41]. Цей епізод — стандартний приклад того, чому детекція В-мод вимагає впевненого контролю форграундів на кількох частотах, перш ніж заявляти про космологічне походження сигналу.

**Delensing.** Оскільки лінзові В-моди породжуються відомим (і вимірюваним незалежно) полем Е-мод та гравітаційним потенціалом великомасштабної структури, їхній внесок можна статистично відняти — процедура, відома як *delensing*. Це один із головних напрямів розвитку наступного покоління експериментів, оскільки без нього лінзовий В-сигнал стає ефективною підлогою чутливості до  $r$  на рівні  $r \sim 10^{-3}$ .

**9.7. Огляд поточних і майбутніх експериментів**

| Експеримент        | Тип      | Стан                 | Ціль по $r$                          |
|--------------------|----------|----------------------|--------------------------------------|
| Planck             | Супутник | Завершено (2018)     | —                                    |
| BICEP/Keck         | Наземний | Діючий               | $r < 0.036$ [15]                     |
| Simons Observatory | Наземний | Будується            | $\sigma(r) \sim 0.002\text{--}0.003$ |
| CMB-S4             | Наземний | Планується           | $\sigma(r) \sim 0.0005$              |
| LiteBIRD           | Супутник | Планується (2030-ті) | $\sigma(r) \sim 0.001$               |

Знайти В-моди — означає отримати прямий доказ первинних гравітаційних хвиль і квантової природи гравітації в режимі малих збурень. Поточна верхня межа:  $r < 0.036$  (95% CL, BICEP/Keck 2021 [15]).

Таким чином, СМВ є повноцінним «двоканальним» джерелом інформації: температурний спектр обмежує скалярні збурення і параметри  $\Lambda$ CDM, а поляризаційні В-моди — єдиний прямий зонд тензорних збурень і енергетичного масштабу інфляції. Обидва канали разом утворюють найпотужніший інструмент для перевірки інфляційних моделей — включно з тією, що розглядається у наступних розділах.

**Задачі**

**№ 9.1 Спін-2 характер поляризації** Розглянемо поворот локального базису на кут  $\psi$ , при якому параметри Стокса перетворюються за формулою (9.1).

1. Покажіть, що звичайна температура  $\Theta_0$  (спін 0) не змінюється при такому повороті, тоді як  $Q + iU$  отримує фазовий множник  $e^{-2i\psi}$ .
2. Поясніть, чому саме множник  $e^{\mp 2i\psi}$ , а не  $e^{\mp i\psi}$ , унеможливає зображення поляризації звичайною стрілкою (вектором).
3. Чому при  $\psi = 180^\circ$  поляризаційний «штрих» переходить сам у себе, а не у проти-

лежний напрямом?

**№ 9.2 Парність  $E$ - і  $B$ -мод** Використовуючи означення (9.3) та властивість парності звичайних сферичних гармонік  $Y_{\ell m}(-\hat{\mathbf{n}}) = (-1)^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}})$ :

1. Обґрунтуйте, чому  $a_{\ell m}^E$  має парність  $(-1)^{\ell}$  (така сама, як у температури  $a_{\ell m}^T$ ).
2. Обґрунтуйте, чому  $a_{\ell m}^B$  отримує додатковий знак і має парність  $(-1)^{\ell+1}$ .
3. Використовуючи ці результати, покажіть, чому статистично ізотропний і паритетно-симетричний Всесвіт вимагає  $C_{\ell}^{TB} = C_{\ell}^{EB} = 0$ .

**№ 9.3 Тензорно-скалярне відношення та енергетичний масштаб інфляції** Скористайтесь співвідношенням (9.6).

1. Оцініть енергетичний масштаб інфляції  $V^{1/4}$  для поточної верхньої межі  $r < 0.036$ .
2. У скільки разів має покращитись чутливість до  $r$  (порівняно з поточною межею), щоб знизити оцінку  $V^{1/4}$  вдвічі?
3. Скориставшись consistency relation (9.7), оцініть  $n_t$  для  $r = 0.01$ . Чи реалістично виміряти таке значення  $n_t$  окремо найближчим часом? Обґрунтуйте відповідь, користуючись таблицею цілей експериментів вище.

**№ 9.4 Оптична глибина реіонізації з бампу  $EE$**  Бамп реіонізації в  $C_{\ell}^{EE}$  на масштабах  $\ell \lesssim 10$  за амплітудою приблизно пропорційний  $\tau^2$  (у наближенні малих  $\tau$ ), тоді як внесок первинного плато Закса-Вольфа в  $C_{\ell}^{TT}$  на тих самих масштабах практично не залежить від  $\tau$ .

1. Поясніть фізично, чому амплітуда  $EE$ -бампу залежить саме від  $\tau^2$ , а не від  $\tau$  лінійно (підказка: скільки разів фотон повинен розсіятися, щоб набути поляризації і щоб цей ефект дійшов до спостерігача з правильною статистичною вагою).
2. Чому вимірювання  $\tau$  саме через поляризацію (а не лише через форму  $C_{\ell}^{TT}$ ) істотно зменшує вироджену залежність між  $\tau$  та амплітудою скалярних збурень  $A_s$  у  $\Lambda$ CDM-підгонці?
3. Якою мірою помилка у вимірюванні  $\tau$  впливає на оцінку  $r$ , отриману з низько- $\ell$  частини спектра  $C_{\ell}^{BB}$ ?

## **Частина IV.**

### **Невирішені проблеми**

## 10. Перспективи та можливі напрями подальших досліджень

Моделі з локальним зламом первинного спектра потужності цікаві тим, що допомагають узгодити ранні та пізні спостережні дані й водночас не псують передбачення  $\Lambda$ CDM для великих масштабів. Наскільки ефективно такий підхід розв'язує космологічні напруги, перевірять майбутні експерименти.

### 10.1. Відкриті напруги в моделі $\Lambda$ CDM

Попри видатний емпіричний успіх, модель  $\Lambda$ CDM зазнає тиску з боку двох стійких спостережних розбіжностей — так званих *tensions* — між незалежними методами вимірювання її параметрів. На відміну від проблем плоскості, горизонту та початкових збурень (які вирішує інфляція), ці напруги залишаються відкритими і є активним полем сучасних досліджень.

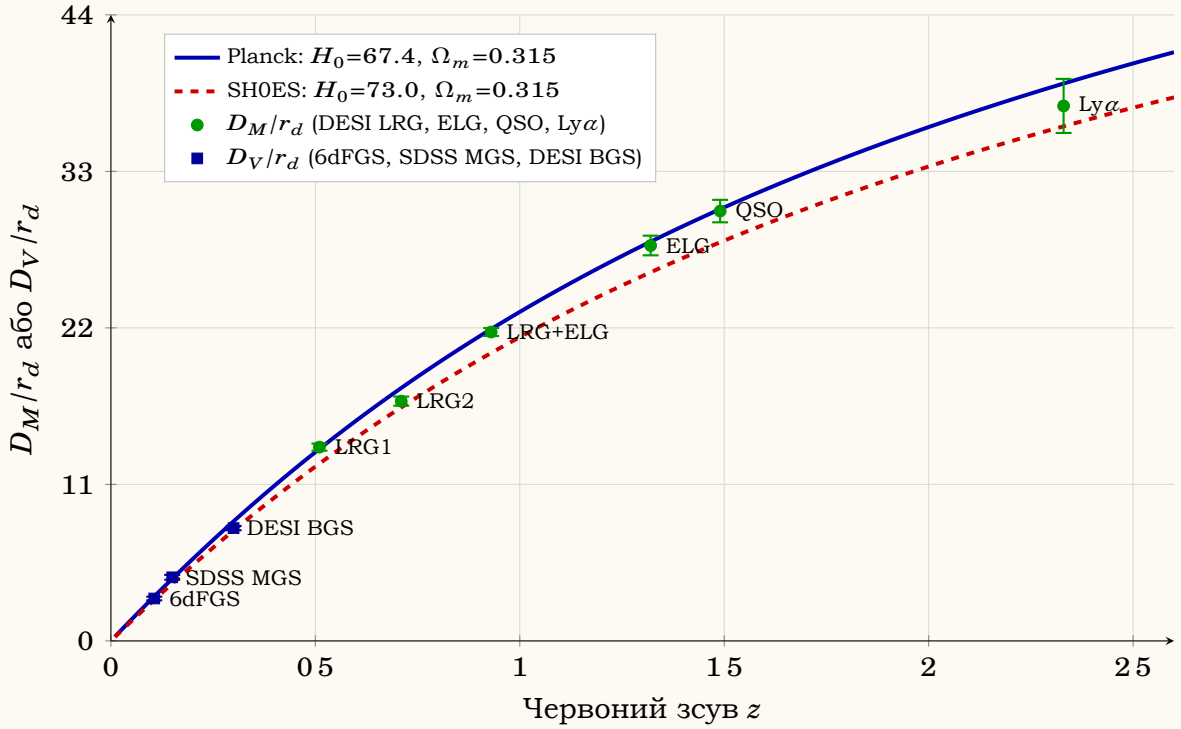
**Hubble tension.** Пряме локальне вимірювання  $H_0$  за допомогою об'єктів «нашої околиці» Всесвіту (калібрування наднових Ia через цефеїди та TRGB) дає значення  $H_0 \approx 73.0 \pm 1.0$  км/с/Мпк. Проте модельна екстраполяція фізики раннього Всесвіту ( $z \sim 1100$ ) за даними кутового масштабу акустичних піків СМВ обсерваторії *Planck* у рамках стандартної  $\Lambda$ CDM дає  $H_0 = 67.4 \pm 0.5$  км/с/Мпк. Статистична значущість розбіжності перевищує  $5\sigma$ .

Фізичний механізм вирішення цієї кризи у нашому підході спирається на те, що модифікація первинного спектра на малих масштабах неминуче зміщує найкращі фіти фонових параметрів  $\Lambda$ CDM при сумісному MCMC-аналізі. Додатковий ступінь свободи у вигляді зламу або первинних особливостей спектра частково руйнує жорсткі параметричні кореляції (зокрема, між оптичною товщиною реіонізації  $\tau$ , амплітудою  $A_s$  та нахилом  $n_s$ ). Це дозволяє статистичному алгоритму перерозподілити вагу висококутових флуктуацій СМВ та зрушити фоновий прогноз для сумісного параметра  $H_0$  вгору, наближаючи його до локальних спостережних значень 73 км/с/Мпк без погіршення загальної якості апроксимації даних *Planck*.

Додаткову складність вносять перші результати огляду *DESI* [42]. Вимірювання ВАО у семи діапазонах червоних зсувів ( $z \sim 0.1$ – $2.1$ , рис. 10.1) у поєднанні з даними СМВ та наднових демонструють статистично значуще ( $2.5\sigma$ – $3.9\sigma$ , залежно від набору даних наднових) відхилення рівняння стану темної енергії від  $w = -1$ . Зокрема, у моделі  $w_0 w_a$ CDM найкращий фіт дає  $w_0 > -1$ ,  $w_a < 0$  — тобто темна енергія у минулому була слабшою, ніж зараз. Якщо це підтвердиться майбутніми даними, стандартна космологічна стала  $\Lambda$  виявиться лише наближенням. Це суттєво для нашого підходу: динамічна темна енергія змінює фонову еволюцію  $H(z)$ , а відтак і масштаб звукового горизонту під час рекомбінації — саме той параметр, що визначає кутовий масштаб акустичних піків і калібрує  $H_0$ . Повноцінний аналіз має враховувати обидва джерела свободи одночасно.

**The  $S_8$  tension.** Другою важливою розбіжністю є параметр скупченості  $S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\Omega_m/0.3}$ , де  $\Omega_m$  — повна відносна густина матерії у Всесвіті, а  $\sigma_8$  — ключовий космологічний параметр, що визначає середньоквадратичну амплітуду лінійних флуктуацій густини речовини всередині сфери радіусом  $8 h^{-1}$  Мпк.

Масштаб  $8 h^{-1}$  Мпк  $\approx 11$  Мпк обрано не довільно: саме на цьому масштабі



**Рис. 10.1:** БАО відстані  $D_M/r_d$  (кружки) та  $D_V/r_d$  (квадрати) як функції червоного зсуву. Суцільна крива — Planck  $\Lambda$ CDM ( $H_0 = 67.4$  км/с/Мпк), пунктирна — SH0ES ( $H_0 = 73.0$  км/с/Мпк,  $\Omega_m = 0.315$ ,  $r_d = 147.09$  Мпк). Дані DESI DR1 [42], 6dFGS та SDSS MGS. Обидві величини нормовані на  $r_d$  і мають однакову розмірність та асимптотику, тому сумісне відображення на одній осі є коректним.

нелінійне згортання речовини щойно починається сьогодні ( $\delta\rho/\rho \sim 1$ ), тобто він є природним порогом між лінійним і нелінійним режимами структуроутворення. Значення  $\sigma_8 \approx 0.8$  означає, що типова флуктуація густини у сфері радіусом  $\sim 11$  Мпк сягає  $\sim 80\%$  від середньої густини — Всесвіт на цьому масштабі вже помітно «грудкуватий».

Параметр  $\sigma_8$  вперше набув значення як нормувальна константа при підгонці кутового спектра СМВ: Planck точно вимірює добуток  $A_s e^{-2\tau}$ , де  $A_s$  — амплітуда первинного спектра,  $\tau$  — оптична товщина реіонізації. Після фіксації  $\tau$  з поляризації великого масштабу отримуємо  $A_s$ , а через передавальну функцію —  $\sigma_8$ . Саме тому  $\sigma_8$  є *розрахованим* параметром моделі  $\Lambda$ CDM, а не безпосередньо вимірним.

Натомість спостереження великомасштабної структури на пізніх етапах ( $z \lesssim 1$ ) методами слабкого гравітаційного лінзування (огляди KiDS, DES, HSC) *безпосередньо* вимірюють скупченість матерії через деформацію форм галактик. Ці вимірювання фіксують меншу скупченість ( $S_8 \approx 0.77$ ), ніж передбачає еволюція від епохи рекомбінації за моделлю  $\Lambda$ CDM ( $S_8 \approx 0.83$ ). Розбіжність становить  $\sim 3\sigma$  і є стійкою впродовж декількох поколінь оглядів.

Фізичний сенс *tension* такий: Всесвіт, який ми спостерігаємо сьогодні, є *менш* скупченим, ніж той, що передбачає пряма еволюція від добре виміряного стану при  $z = 1100$ . Можливі пояснення поділяються на три класи: (i) систематичні похибки в калібруванні фотометричних червоних зсувів або моделюванні внутрішньої форми галактик (intrinsic alignment); (ii) нова фізика у темному секторі — взаємодіюча темна матерія або масивні нейтрино, що пригнічують ріст структур; (iii) модифікація первинного спектра збурень.



Наш підхід реалізує третій шлях: введення зламу або експоненціального пригнічення у первинному спектрі збурень кривини на масштабах скупчень галактик ( $k \gtrsim 1 \text{ Мпк}^{-1}$ ) безпосередньо знижує початкову амплітуду флуктуацій у цій зоні, зменшуючи інтегральне значення  $\sigma_8$ . Це природним чином уповільнює швидкість гравітаційного згортання речовини на пізніх етапах і може суттєво послабити напруженість  $S_8$ , хоча кількісна оцінка цього ефекту залежить від конкретної параметризації зламу і потребує повноцінного МСМС-аналізу з актуальними даними лінзування.

## 10.2. Аномалія високих червоних зсувів за даними JWST

Додатковим потужним поштовхом для розвитку моделей із нетривіальною геометрією первинного спектра став запуск космічного телескопа імені Джеймса Вебба (JWST). Спостереження глибоких полів на високих червоних зсувах ( $z \sim 7\text{--}15$ ) виявили неочікувано велику кількість масивних, яскравих та хімічно зрілих галактик у дуже ранньому Всесвіті [43, 44].

З погляду стандартного формалізму Пресса — Шехтера, заснованого на строго плоскому первинному спектрі Гаррісона — Зельдовича ( $n_s \approx 0.965$ ), ймовірність утворення таких великих структур у перші 300–500 мільйонів років після Великого вибуху є екстремально малою. Щоб втиснути ці дані у стандартну модель, доводиться припускати аномально високу, близьку до 100%, ефективність зореутворення ( $\epsilon_{\text{SF}} \sim 1$ ), що суперечить усім сучасним гідродинамічним симуляціям, де зворотний зв'язок від наднових обмежує цю величину на рівні 10–20

Моделі інфляції з ділянками ультра-повільного кочення (USR) або локальними сходінками потенціалу, які розглядалися у § 3, пропонують природне пояснення цього парадоксу. Локальний сплеск амплітуди первинного спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  на масштабах  $k \sim 10\text{--}100 \text{ Мпк}^{-1}$  локально збільшує дисперсію флуктуацій густини речовини. Це прискорює гравітаційний колапс у ранні епохи, зсуваючи експоненціальний хвіст функції мас гало у бік більших зсувів  $z$  — що може пояснити підвищену кількість масивних ранніх структур за даними JWST без залучення екзотичної астрофізики зореутворення. Втім, це пояснення поки що залишається якісним: кількісне узгодження з функцією світності JWST при  $z > 10$  є предметом активних досліджень [45].

## 10.3. Майбутні спостережні тести та обмеження

Теоретичні передбачення моделей із модифікованим спектром збурень можуть бути безпосередньо перевірені та обмежені наступним поколінням великих астрофізичних інструментів у найближчі роки. Основні очікувані експериментальні дані та об'єкти тестування зведено у таблиці 10.1.

## 10.4. Первинні чорні діри як наслідок зламу спектра

Одним із найбільш інтригуючих наслідків моделей із підсиленням первинним спектром збурень є можливість утворення *первинних чорних дір* (primordial black holes, PBH). Якщо амплітуда скалярних збурень  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  на малих масштабах досягає порогового значення  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \sim 10^{-2}$  — на сім порядків вище за значення на СМВ-масштабах — то в епоху радіаційного домінування окремі надщільні ділянки можуть колапсувати безпосередньо у чорні діри [50].

**Таблиця 10.1:** Очікувані експериментальні дані майбутніх космологічних місій

| Інструмент                     | Епоха даних     | Об’єкт перевірки теоретичної моделі                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Euclid</i> [46]             | Поточна / 2026+ | Тривимірний спектр потужності $P(k)$ галактик на масштабах $k \sim 0.1\text{--}5\ h/\text{Мпк}$ , що є критичним для точної фіксації положення зламу $k_{\text{break}}$ .                                                                                      |
| <i>Nancy Grace Roman</i> [47]  | $\sim 2027+$    | Огляди слабкого гравітаційного лінзування (weak lensing) та підрахунок галактик (galaxy counts) при $z \sim 2\text{--}4$ , що накладе жорсткі обмеження на амплітуду нахилу $\Delta n$ .                                                                       |
| <i>Simons Observatory</i> [48] | Поточна / 2025+ | Поляризація СМВ (спектри $EE$ , $BB$ ) на мультиполях $\ell \sim 30\text{--}3000$ . Підвищена чутливість до $r$ та первинних особливостей спектра на великих кутових масштабах.                                                                                |
| <i>DESI</i> [42]               | Поточна         | Барионні акустичні осциляції (BAO) та повний спектр $P(k)$ у діапазоні $z \sim 0.1\text{--}3.5$ . Перші результати 2024 року вже накладають нові обмеження на $w(z)$ та $\Omega_m$ .                                                                           |
| <i>CMB-S4</i> [49]             | $\sim 2029+$    | Надвисокі кутові мультиполі СМВ ( $\ell \sim 3000\text{--}5000$ ). Дослідження цієї області дозволить виявити тонкі затухаючі коливання (primordial features) у спектрах ТТ та ЕЕ поляризації, які генеруються моделями з швидким порушенням режиму slow-roll. |

Маса РВН, що формується при червоному зсуві  $z_{\text{form}}$ , визначається масою горизонту в момент входу відповідної моди під горизонт:

$$M_{\text{РВН}} \sim M_{\odot} \left( \frac{k}{10^6 \text{ Мпк}^{-1}} \right)^{-2}. \quad (10.1)$$

Таким чином, залежно від положення зламу  $k_{\text{break}}$ , моделі передбачають РВН у широкому діапазоні мас — від субсонячних ( $M \sim 10^{-5} M_{\odot}$ , що дають гамма-спалахи від випромінювання Гокінга) до мас астероїдного поясу ( $M \sim 10^{-12}\text{--}10^{-17} M_{\odot}$ , де РВН є кандидатами на всю темну матерію) та зоряних мас ( $M \sim 10\text{--}100 M_{\odot}$ , що відповідають злиттям, виявленим *LIGO/Virgo*).

Сучасні спостережні обмеження на частку темної матерії у вигляді РВН  $f_{\text{РВН}} \equiv \Omega_{\text{РВН}}/\Omega_{\text{DM}}$  є жорсткими майже у всьому діапазоні мас [51]: гравітаційне мікролінзування (EROS, HSC/Subaru), гамма-фон від випромінювання Гокінга, динаміка широких двійних зір та СМВ-аніхіляція разом залишають лише вузькі «вікна» де  $f_{\text{РВН}} \sim 1$  залишається допустимим. Тим не менш, навіть субдомінантна популяція РВН ( $f_{\text{РВН}} \ll 1$ ) може мати важливі спостережні прояви — зокрема як затравки для надмасивних чорних дір у ранніх галактиках, що спостерігаються *JWST*.

## 10.5. Гравітаційно-хвильовий фон як спостережний тест

Підсилення первинного скалярного спектра неминуче супроводжується генерацією *стохастичного гравітаційно-хвильового фону* (stochastic gravitational-wave background, SGWB) другого порядку [52]. Механізм є квантово-польовим аналогом класичного випромінювання: скалярні збурення при вході під горизонт взаємодіють попарно і породжують тензорні моди — гравітаційні хвилі — навіть за відсутності первинного тензорного спектра.

Пікова частота цього фону визначається масштабом підсилення:

$$f_{\text{peak}} \sim 10^{-9} \text{ Гц} \left( \frac{k_{\text{break}}}{10^6 \text{ Мпк}^{-1}} \right), \quad (10.2)$$

що природно потрапляє у смугу чутливості масивів пульсарної синхронізації (PTA: NANOGrav, EPTA, PPTA) для наногерцових частот та космічного інтерферометра LISA для мілігерцового діапазону.

Надзвичайно важливим є те, що у 2023 році колаборації NANOGrav [53] та EPTA повідомили про виявлення стохастичного гравітаційно-хвильового сигналу на рівні  $\sim 4\sigma$ . Спектральний індекс та амплітуда сигналу сумісні як зі злиттями надмасивних чорних дір, так і з SGWB від індукованих гравітаційних хвиль при  $k_{\text{break}} \sim 10^6\text{--}10^7 \text{ Мпк}^{-1}$ . Це відкриває унікальну можливість: майбутні дані LISA (запуск  $\sim 2035$ ) і вдосконалені PTA-масиви дозволять або підтвердити, або спростувати космологічне походження сигналу — і тим самим накласти прямі обмеження на форму первинного спектра збурень у діапазоні мас  $M_{\text{PBH}} \sim 10^{-12}\text{--}10^{-6} M_{\odot}$ .

### Відкриті питання

Підсумовуючи, виділимо ключові відкриті питання, кожне з яких може стати темою самостійного дослідження:

1. **Унікальність моделі.** Чи є злам первинного спектра єдиним інфляційним механізмом, здатним одночасно послабити Hubble tension,  $S_8$  tension і пояснити аномалії JWST — чи існують конкуруючі пояснення (рання темна енергія, масивні нейтрино, модифікована гравітація), що дають неповторний спостережний підпис?
2. **Природа темної енергії.** Результати DESI 2024 вказують на можливу динаміку  $w(z) \neq -1$ . Чи сумісна ця динаміка з інфляційними моделями, що породжують злам спектра, і як спільний аналіз змінює висновки щодо  $H_0$ ?
3. **Первинні чорні діри і темна матерія.** Якщо підсилення спектра достатнє для утворення PBH, яка їхня частка у темній матерії — і чи є сигнал NANOGrav свідченням саме цього механізму?
4. **Нелінійні ефекти.** Стандартний формалізм передавальних функцій є лінійним. Наскільки нелінійна еволюція збурень змінює передбачення для функції мас гало при  $z > 10$ , де дані JWST виявляють найбільші відхилення?
5. **Спостережна фальсифікованість.** Яка комбінація даних Euclid + CMB-S4 + LISA мінімально необхідна для однозначного визначення або спростування моделі зі зломом спектра?

Відповіді на ці питання формують дослідницький порядок денний сучасної прецизійної космології на найближче десятиліття.

**Частина V.**

**Чисельні методи**

# 11. Програмні пакети Python для космологічних досліджень

Сучасна теоретична та спостережна космологія є високотехнологічною дисципліною, де перевірка теоретичних моделей та аналіз даних експериментів (таких як *Planck*, *Euclid* чи *JWST*) спираються на потужний інструментарій чисельного моделювання. Найбільшого поширення в академічному середовищі набула екосистема мови Python, яка об'єднує спеціалізовані космологічні пакети та загальнонаукові бібліотеки для аналізу даних і машинного навчання.

Нижче наведено та класифіковано основні програмні пакети, які є стандартом у сучасних космологічних дослідженнях:

## 1. Пакети для лінійного аналізу збурень та еволюції СМВ:

- **CLASS** (*Cosmic Linear Anisotropy Solving System*) — один із двох найпопулярніших кодів для інтегрування лінійних збурень у ранньому Всесвіті. Написаний на мові C, але має повну та зручну обгортку `classy` для Python. Пакет дозволяє з високою точністю розраховувати спектри потужності температурних анізотропій та поляризації реліктового випромінювання, а також спектри потужності матерії  $P(k)$ .
- **CAMB** (*Code for Anisotropy in the Microwave Background*) — класичний інструмент для розрахунку анізотропії СМВ. Його обчислювальне ядро реалізоване на Fortran, проте Python-версія повністю інтегрована в сучасні конвеєри обробки даних і дозволяє гнучко модифікувати рівняння стану темної енергії або параметри первинного спектра збурень.

## 2. Статистичний аналіз та оцінка параметрів (MCMC sampling):

- **Cobaya** — сучасний фреймворк для байєсівського аналізу космологічних даних, розроблений для роботи з архівами *Planck* та майбутніх місій. Cobaya дозволяє зв'язувати розрахунки з CAMB або CLASS та запускати алгоритми Монте-Карло за схемами марковських ланцюгів (MCMC) для пошуку обмежень на космологічні параметри ( $\Omega_m$ ,  $H_0$ ,  $n_s$  тощо).
- **MontePython** — популярний MCMC-семплер, який традиційно використовується у зв'язці з кодом CLASS для порівняння теоретичних моделей із космологічними спостереженнями та побудови контурів довірчих інтервалів.

## 3. Загальні астрофізичні фреймворки та обробка даних:

- **Astropy** — фундаментальна бібліотека для астрономічних досліджень. Модуль `astropy.cosmology` містить готові класи для швидкого розрахунку різних типів відстаней (супутньої, кутової, світності) та еволюції густини енергії для стандартних моделей ( $\Lambda$ CDM,  $w$ CDM).
- **healpy** — Python-обгортка для бібліотеки HEALPix (*Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization*). Це критично важливий інструмент для роботи з картами реліктового випромінювання та великомасштабної структури, розбитими на сфері. Пакет дозволяє виконувати сферичне гармонічне перетворення для отримання мультипольних коефіцієнтів  $C_\ell$ .



Для чисельного розв’язання нестандартних динамічних систем (наприклад, для точного інтегрування рівняння Кляйна-Гордона-Фока зі складними видами потенціалів інфлатона на етапі розігріву) зазвичай використовуються базові наукові пакети [NumPy](#) та [SciPy](#) (зокрема, модулі для розв’язання жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь `scipy.integrate`). Візуалізація отриманих спектрів та еволюційних треків традиційно виконується за допомогою бібліотеки [Matplotlib](#).

### 11.1. Спостережні дані космічних місій на GitHub

Сучасні космологічні дослідження неможливі без доступу до реальних спостережних даних. Нижче наведено ключові репозиторії, де зберігаються дані основних космічних місій у форматі, готовому для використання з фреймворками типу `Cobaya` та `MontePython`.

#### Planck (2018 release, PR3/PR4)

Офіційні дані місії *Planck* є золотим стандартом за посиланням на аналіз СМВ. Репозиторії містять як спектри потужності, так і `likelihood` для МСМС-аналізу.

- [planck-lite-py](#) — Python-реалізація спрощеного `plik-lite likelihood` для *Planck* 2015/2018. Дозволяє швидко обчислювати  $\chi^2$  для TT, TE, EE спектрів. [54]
- [planck-low-py](#) — Стиснутий низькомультимпульний ( $\ell < 30$ ) `likelihood` для температури та *E*-мод поляризації. Оптимальний для спільних аналізів із іншими експериментами. [55]
- [clipy](#) — Чиста Python-реалізація офіційного *Planck* `clik` з підтримкою `jax`. Сумісна з `plik` (високі  $\ell$ ), `small` (низькі  $\ell$  поляризації) та `commander` (низькі  $\ell$  температура). [56]
- [planck\\_PR4\\_lensing](#) — Дані гравітаційного лінзування СМВ за результатами *Planck* PR4 (NPIPE). Включає карти збіжності лінзування (TT, polarization-only, MV) та МСМС-ланцюжки. [57]
- [planck\\_lensing\\_external](#) — Приклад зовнішнього `likelihood` для лінзування *Planck* 2018, сумісний з *Cobaya*.

#### CMB-S4, SPT-3G, Advanced SO

Для майбутніх та діючих експериментів існують *mock* дані, які використовуються для прогнозування точності майбутніх вимірювань.

- [CMB\\_BAO\\_SNe\\_likelihoods](#) — *Cobaya*-сумісні *mock likelihood* для спільного аналізу СМВ, BAO та SNe. Включає:
  - Mock СМВ дані для **SPT-3G**, **Advanced SO-Baseline**, **ASO-Goal** та **CMB-S4**.
  - Mock SNe дані для **DES** та **LSST**.
  - Mock BAO дані для **DESI-DR2** та **DESI-DR3**.

Цей репозиторій є чудовим інструментом для *forecasting* — оцінки того, наскільки точно майбутні місії зможуть виміряти космологічні параметри. [58]

### BAO та SNe дані

- **DESI** (Dark Energy Spectroscopic Instrument) — дані баріонних акустичних осциляцій доступні в репозиторіях, інтегрованих у Cobaya (DR2, DR3).
- **Pantheon+** — найбільша збірка кривих блиску наднових типу Ia, доступна для аналізу в Cobaya.

### Вимірювання $H_0$ (Hubble tension)

Для аналізу напруженості Хаббла Cobaya надає вбудовані гауссові likelihood для локальних вимірювань  $H_0$ :

- `H0.riess2018a`, `H0.riess2018b` — Riess et al. 2018.
- `H0.riess201903` — Riess et al. 2019.
- `H0.riess2020` — Riess et al. 2020.
- `H0.freedman2020` — Freedman et al. 2020.
- `H0.riess2020Mb` — обмеження на абсолютну зоряну величину  $M_b$  (для сумісного аналізу з SNe).

Документацію див. у [Cobaya docs](#).

### Як отримати дані безпосередньо з коду

Більшість перелічених репозиторіїв можна клонувати безпосередньо:

```
git clone https://github.com/heatherprince/planck-lite-py.git
git clone https://github.com/sriniraghunathan/CMB_BAO_SNe_likelihoods.git
```

Для офіційних даних Planck (спектри, карти) використовуйте [Planck Legacy Archive \(PLA\)](#). Дані PR4 (NPIPE) також доступні через [CMB-S4 Data Portal](#).

## 12. Практичний посібник: від даних СМВ до параметрів моделі

Цей додаток відповідає на одне питання: як людина, що прочитала цей конспект, може взяти реальні дані Planck і власноруч витягти з них космологічні параметри? Нижче — покроковий маршрут від встановлення пакетів до трикутного графіка posterior-розподілів.

Маршрут складається з чотирьох кроків:

1. Порахувати теоретичний спектр  $C_\ell^{TT}$  за допомогою CAMB.
2. Завантажити дані Planck і реалізувати простий  $\chi^2$ -фіт вручну.
3. Підключити байєсівський семплер Cobaya і запустити MCMC.
4. Прочитати результат: posterior-розподіли і довірчі контури.

### 12.1. Крок 1. Теоретичний спектр через CAMB

Встановлення:

```
pip install camb
```

Мінімальний скрипт, який рахує  $\mathcal{D}_\ell^{TT} = \ell(\ell + 1)C_\ell^{TT}/(2\pi)$  для стандартної моделі  $\Lambda$ CDM з параметрами Planck 2018:

```
import camb
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# ---
pars = camb.CAMBparams()
pars.set_cosmology(
    H0=67.36,          # [ / / ]
    ombh2=0.02237,     # Omega_b h^2
    omch2=0.1200,      # Omega_c h^2
    tau=0.0544,        #
)
pars.InitPower.set_params(
    As=2.1e-9,         #
    ns=0.9649,          #
)
pars.set_for_lmax(2500)

# ---
results = camb.get_results(pars)
powers = results.get_cmb_power_spectra(pars, CMB_unit='muK')
Dl_TT = powers['total'][:, 0] # D_ell^TT [ ^2]
ells = np.arange(len(Dl_TT))

# ---
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(ells[2:], Dl_TT[2:])
plt.xlabel(r'$\ell$')
plt.ylabel(r'$\mathcal{D}_\ell^{TT} \ [\mu\mathrm{K}]^2$')
plt.xscale('log')
plt.tight_layout()
plt.savefig('spectrum_lcdm.pdf')
```

Якщо все встановлено правильно, ви отримаєте графік з трьома добре видимими акустичними піками — той самий спектр, що і на рис. 8.2.

*Зауваження про одиниці.* CAMB повертає  $\mathcal{D}_\ell = \ell(\ell + 1)C_\ell / (2\pi)$  у мкК<sup>2</sup>. Саме в цих одиницях публікуються дані Planck, тому порівняння пряме.

## 12.2. Крок 2. Дані Planck і простий $\chi^2$ -фіт

### 12.2.1. Завантаження даних

Офіційні дані Planck 2018 доступні на сервері [ESA](#). Для початку достатньо бінованих TT-даних з файлу COM\_PowerSpect\_CMB-TT-binned\_R3.01.txt (колонки:  $\ell$ ,  $\mathcal{D}_\ell$ ,  $\sigma^-$ ,  $\sigma^+$ ).

```
import numpy as np

data = np.loadtxt('COM_PowerSpect_CMB-TT-binned_R3.01.txt')
ell_data = data[:, 0]
Dl_data = data[:, 1]
sigma_m = data[:, 2] #
sigma_p = data[:, 3] #
sigma = 0.5 * (sigma_m + sigma_p) #
```

### 12.2.2. Проста $\chi^2$ -статистика

Щоб зрозуміти принцип, реалізуємо наївний  $\chi^2$ -фіт вручну — без likelihood Planck, але з правильною фізичною логікою:

$$\chi^2(\theta) = \sum_{\ell} \frac{[\mathcal{D}_\ell^{\text{data}} - \mathcal{D}_\ell^{\text{theory}}(\theta)]^2}{\sigma_\ell^2}, \quad (12.1)$$

де  $\theta = \{H_0, \Omega_b h^2, \Omega_c h^2, \tau, A_s, n_s\}$ .

```
from scipy.optimize import minimize
from scipy.interpolate import interp1d

def get_theory(H0, ombh2, omch2, tau, As, ns):
    """  $\mathcal{D}_{\ell}^{TT}$   $\ell_{\ell}^{data}$  """
    pars = camb.CAMBparams()
    pars.set_cosmology(H0=H0, ombh2=ombh2,
                       omch2=omch2, tau=tau)
    pars.InitPower.set_params(As=As, ns=ns)
    pars.set_for_lmax(int(ell_data.max()) + 50)
    results = camb.get_results(pars)
    powers = results.get_cmb_power_spectra(
        pars, CMB_unit='muK')
    Dl_full = powers['total'][:, 0]
    ells_full = np.arange(len(Dl_full))
    interp = interp1d(ells_full, Dl_full,
                     kind='linear', fill_value='extrapolate')
    return interp(ell_data)

def chi2(params):
    H0, ombh2, omch2, tau, log_As, ns = params
    As = np.exp(log_As) * 1e-10
    Dl_th = get_theory(H0, ombh2, omch2, tau, As, ns)
    return np.sum((Dl_data - Dl_th) / sigma)**2

# --- Planck 2018
x0 = [67.36, 0.02237, 0.1200, 0.0544, np.log(21.0), 0.9649]
result = minimize(chi2, x0, method='Nelder-Mead',
```

```
options={'maxiter': 500, 'xatol': 1e-3})
print("Best-fit params:", result.x)
print("chi2_min / N_dof:", result.fun / len(ell_data))
```

*Застереження.* Цей  $\chi^2$  є наближенням: справжня likelihood Planck враховує некомутивність похибок і міжмультимпульні кореляції. Для публікаційних результатів використовують офіційний пакет `clik` або `candl`. Але для розуміння принципу цього достатньо.

## 12.3. Крок 3. МСМС через Cobaya

$\chi^2$ -мінімізація дає одну точку в просторі параметрів. МСМС дає повний posterior-розподіл — тобто відповідає на питання «наскільки добре параметр визначений?»

### 12.3.1. Що таке МСМС в двох словах

Алгоритм Метрополіса–Гастінгса будує ланцюжок точок  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$  у просторі параметрів так, що їхня щільність пропорційна posterior-розподілу  $P(\theta|\text{data}) \propto \mathcal{L}(\text{data}|\theta) \cdot \pi(\theta)$ , де  $\pi(\theta)$  — prior (попереднє знання про параметри). Після збіжності ланцюжка гістограма  $\theta_i$  і є posterior.

### 12.3.2. Встановлення і конфігурація

```
pip install cobaya
cobaya-install camb --packages-path ./packages
```

Конфігурація у форматі YAML (`lcdm_fit.yaml`):

```
likelihood:
  planck_2018_highl_plik.TT:
    path: ./packages/data/planck_2018

theory:
  camb:
    path: ./packages/code/CAMB

params:
  H0:
    prior: {min: 60, max: 80}
    ref: {mean: 67.36, std: 0.5}
    latex: H_0
  ombh2:
    prior: {min: 0.018, max: 0.026}
    ref: {mean: 0.02237, std: 0.0002}
    latex: \Omega_b h^2
  omch2:
    prior: {min: 0.10, max: 0.14}
    ref: {mean: 0.1200, std: 0.001}
    latex: \Omega_c h^2
  tau:
    prior: {min: 0.01, max: 0.12}
    ref: {mean: 0.0544, std: 0.007}
    latex: \tau
  logA:
    prior: {min: 2.5, max: 3.5}
    ref: {mean: 3.044, std: 0.014}
    drop: true
    latex: \ln(10^{10} A_s)
```

```

ns:
  prior: {min: 0.9, max: 1.05}
  ref:   {mean: 0.9649, std: 0.004}
  latex: n_s
As:
  value: "lambda logA: 1e-10*np.exp(logA)"
  latex: A_s

sampler:
  mcmc:
    Rminus1_stop: 0.01      #          Gelman-Rubin
    max_samples: 10000

output: chains/lcdm

```

Запуск:

```
cobaya-run lcdm_fit.yaml
```

*Критерій збіжності.* Параметр `Rminus1_stop: 0.01` означає критерій Гелмана–Рубіна  $\hat{R} - 1 < 0.01$ : якщо кілька паралельних ланцюжків дають однаковий розподіл, семплювання вважається збіжним. Типовий час на ноутбуці — кілька годин для TT-likelihood.

## 12.4. Крок 4. Читання результату

### 12.4.1. Трикутний графік (corner plot)

```

pip install getdist

from getdist import plots, MCSamples
import getdist.plots as gdplt

#      chain
samples = MCSamples(
    root='chains/lcdm',
    settings={'ignore_rows': 0.3} #      burn-in
)

#
g = gdplt.get_subplot_plotter()
g.triangle_plot(
    [samples],
    ['H0', 'ns', 'ombh2'],
    filled=True,
    contour_colors=['steelblue']
)
g.export('posterior_triangle.pdf')

```

Результат — матриця графіків: на діагоналі маргіналізовані 1D posterior-розподіли кожного параметра, поза діагоналлю — 2D контури довіри (68% і 95%).

### 12.4.2. Як читати posterior

- **Ширина 1D posterior** — це невизначеність параметра: чим вужча, тим краще дані його обмежують.
- **Нахил 2D контура** — кореляція між параметрами. Класичний приклад:  $H_0$  і  $\Omega_m$  антикорельовані через СМВ — їхній добуток  $\Omega_m h^2$  визначений краще ніж кожен окремо.



- **Зміщення центра** — якщо ваш best-fit далеко від таблиці Planck 2018, перевірте likelihood і prior.

### 12.4.3. Похідні параметри: $\Omega_m$ , $\sigma_8$ , $S_8$

MCMC семплює базові шість параметрів  $\{H_0, \Omega_b h^2, \Omega_c h^2, \tau, A_s, n_s\}$ . Але фізично цікавіші часто є *похідні* параметри — функції базових. Cobaya вміє рахувати їх автоматично і включати в chain.

**Параметри матерії.** Повна густину матерії  $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$  виводиться з базових через:

$$\Omega_m = \frac{\Omega_b h^2 + \Omega_c h^2}{(H_0/100)^2}. \quad (12.2)$$

У конфігурації Cobaya:

```
params:
  omegam:
    derived: >
      lambda ombh2, omch2, H0:
        (ombh2 + omch2) / (H0/100)**2
    latex: \Omega_m
  omegab:
    derived: "lambda ombh2, H0: ombh2 / (H0/100)**2"
    latex: \Omega_b
```

**Параметр  $\sigma_8$ .** Стандартне відхилення флуктуацій густини матерії на масштабі  $8h^{-1}$  Мпк — це ключовий параметр для порівняння з даними слабого лінзування і підрахунку скупчень. CAMB рахує його сам:

```
params:
  sigma8:
    derived: true # CAMB
    latex: \sigma_8
```

**Параметр  $S_8$ .** Комбінація, яка найкраще вимірюється слабким лінзуванням — вона «ортогональна» до  $H_0$  і тому є незалежним тестом моделі:

$$S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\frac{\Omega_m}{0.3}}. \quad (12.3)$$

```
params:
  S8:
    derived: "lambda sigma8, omegam: sigma8*(omegam/0.3)**0.5"
    latex: S_8
```

Після запуску MCMC всі ці параметри з'являться в chain і getdist покаже їхні posterior-розподіли поряд з базовими. Класичне питання: чи узгоджується  $S_8$  з Planck і з даними слабого лінзування DES/KiDS? Саме ця  $S_8$ -tension ( $\sim 2-3\sigma$ ) є другою відкритою суперечністю  $\Lambda$ CDM після Hubble tension.

### 12.4.4. Модифікований спектр: зламаний первинний спектр

Щоб перевірити модель зі зломом, достатньо замінити стандартний первинний спектр у CAMB. Додаємо два нових параметри:  $k_{\text{break}}$  — положення зламу,  $\Delta n$  — стрибок спектрального індексу:

---

```
def broken_pk(k, As, ns, k_break, delta_n):
    """
    pk = As * (k / 0.05) ** (ns - 1)
    pk[k > k_break] *= (k[k > k_break] / k_break) ** delta_n
    return pk
```

---

У конфігурації Cobaya додаємо нові параметри:

---

```
params:
  k_break:
    prior: {min: 0.01, max: 1.0} # [1/ ]
    ref:   {mean: 0.1, std: 0.02}
    latex: k_{\rm break}
  delta_n:
    prior: {min: -1.0, max: 1.0}
    ref:   {mean: 0.0, std: 0.1}
    latex: \Delta n
```

---

Якщо posterior для  $\Delta n$  зміститься від нуля більш ніж на  $2\sigma$  — це свідчення на користь нестандартного спектра.

## 12.5. Типові помилки початківця

1. **Забути про burn-in.** Перші  $\sim 30\%$  кроків ланцюжка — це «прогрів», їх треба відкидати (`ignore_rows: 0.3` у `getdist`).
2. **Занадто широкий prior.** Якщо prior охоплює фізично безглузді значення ( $\tau < 0$ ,  $H_0 < 40$ ), семплер витрачає час на нефізичні регіони. Prior має відображати реальне фізичне знання.
3. **Перевіряти  $\hat{R} - 1$ , а не тільки візуально.** Красивий графік не гарантує збіжність. Cobaya виводить  $\hat{R} - 1$  в лог — він має бути  $< 0.01$ .
4. **Неправильні одиниці в CAMB.** За замовчуванням CAMB повертає  $C_\ell$ , не  $\mathcal{D}_\ell$ . Завжди передавайте `CMB_unit='muK'` і перевіряйте чи ділите на  $2\pi/(\ell(\ell+1))$  якщо потрібно.
5. **Порівнювати  $\chi^2$ , а не  $\Delta\chi^2$ .** Абсолютне значення  $\chi^2$  залежить від нормування даних. Для порівняння двох моделей важливий  $\Delta\chi^2 = \chi^2_{\text{model}} - \chi^2_{\Lambda\text{CDM}}$  і критерій AIC/BIC для пеналізації зайвих параметрів.

## 12.6. Що читати далі

- **Документація CAMB:** <https://camb.readthedocs.io> — повний опис всіх параметрів і прикладів.
- **Документація Cobaya:** <https://cobaya.readthedocs.io> — включно з туторіалом по Planck likelihood.
- **Lesgourgues (2011) [59]** — детальний опис фізики за кодом CLASS.
- **Lewis & Bridle (2002) [60]** — оригінальна стаття про CosmoMC, де пояснена ідея MCMC для космологічних параметрів.

- **Planck 2018 likelihood paper** [61] — як влаштована офіційна likelihood і що таке Plik.

## А. Сучасні космологічні дані та параметри раннього Всесвіту

У цьому додатку зведено ключові космологічні параметри, отримані на основі комбінації сучасних спостережних даних: кутового спектра анізотропії реліктового випромінювання (CMB) космічної обсерваторії *Planck* (реліз 2018 року / Legacy data), даних баріонних акустичних осциляцій (BAO) з оглядів галактик (SDSS/eBOSS) [35], а також найсвіжіших локальних вимірювань та обмежень раннього Всесвіту.

### А.1. Ключові параметри стандартної космологічної моделі ( $\Lambda$ CDM)

У таблиці А.1 наведено базові (6-параметричні) та похідні космологічні характеристики Всесвіту на сьогоднішній день для комбінації даних *Planck* TT,TE,EE + lowE + lensing + BAO (довірчий інтервал 68%) [3].

**Таблиця А.1:** Сучасні значення космологічних параметрів  $\Lambda$ CDM [3].

| Параметр                                      | Позначення               | Значення (68% CL)             |
|-----------------------------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| <i>Базові (незалежні) параметри:</i>          |                          |                               |
| Густина баріонів                              | $\Omega_b h^2$           | $0.02242 \pm 0.00014$         |
| Густина холодної темної матерії               | $\Omega_c h^2$           | $0.11933 \pm 0.00091$         |
| Кутовий масштаб звукового горизонту           | $100 \theta_{\text{MC}}$ | $1.04109 \pm 0.00041$         |
| Оптична товща реонізації                      | $\tau$                   | $0.0544 \pm 0.0073$           |
| Спіральний індекс скалярних збурень           | $n_s$                    | $0.9665 \pm 0.0038$           |
| Амплітуда первинного спектра кривини          | $\ln(10^{10} A_s)$       | $3.044 \pm 0.014$             |
| <i>Похідні параметри:</i>                     |                          |                               |
| Сучасне значення сталої Хаббла                | $H_0$                    | $67.4 \pm 0.5$ км/с/Мпк       |
| Повний параметр густини матерії               | $\Omega_m$               | $0.315 \pm 0.007$             |
| Параметр густини темної енергії ( $\Lambda$ ) | $\Omega_\Lambda$         | $0.685 \pm 0.007$             |
| Флуктуації густини на масштабі $8 h^{-1}$ Мпк | $\sigma_8$               | $0.811 \pm 0.006$             |
| Вік Всесвіту                                  | $t_0$                    | $13.787 \pm 0.020$ млрд років |

*Примітка щодо напруги Хаббла (Hubble Tension):* Наведене значення  $H_0 \approx 67.4$  км/с/Мпк є результатом моделювання «зверху-вниз» на основі раннього Всесвіту (CMB) [3] одом «космічної драбини відстаней» проекту SH0ES (на основі Цефеїд та Наднових типу Ia), які дають  $H_0 = 73.04 \pm 1.04$  км/с/Мпк.

## А.2. Параметри та обмеження на стадію інфляції

Первинні збурення, зафіксовані в СМВ, накладають жорсткі обмеження на енергетичний масштаб інфляції та форму потенціалу інфлатона  $V(\phi)$ . Динаміку інфлатона і параметри повільного кочення розглянуто у розд. 3; первинний спектр збурень і визначення спектрального індексу — у розд. 5.

- **Тензорно-скалярне відношення ( $r$ ):** Сумісні дані *Planck* 2018 [3] та масивів BICEP/Keck [15] (обмеження за В-модю поляризації, розд. 9) встановлюють верхню межу:

$$r_{0.002} < 0.032 \quad (95\% \text{ CL})$$

Відношення  $r = 16\epsilon$  виражається через параметр повільного кочення  $\epsilon$  (3.4) за формулою (5.22). Це повністю виключає прості степеневі потенціали  $V(\phi) \propto \phi^2$  (хаотична інфляція Лінде, розд. 3.3) та робить фаворитами моделі типу Старобінського ( $R^2$ -гравітація) [16] або інфляцію Гіггса [17]; пор. також табл. 3.1.

- **Енергетичний масштаб інфляції ( $V_{\text{inf}}$ ):** Верхня межа на  $r$  обмежує густину енергії під час повільного кочення. З формули для тензорного спектра (5.21) та умови (3.9) ( $H^2 \approx V/3M_{\text{Pl}}^2$ ) випливає:

$$V^{1/4} < 1.6 \times 10^{16} \text{ GeV} \quad (95\% \text{ CL})$$

Це вказує на те, що інфляція відбувалася поблизу масштабу Великого Об'єднання (GUT scale).

- **Спектральний індекс ( $n_s$ ):** Значення  $n_s = 0.9665 \pm 0.0038$  (табл. А.1) пов'язане з параметрами slow-roll формулою (5.19):  $n_s - 1 = -2\epsilon - \eta_V$ , де  $\epsilon$  (3.4) та  $\eta_V$  (3.12) обчислюються в момент виходу моди за горизонт.
- **Просторова кривина Всесвіту ( $\Omega_K$ ):** Комбінація спектра СМВ з ефектом гравітаційного лінзування та ВАО [35] підтверджує плоску геометрію (рівняння Фрідмана (1.3а)–(1.3б) та  $\Omega_K$  у розд. 1):

$$\Omega_K = 0.0007 \pm 0.0019$$

Це повністю узгоджується з інфляційним передбаченням тривалості стадії  $N_{\text{total}} \gtrsim 50 - 60$ , яка виводиться у додатку Б (формула (Б.8)).

## А.3. Енергетичні та температурні характеристики стадії розігріву (Preheating / Reheating)

Оскільки стадія пре-розігріву є сильно нелінійним квантовим процесом, безпосередньо виміряти її температуру через релікти важко. Проте сучасна космологія накладає суворі *теоретичні та феноменологічні межі* на основі узгодження первинного нуклеосинтезу (BBN) та тривалості інфляції (параметра  $N_{\text{СМВ}}$ ). Детальний розгляд механізму розігріву та параметричного резонансу наведено у розд. 6 [32, 33]:

- **Абсолютна нижня межа температури розігріву ( $T_{\text{rh}}^{\text{min}}$ ):**

$$T_{\text{rh}} \gtrsim 4 - 5 \text{ MeV}$$

Ця межа є залізобетонною. Всесвіт *мусив* стати радіаційно-домінованим і термалізованим до моменту, коли його вік становив  $\sim 1$  секунду. Якщо  $T_{\text{rh}}$  була б нижчою, параметри розпаду нейтронів та швидкість розширення порушили б первинний нуклеосинтез, що суперечило б спостережуваній кількості легких елементів ( $^4\text{He}$ ,  $\text{D}$ ,  $^7\text{Li}$ ).

- **Верхня межа температури на момент Preheating ( $T_{\text{max}}$ ):** Енергія коливань інфлатона відразу після закінчення повільного кочення задає максимальну можливу температуру. З першого рівняння Фрідмана (1.3а) та виразу для густини (3.3) за умови  $V_{\text{end}} \approx \rho_{\text{inf}}$  [33]:

$$T_{\text{max}} \sim \left( \frac{30}{\pi^2 g_*} V_{\text{end}} \right)^{1/4} \lesssim 10^{15} - 10^{16} \text{ GeV}$$

де  $g_* \sim 100 - 200$  — ефективна кількість релятивістських ступенів вільності (пор. (Б.6)).

- **Ефективна температура на стадії параметричного резонансу (пре-розігрів):** Під час вибухового народження часток через рівняння Маттє (6.1) (розд. 6) система перебуває у *нетермальному стані* [32]. Поняття «температури» в термодинамічному сенсі ще не існує, оскільки спектри часток  $\chi_k$  є високоселективними та анізотропними. Проте, якщо оцінити еквівалент густоти енергії  $\rho_\chi \sim g^2 \Phi^2 \chi^2$ , квазі-температурний масштаб первинного спалаху становить:

$$T_{\text{inst}} \sim 10^{13} - 10^{14} \text{ GeV}$$

- **Температура завершення розігріву ( $T_{\text{rh}}$ ):** Повна термалізація настає при  $H \approx \Gamma_\phi$ . Підставляючи  $\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$  у перше рівняння Фрідмана (1.3а), отримуємо формулу (6.4):

$$T_{\text{rh}} = \left( \frac{90}{8\pi^3 g_*} \right)^{1/4} \sqrt{M_{\text{Pl}} \Gamma_\phi}$$

- **Обмеження з проблеми Гравітіно (Gravitino bound):** У суперсиметричних теоріях (SUSY) занадто висока температура  $T_{\text{rh}}$  призводить до надлишкового народження стабільних або метастабільних гравітіно, які руйнують легкі ядра під час BBN [33]. Щоб цього уникати, накладається верхня межа:

$$T_{\text{rh}} \lesssim 10^9 - 10^{10} \text{ GeV}$$

## А.4. Реліктовий фон та інші компоненти на сьогодні

- **Температура СМВ на сьогодні ( $T_{\text{СМВ}}$ ):** Виміряна з найвищою точністю приладом FIRAS на супутнику COBE і уточнена пізнішими місіями [3]. Вона є початковою умовою у виразі (Б.5) для  $T_0$ :

$$T_{\text{СМВ},0} = 2.72548 \pm 0.00057 \text{ K}$$

- **Густина реліктових фотонів:**  $n_\gamma \approx 411 \text{ cm}^{-3}$ .



- **Температура реліктових нейтрино (передбачувана):**

$T_\nu = (4/11)^{1/3} T_{\text{CMB}} \approx 1.945 \text{ K}$ , що отримується з закону збереження ентропії (Б.5); внесок нейтрино у  $H(z)$  пропорційний  $\Omega_\nu$ .

- **Обмеження на суму мас нейтрино ( $\sum m_\nu$ ):** Комбінація *Planck* CMB + lensing + ВАО [3, 35] обмежує сумарну масу трьох активних типів нейтрино зверху:

$$\sum m_\nu < 0.12 \text{ eV} \quad (95\% \text{ CL})$$

Це вказує на те, що внесок нейтрино у сучасну густину речовини є мізерним ( $\Omega_\nu \lesssim 0.003$ ); критична густина  $\rho_{\text{crit}}$  визначена у (1.4).

## Б. Математичний вивід тривалості інфляції та вікна спостережень СМВ

Для того щоб механізм інфляції розв'язував фундаментальні космологічні проблеми (горизонту та площини), тривалість прискореного розширення повинна перевищувати певне критичне значення. Розглянемо строгий кількісний вивід мінімально необхідної кількості  $e$ -folds ( $N_{\text{total}} \sim 50\text{--}60$ ), а також визначимо фізичні межі спостережуваного вікна анізотропії реліктового випромінювання ( $N_{\text{CMB}} \sim 7\text{--}8$ ).

### Б.1. Вивід загальної тривалості інфляції ( $N_{\text{total}}$ )

Проблема горизонту виникає через те, що наш теперішній спостережуваний горизонт (супутня відстань, яку світло пройшло від Великого вибуху до сьогодні  $t_0$ ) є набагато більшим за супутній горизонт Хаббла на початку гарячої стадії Всесвіту ( $t_g$ ).

Умова розв'язання проблеми горизонту вимагає, щоб максимальний супутній розмір причинно-зв'язаної області на самому початку інфляції ( $t_{\text{init}}$ ) був не меншим за супутній радіус нашого теперішнього спостережуваного горизонту:

$$\frac{1}{a_{\text{init}}H_{\text{inf}}} \geq \frac{1}{a_0H_0}, \quad (\text{Б.1})$$

де для спрощення припущено, що параметр Хаббла під час інфляції є приблизно константою ( $H_{\text{inf}} \approx \text{const}$ ).

Перепишемо нерівність (Б.1) через відношення масштабних факторів:

$$\frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{init}}} \geq \frac{a_{\text{end}}H_{\text{inf}}}{a_0H_0}. \quad (\text{Б.2})$$

За визначенням, кількість  $e$ -folds за час інфляції дорівнює  $N_{\text{total}} = \ln(a_{\text{end}}/a_{\text{init}})$ . Тоді мінімальне значення становить:

$$N_{\text{total}} \geq \ln\left(\frac{a_{\text{end}}}{a_0}\right) + \ln\left(\frac{H_{\text{inf}}}{H_0}\right). \quad (\text{Б.3})$$

Щоб оцінити відношення  $a_{\text{end}}/a_0$ , скористаємося законом збереження ентропії у супутньому об'ємі  $S = a^3s = \text{const}$  від моменту закінчення інфляції та розігріву до сьогоднішнього дня. Густина ентропії релятивістської плазми дорівнює:

$$s = \frac{2\pi^2}{45}g_*T^3, \quad (\text{Б.4})$$

де  $g_*$  — ефективна кількість релятивістських ступенів вільності. Нехтуючи зміною  $g_*$  за еволюцію (що дає похибку  $\Delta N \sim 1$ ), отримуємо:

$$\frac{a_{\text{end}}}{a_0} \approx \frac{T_0}{T_{\text{reht}}}, \quad (\text{Б.5})$$

де  $T_0 \approx 2.73 \text{ K} \approx 2.3 \times 10^{-4} \text{ eV}$  — сучасна температура СМВ, а  $T_{\text{reht}}$  — температура розігріву Всесвіту.

Енергетична густина наприкінці інфляції визначається фрідманівським рівнянням  $\rho_{\text{inf}} = 3M_{\text{Pl}}^2 H_{\text{inf}}^2$ . Припускаючи швидкий розігрів, коли вся енергія поля переходить у випромінювання, маємо  $\rho_{\text{inf}} \approx \rho_{\text{rad}} = \frac{\pi^2}{30} g_* T_{\text{reht}}^4$ . Звідси виразимо параметр Хаббла:

$$H_{\text{inf}} \approx \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{g_*}{10}} \frac{T_{\text{reht}}^2}{M_{\text{Pl}}}. \quad (\text{Б.6})$$

Підставимо співвідношення (Б.5) та (Б.6) у граничне рівняння (Б.3):

$$N_{\text{total}} \geq \ln \left( \frac{T_0}{T_{\text{reht}}} \right) + \ln \left( \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{g_*}{10}} \frac{T_{\text{reht}}^2}{M_{\text{Pl}} H_0} \right). \quad (\text{Б.7})$$

Групуючи доданки з  $T_{\text{reht}}$ , отримуємо фінальну аналітичну формулу для мінімальної тривалості інфляції:

$$N_{\text{total}} \geq \ln \left( \frac{T_0}{H_0} \right) + \ln \left( \frac{T_{\text{reht}}}{M_{\text{Pl}}} \right) + \mathcal{C}, \quad (\text{Б.8})$$

де константа  $\mathcal{C} = \ln \left( \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{g_*}{10}} \right) \approx 0$  для типових значень  $g_* \sim 100$ .

Підставимо чисельні значення сучасних спостережуваних констант:

- $H_0 \approx 67.4 \text{ км/с/Мпк} \approx 1.4 \times 10^{-33} \text{ еВ},$
- $T_0 \approx 2.3 \times 10^{-4} \text{ еВ} \implies \ln(T_0/H_0) \approx \ln(1.6 \times 10^{29}) \approx 67.2,$
- $M_{\text{Pl}} \approx 2.4 \times 10^{18} \text{ ГэВ} = 2.4 \times 10^{27} \text{ еВ}.$

Точне значення другого логарифма залежить від невідомого нам масштабу енергії розігріву  $T_{\text{reht}}$ :

1. **Верхня межа (Масштаб Великого об'єднання):** Якщо інфляція відбувалася на максимальних дозволених енергіях  $T_{\text{reht}} \sim 10^{16} \text{ ГэВ}$ , то  $\ln(T_{\text{reht}}/M_{\text{Pl}}) = \ln(10^{-2}) \approx -4.6$ . Тоді:

$$N_{\text{total}} \geq 67.2 - 4.6 \approx \mathbf{62.6}. \quad (\text{Б.9})$$

2. **Нижня межа (Низькоенергетичний розігрів):** Якщо інфляція відбувалася при значно нижчих енергіях, близьких до електрослабкого масштабу або мінімально припустимого за нуклеосинтезом  $T_{\text{reht}} \sim 10^3 \text{ ГэВ}$ , то  $\ln(T_{\text{reht}}/M_{\text{Pl}}) = \ln(10^{-15}) \approx -34.5$ . Тоді:

$$N_{\text{total}} \geq 67.2 - 34.5 \approx \mathbf{32.7}. \quad (\text{Б.10})$$

Оскільки більшість реалістичних суперсиметричних та струнних моделей тяжіють до високих масштабів енергій ( $10^{13}$ – $10^{15} \text{ ГэВ}$ ), підставимо цей діапазон явно:

3. **Типовий діапазон ( $T_{\text{reht}} \sim 10^{13}$ – $10^{15} \text{ ГэВ}$ ):**

- При  $T_{\text{reht}} \sim 10^{15} \text{ ГэВ}$ :  $\ln(T_{\text{reht}}/M_{\text{Pl}}) \approx -7.8$ , тому  $N_{\text{total}} \geq 67.2 - 7.8 \approx 59$ .
- При  $T_{\text{reht}} \sim 10^{13} \text{ ГэВ}$ :  $\ln(T_{\text{reht}}/M_{\text{Pl}}) \approx -12.4$ , тому  $N_{\text{total}} \geq 67.2 - 12.4 \approx 55$ .

Саме звідси і береться стандартне вікно  $N_{\text{total}} \sim 50$ – $60$ : нижня межа  $32.7$  технічно достатня для розв'язання проблеми горизонту, але відповідає нереалістично низькому розігріву ( $T_{\text{reht}} \sim 10^3 \text{ ГэВ}$  — на межі нуклеосинтезу). Для фізично мотивованих моделей з високим розігрівом  $N_{\text{total}} \sim 55$ – $63$ .

## Б.2. Вивід меж вікна спостережень СМВ ( $N_{\text{СМВ}}$ )

Ми бачимо реліктове випромінювання не з усього простору, а лише всередині нашого поточного горизонту Хаббла. Хвилі первинних квантових збурень інфлатона покидали горизонт під час інфляції, коли їхня фізична довжина хвилі  $\lambda_{\text{phys}}(t) = \frac{2\pi}{k}a(t)$  зрівнювалася з радіусом Хаббла  $H_{\text{inf}}^{-1}$ .

Умова виходу моди з-під горизонту має вигляд:

$$k = a_{\text{exit}} H_{\text{inf}}. \quad (\text{Б.11})$$

Найбільший просторовий масштаб, який ми взагалі можемо зафіксувати сьогодні — це масштаб нашого сучасного горизонту, що відповідає мінімальному хвильовому числу  $k_{\text{min}} = a_0 H_0$  (мультиполь анізотропії СМВ  $\ell \sim 2$ ). Мода, що відповідає цьому масштабу, вийшла за горизонт у момент часу  $t_{\text{min}}$ , коли:

$$a_0 H_0 = a(t_{\text{min}}) H_{\text{inf}}. \quad (\text{Б.12})$$

Найменший масштаб (максимальне  $k_{\text{max}}$ ), який надійно зафіксований космічною місією *Planck* в кутовому спектрі температурної анізотропії, обмежений затуханням Сілка на мультиполях  $\ell \sim 2500$ . Цей масштаб приблизно в  $10^3$  разів менший за радіус сучасного горизонту, тобто  $k_{\text{max}} \approx 10^3 k_{\text{min}} = 10^3 a_0 H_0$ . Відповідна мода вийшла з-під горизонту в момент  $t_{\text{max}}$ , коли:

$$10^3 a_0 H_0 = a(t_{\text{max}}) H_{\text{inf}}. \quad (\text{Б.13})$$

Знайдемо кількість  $e$ -folds  $\Delta N_{\text{СМВ}}$ , яка минула між моментом виходу найбільшого спостережуваного масштабу ( $t_{\text{min}}$ ) та найменшого ( $t_{\text{max}}$ ):

$$\Delta N_{\text{СМВ}} = \ln \left( \frac{a(t_{\text{max}})}{a(t_{\text{min}})} \right) = \ln \left( \frac{10^3 a_0 H_0 / H_{\text{inf}}}{a_0 H_0 / H_{\text{inf}}} \right) = \ln(10^3). \quad (\text{Б.14})$$

Обчислимо натуральний логарифм:

$$\Delta N_{\text{СМВ}} = 3 \cdot \ln(10) \approx 3 \times 2.302 = \mathbf{6.91}. \quad (\text{Б.15})$$

Якщо врахувати додаткове розширення вікна за рахунок спектра поляризації та великомасштабної структури (діапазон масштабів розширюється приблизно до  $e^8$ ), математично строгий інтервал усього доступного для людства вікна спостережень первинних збурень становить:

$$N_{\text{СМВ}} \sim \mathbf{7 - 8} \text{ } e\text{-folds}. \quad (\text{Б.16})$$

Усі структури Всесвіту, які ми вивчаємо експериментально, народилися протягом цієї крихітної миті тривалістю менше 8  $e$ -фолдів на самому фіналі інфляції. Решта 40–50  $e$ -folds інфляційного потенціалу  $V(\phi)$  назавжди стерті для прямих астрофізичних спостережень СМВ, оскільки відповідні їм квантові флуктуації розтягнуті до масштабів, що лежать глибоко за межами сучасного метагалактичного горизонту.

## В. Ньютонівська космологія і закон збереження енергії

### В.1. Рівняння Фрідмана з ньютонівської механіки

Один із найцікавіших фактів у космології: перше рівняння Фрідмана можна *вивести* з ньютонівської механіки — без жодної ЗТВ. Звичайно, це збіг лише частковий і має глибоке пояснення (теорема Біркгофа, про яку нижче), але педагогічна цінність такого підходу важко переоцінити.

#### Про «евристичний» статус виводу

Слід підкреслити, що наведене нижче виведення є *евристичним*, а не строгим у рамках ньютонівської теорії. Класична механіка Ньютона, застосована до безмежного однорідного середовища, стикається з відомими труднощами — *парадоксом Зелігера* (або парадоксом Неймана-Зелігера): у статичному безмежному Всесвіті гравітаційний потенціал розбігається, а сила, що діє на пробне тіло, стає невизначеною через умовно збіжний ряд. Сучасне розв'язання цієї проблеми полягає в тому, що закон всесвітнього тяжіння в космологічному контексті слід розуміти не як дію на відстані, а як локальне рівняння поля (рівняння Пуассона), де густина джерела  $\rho$  відраховується від середнього космологічного значення. Строге ж обґрунтування однорідного ізотропного розширення дає лише загальна теорія відносності, яка усуває ці парадокси шляхом динамізації самого простору-часу. Наведений нижче вивід слід сприймати як наочну ілюстрацію, що дозволяє вгадати форму рівнянь Фрідмана, але не як альтернативу ЗТВ.

**Вирізаємо кулю.** Розглянемо однорідний ізотропний Всесвіт густиною  $\rho(t)$ . Вирізаємо уявну кулю радіусом  $r = a(t) r_0$ , де  $r_0$  — фіксована супутня координата. За теоремою Гаусса для ньютонівської гравітації, зовнішня оболонка не діє на внутрішню. Тому на пробну частинку масою  $m$  на поверхні кулі діє лише гравітація внутрішньої маси:

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho(t).$$

**Закон збереження енергії.** Повна механічна енергія частинки на поверхні:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GmM}{r} = E = \text{const.}$$

Підставляємо  $r = ar_0$ ,  $\dot{r} = \dot{a}r_0$ ,  $M = \frac{4}{3}\pi a^3 r_0^3 \rho$ :

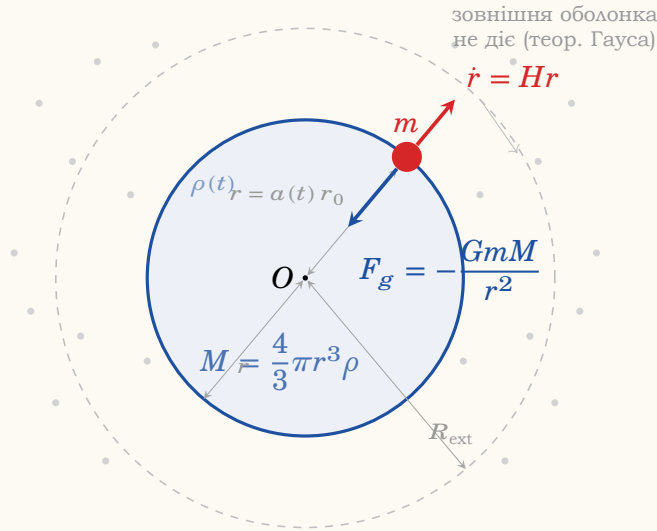
$$\frac{1}{2}m\dot{a}^2 r_0^2 - \frac{4\pi G}{3} m \rho a^2 r_0^2 = E.$$

Ділимо на  $\frac{1}{2}ma^2 r_0^2$  і вводимо  $H = \dot{a}/a$ :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{2E}{mr_0^2 a^2}. \quad (\text{В.1})$$

Це і є **перше рівняння Фрідмана** (1.3а) з ідентифікацією  $k = -2E/(mr_0^2)$ <sup>1</sup>:

<sup>1</sup>На перший погляд  $k$  залежить від радіуса довільної кулі  $r_0$  — але це не так. Повна енергія



**Рис. В.1:** Ньютонівська модель однорідного Всесвіту. Вирізаємо уявну кулю радіусом  $r = a(t)r_0$  з однорідного середовища густиною  $\rho(t)$ . Пробна частинка  $m$  на поверхні відчуває лише гравітацію внутрішньої маси  $M$  (теорема Гауса): зовнішня оболонка не дає внеску. Закон збереження енергії  $T + U = E$  для цієї частинки безпосередньо відтворює перше рівняння Фрідмана (В.1).

- $E < 0$  (зв'язана система)  $\leftrightarrow k = +1$  (замкнений Всесвіт),
- $E = 0$  (параболічна орбіта)  $\leftrightarrow k = 0$  (плаский Всесвіт),
- $E > 0$  (незв'язана система)  $\leftrightarrow k = -1$  (відкритий Всесвіт).

**Друге рівняння Фрідмана.** Другий закон Ньютона для тієї ж частинки:

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3}m\rho r.$$

Підставляємо  $r = ar_0$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho. \quad (\text{В.2})$$

Порівняємо з релятивістським (1.36):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}.$$

Різниця принципова: у ньютонівській версії *немає тиску*. У ЗТВ тиск гравітує нарівні з масою — саме тому в сильних полях і при великих швидкостях ньютонівська космологія хибує. Для нерелятивістської матерії ( $p \ll \rho c^2$ ) обидва виразу збігаються.

---

пробної частинки  $E \propto mr_0^2$  (кінетична та потенціальна енергії обидві пропорційні  $r_0^2$ ), тому відношення  $E/(mr_0^2)$  не залежить від вибору  $r_0$ . Параметр  $k$  є глобальною характеристикою геометрії Всесвіту, а не залежить від того, яку кулю ми вирізали. У ньютонівській картині  $k$  — це просто знак повної енергії на одиницю маси. У ЗТВ той самий параметр набуває геометричного змісту: він визначає знак просторової кривини і приймає лише значення  $-1, 0, +1$ .



**Небезпечний збіг для фотонів**

Якщо продиференціювати рівняння (В.1) по часу і підставити  $\rho \propto a^{-4}$  (радіація), формально отримаємо рівняння прискорення  $\ddot{a}/a = -\frac{8\pi G}{3}\rho$  (пор. з (В.2)) — що точно збігається з релятивістським результатом для випромінювання  $-\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = -\frac{8\pi G}{3}\rho$  при  $p = \rho/3$ .

Це *математичний збіг*, а не фізична закономірність. У ньютонівській механіці однорідний тиск не має гравітаційної маси —  $\nabla p = 0$  у однорідному Всесвіті, тому тиск взагалі не впливає на прискорення кулі. Член  $3p$  у релятивістському рівнянні — суто ефект ЗТВ: тиск безпосередньо викривляє простір-час через компоненту тензора енергії-імпульсу  $T^{ii}$ . Збіг числових коефіцієнтів є випадковим наслідком диференціювання закону збереження — не більше.

*Висновок:* ньютонівський підхід є строго легітимним лише для пилу ( $p = 0$ ). Для радіації та інфлатона він дає правильну відповідь лише «за збігом обставин».

**Чому це працює? Теорема Біркгофа.** У ЗТВ існує точний аналог теореми Гаусса — *теорема Біркгофа*: метрика поза сферично-симетричним розподілом маси є метрикою Шварцшильда незалежно від того, чи пульсує ця маса. Це гарантує, що зовнішня оболонка справді не впливає на внутрішню, і ньютонівський аргумент виявляється точним у ЗТВ — аж до ролі тиску і космологічної сталої.

**В.2. Закон збереження енергії в космології****У ньютонівській картині**

У виводі вище ми записали  $E = \text{const}$  — і це є буквальною законом збереження повної механічної енергії. Рівняння (В.1) є нічим іншим як  $T + U = E$ .

Однак при розширенні Всесвіту виникає парадокс: звідки береться кінетична енергія розльоту галактик? Відповідь ньютонівська: за рахунок гравітаційної потенціальної енергії. При  $k = 0$  повна енергія нульова: кінетична і потенціальна точно компенсують одна одну.

**У ЗТВ: рівняння збереження і його статус**

Третє рівняння Фрідмана:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$$

виглядає як рівняння неперервності, але *не* є законом збереження енергії у звичайному сенсі. Щоб це зрозуміти, запишемо його через об'єм  $V \propto a^3$ :

$$\dot{\rho} + 3H\rho = -3Hp \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\rho V)}{dt} = -p \frac{dV}{dt}.$$

Ліва частина — зміна повної енергії  $E = \rho V$ , права — робота тиску  $-p dV$ . Це виглядає як перший закон термодинаміки  $dE = -p dV$ , і в цьому сенсі енергія «зберігається». Однак ця аналогія є математичною тотожністю — не причинно-наслідковим зв'язком. По-перше, права частина  $-p dV$  не означає що «простір виконує роботу над речовиною»: це лише геометричний наслідок розширення метрики. По-друге, у космології немає «зовнішнього середовища» — Всесвіт не розширюється *у щось*, тому класична термодинамічна інтерпретація роботи тиску тут принципово неповна. Фізична інтерпретація залежить від природи компоненти — як ми побачимо нижче.

Але є тонкість: **для фотонів** ( $p = \rho/3$ ,  $\rho \propto a^{-4}$ ) повна енергія  $E = \rho V \propto a^{-4} \cdot a^3 = a^{-1}$  спадає. Куди йде ця енергія? Права частина  $-p dV < 0$ : фотони виконують додатну роботу над розширюваним об'ємом — і ця робота нікуди не акумулюється. Вона просто розчиняється у геометрії простору, що розширюється.

Протилежна ситуація — **темна енергія** ( $p = -\rho$ ,  $w = -1$ ): права частина  $-p dV = +\rho dV > 0$ , тобто при розширенні повна енергія  $E = \rho V \propto a^3$  зростає. Від'ємний тиск означає, що при розширенні об'єму  $dV > 0$  права частина  $-p dV = +\rho dV > 0$  — повна енергія зростає. Але це не «робота над зовнішнім середовищем»: у космології немає зовнішнього середовища. Математично це просто відображення того факту що густина  $\rho \approx \text{const}$  при зростаючому об'ємі. Саме це зростання повної енергії вакууму і є двигуном прискореного розширення.

Для **інфлатона** під час інфляції ( $w \approx -1$ ) діє та сама логіка що і для темної енергії: права частина  $-p dV \approx +\rho dV > 0$ , тому повна енергія  $E = \rho V \propto a^3$  зростає разом з об'ємом. Але тут є принципова відмінність від фотонів, яка знімає уявний парадокс: енергія інфлатона росте не тому, що простір «передає» йому роботу (гравітація не виконує роботу над полем у класичному розумінні). Вона росте тому, що густина потенціальної енергії поля  $V(\phi) \approx \text{const}$  є фундаментальною властивістю самого вакуумного стану — при розширенні створюється новий простір, який автоматично заповнюється тим самим полем з тією самою густиною енергії. Тому «накопичена» енергія плазми після розігріву походить не з роботи розширення, а з потенціалу скалярного поля — він і є справжнім джерелом енергії. Після закінчення інфляції інфлатон розпадається на звичайні частинки (розігрів), і саме ця потенційна енергія поля переходить у гарячу плазму.

### Теорема Нетер і відсутність симетрії

У класичній механіці закон збереження енергії є наслідком **теорема Нетер**: симетрії лагранжіана відносно часових зсувів ( $t \rightarrow t + \epsilon$ ) відповідає збережена величина — енергія.

У розширюваному Всесвіті ця симетрія *порушена*: метрика FLRW явно залежить від часу через  $a(t)$ . Тому глобального закону збереження енергії немає — і це не математична вада формалізму, а фізична реальність.

#### Чи порушується закон збереження енергії у космології?

Точніше питання: чи існує глобальна енергія яка б зберігалась? Відповідь — ні, і не тому що енергія «порушується», а тому що у викривленому просторі-часі FLRW немає способу однозначно визначити таку величину. У загальній відносності закон збереження — це локальне рівняння  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , яке завжди виконується і дає рівняння (1.3в). Глобальна ж енергія не визначена бо немає єдиного вектора Кілінга часової трансляції<sup>a</sup> для метрики FLRW (він існує лише для статичних просторів-часів).

Отже, фотони справді «червоніють» і втрачають енергію. Ця енергія не переходить нікуди — вона просто зникає у геометрії простору, що розширюється. Саме тому космологія вимагає відмовитися від деяких інтуїтивних уявлень класичної фізики.

<sup>a</sup>Вектор Кілінга — це векторне поле  $\xi^\mu$ , що задовольняє рівнянню  $\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0$ . Фізичний зміст: потік вздовж  $\xi^\mu$  є симетрією метрики, а збережена вздовж геодезичної величина  $p_\mu \xi^\mu = \text{const}$  є відповідним інтегралом руху. Для статичного простору-часу існує вектор Кілінга  $\xi^\mu = (1, 0)$ , якому відповідає збережена енергія. Метрика FLRW залежить від часу через  $a(t)$  — тому такого вектора немає, і глобальна енергія не визначена.

### Практичний підсумок

- **Ньютонівське виведення рівняння Фрідмана** є коректним лише за умови постулювання  $r(t) \propto a(t)$  і дає правильну структуру лише для пилу ( $p = 0$ ).
- **Параметр кривини**  $k$  виникає як  $-2E/(mr_0^2)$  і не залежить від вибору  $r_0$ ; у ЗТВ він набуває лише значень  $-1, 0, +1$ .
- **Друге рівняння Фрідмана в ньютонівській версії** не містить тиску. Збіг для радіації після диференціювання закону збереження є *випадковим*, а не фізичним.
- **Рівняння неперервності**  $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$  є локальним законом збереження  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , але не виражає глобального збереження енергії через відсутність вектора Кілінга в метриці FLRW.
- **Аналогія**  $dE = -p dV$  — це математичний наслідок, а не фізичний перший закон термодинаміки; у космології немає «зовнішнього середовища».
- **Для фотонів** ( $w = 1/3$ ) повна енергія  $E = \rho V \propto a^{-1}$  спадає; ця енергія не переходить нікуди, а «розчиняється» в геометрії простору-часу.
- **Для темної енергії та інфлатона** ( $w \approx -1$ ) густина енергії залишається сталою, тому  $E = \rho V \propto a^3$  зростає. Джерело — потенціальна енергія поля  $V(\phi)$ , а не робота розширення.
- **Глобальна енергія у викривленому просторі-часі** не є однозначно визначеною величиною; тому твердження «енергія не зберігається» слід розуміти як «немає способу визначити глобальну енергію яка б зберігалась».
- **Космологічне червоне зміщення** — це ефект порівняння вимірювань у різних локально-інерційних системах відліку, а не поступова втрата енергії фотоном під час подорожі.

# Литература

- <sup>1</sup>S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, Oxford, 2008).
- <sup>2</sup>D. Baumann, *Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2022), [10.1017/9781108937092](#).
- <sup>3</sup>N. Aghanim et al. (Planck), “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”, *Astronomy & Astrophysics* **641**, A6 (2020) [10.1051/0004-6361/201833910](#), [arXiv:1807.06209 \[astro-ph.CO\]](#).
- <sup>4</sup>S. Perlmutter et al. (Supernova Cosmology Project), “Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae”, *The Astrophysical Journal* **517**, 565–586 (1999) [10.1086/307221](#), [arXiv:astro-ph/9812133](#).
- <sup>5</sup>A. G. Riess et al. (High- $z$  Supernova Search Team), “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”, *The Astronomical Journal* **116**, 1009–1038 (1998) [10.1086/300499](#), [arXiv:astro-ph/9805200](#).
- <sup>6</sup>A. D. Linde, “A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems”, *Physics Letters B* **108**, 389–393 (1982) [10.1016/0370-2693\(82\)91219-9](#).
- <sup>7</sup>A. Albrecht and P. J. Steinhardt, “Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking”, *Physical Review Letters* **48**, 1220–1223 (1982) [10.1103/PhysRevLett.48.1220](#).
- <sup>8</sup>A. H. Guth, “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems”, *Physical Review D* **23**, 347–356 (1981) [10.1103/PhysRevD.23.347](#).
- <sup>9</sup>A. D. Linde, “Chaotic inflation”, *Phys. Lett. B* **129**, 177–181 (1983) [10.1016/0370-2693\(83\)90837-7](#).
- <sup>10</sup>A. A. Starobinsky, «Stochastic de Sitter (inflationary) stage in the early universe», в *Current Topics in Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, т. 246, за ред. H. J. de Vega та N. Sánchez, Lecture Notes in Physics (1986), с. 107—124, [10.1007/3-540-16452-9\\_6](#).
- <sup>11</sup>S. Ferrara, R. Kallosh, A. Linde та M. Porrati, «Minimal Supergravity Inflation,  $\alpha$ -Attractors and Planck», *Physical Review D* **88**, 085038 (2013) [10.1103/PhysRevD.88.085038](#), [arXiv:1307.7696 \[hep-th\]](#).
- <sup>12</sup>R. Kallosh та A. Linde, «Universality,  $\alpha$ -attractors and attractor universes», *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2013**, 002 (2013) [10.1088/1475-7516/2013/11/002](#), [arXiv:1309.4411 \[hep-th\]](#).
- <sup>13</sup>S. L. Finkelstein et al., “CEERS key paper I: an early look into the first 500 Myr of galaxy formation with JWST”, *ApJL* **946**, L13 (2023) [10.3847/2041-8213/acade4](#), [arXiv:2211.05792 \[astro-ph.GA\]](#).
- <sup>14</sup>M. Boylan-Kolchin, “Stress testing  $\Lambda$ CDM with high-redshift galaxy candidates”, *Nature Astronomy* **7**, 731–735 (2023) [10.1038/s41550-023-01937-7](#), [arXiv:2208.01611 \[astro-ph.CO\]](#).

- <sup>15</sup>P. A. R. Ade et al. (BICEP/Keck), “BICEP / Keck XV: Constraints on Primordial Gravitational Waves Using Autospectra and Cross-Spectra with the WMAP and Planck Satellites”, *Physical Review Letters* **127**, 151301 (2021) [10.1103/PhysRevLett.127.151301](#), [arXiv:2110.00483 \[astro-ph.CO\]](#).
- <sup>16</sup>A. A. Starobinsky, “A new type of isotropic cosmological models without singularity”, *Phys. Lett. B* **91**, 99–102 (1980) [10.1016/0370-2693\(80\)90670-X](#).
- <sup>17</sup>F. L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, “The standard model higgs boson as the inflaton”, *Phys. Lett. B* **659**, 703–706 (2008) [10.1016/j.physletb.2007.11.072](#), [arXiv:0710.3755](#).
- <sup>18</sup>K. Freese, J. Frieman, and A. Olinto, “Natural inflation with pseudo nambu-goldstone bosons”, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3233–3236 (1990) [10.1103/PhysRevLett.65.3233](#).
- <sup>19</sup>J. M. Stewart and M. Walker, “Perturbations of space-times in general relativity”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **341**, 49–74 (1974) [10.1098/rspa.1974.0172](#).
- <sup>20</sup>V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005), [10.1017/CB09780511790553](#).
- <sup>21</sup>J. M. Bardeen, “Gauge-invariant cosmological perturbations”, *Physical Review D* **22**, 1882–1905 (1980) [10.1103/PhysRevD.22.1882](#).
- <sup>22</sup>T. S. Bunch and P. C. W. Davies, “Quantum field theory in de Sitter space: Renormalization by point-splitting”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **360**, 117–134 (1978) [10.1098/rspa.1978.0060](#).
- <sup>23</sup>S. W. Hawking, “The development of irregularities in a single bubble inflationary universe”, *Physics Letters B* **115**, 295–297 (1982) [10.1016/0370-2693\(82\)90373-2](#).
- <sup>24</sup>A. H. Guth and S.-Y. Pi, “Fluctuations in the New Inflationary Universe”, *Physical Review Letters* **49**, 1110–1113 (1982) [10.1103/PhysRevLett.49.1110](#).
- <sup>25</sup>V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, “Quantum fluctuations and a nonsingular Universe”, *JETP Letters* **33**, [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33 (1981) 549–553], 532–535 (1981).
- <sup>26</sup>E. R. Harrison, “Fluctuations at the Threshold of Classical Cosmology”, *Physical Review D* **1**, 2726–2730 (1970) [10.1103/PhysRevD.1.2726](#).
- <sup>27</sup>Y. B. Zel’dovich, “A Hypothesis, Unifying the Structure and the Entropy of the Universe”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **160**, 1P–3P (1972) [10.1093/mnras/160.1.1P](#).
- <sup>28</sup>G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation”, *Physical Review D* **15**, 2738–2751 (1977) [10.1103/PhysRevD.15.2738](#).
- <sup>29</sup>A. A. Starobinsky, “Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe”, *JETP Letters* **30**, [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 30 (1979) 719–723], 682–681 (1979).
- <sup>30</sup>D. Polarski and A. A. Starobinsky, “Semiclassicality and decoherence of cosmological perturbations”, *Class. Quant. Grav.* **13**, 377–391 (1996) [10.1088/0264-9381/13/3/011](#), [arXiv:gr-qc/9504030 \[gr-qc\]](#).



- <sup>31</sup>C. Kiefer, D. Polarski та A. A. Starobinsky, «Quantum-to-classical transition for fluctuations in the early universe», *Int. J. Mod. Phys. D* **7**, 455—462 (1998) 10.1142/S020173859800025X, [arXiv:gr-qc/9802003 \[gr-qc\]](#).
- <sup>32</sup>L. Kofman, A. D. Linde, and A. A. Starobinsky, “Towards the theory of reheating after inflation”, *Physical Review Letters* **73**, 3195—3198 (1994) 10.1103/PhysRevLett.73.3195, [arXiv:hep-th/9405187](#).
- <sup>33</sup>L. Kofman, A. D. Linde, and A. A. Starobinsky, “Towards postinflationary reheating”, *Physical Review D* **56**, 3258—3295 (1997) 10.1103/PhysRevD.56.3258, [arXiv:hep-ph/9704452](#).
- <sup>34</sup>P. Mészáros, «The behaviour of point disturbances in a radiation-dominated Universe», *Astronomy and Astrophysics* **37**, 225—228 (1974).
- <sup>35</sup>D. J. Eisenstein et al. (SDSS), “Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies”, *The Astrophysical Journal* **633**, 560—574 (2005) 10.1086/466512, [arXiv:astro-ph/0501171](#).
- <sup>36</sup>ESA and Planck Collaboration, *Planck’s view of the cosmic microwave background*, ESA Multimedia Gallery, Image based on Planck 2018 Legacy data release. Credit: ESA/Planck Collaboration, July 2018.
- <sup>37</sup>W. Hu and N. Sugiyama, “Anisotropies in the Cosmic Microwave Background: An Analytic Approach”, *The Astrophysical Journal* **444**, 489—506 (1995) 10.1086/175624, [arXiv:astro-ph/9411008](#).
- <sup>38</sup>M. Zaldarriaga та U. Seljak, «An all-sky analysis of polarization in the microwave background», *Phys. Rev. D* **55**, 1830—1840 (1997) 10.1103/PhysRevD.55.1830, [arXiv:astro-ph/9609170](#).
- <sup>39</sup>M. Kamionkowski, A. Kosowsky та A. Stebbins, «Statistics of cosmic microwave background polarization», *Phys. Rev. D* **55**, 7368—7388 (1997) 10.1103/PhysRevD.55.7368, [arXiv:astro-ph/9611125](#).
- <sup>40</sup>BICEP2 Collaboration, P. A. R. Ade та ін., «Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2», *Phys. Rev. Lett.* **112**, 241101 (2014) 10.1103/PhysRevLett.112.241101, [arXiv:1403.3985](#).
- <sup>41</sup>BICEP2/Keck Array and Planck Collaborations, P. A. R. Ade та ін., «Joint Analysis of BICEP2/Keck Array and Planck Data», *Phys. Rev. Lett.* **114**, 101301 (2015) 10.1103/PhysRevLett.114.101301, [arXiv:1502.00612](#).
- <sup>42</sup>A. G. Adame et al. (DESI), “DESI 2024 VI: Cosmological Constraints from the Measurements of Baryon Acoustic Oscillations”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2025**, 021 (2025) 10.1088/1475-7516/2025/02/021, [arXiv:2404.03002 \[astro-ph.CO\]](#).
- <sup>43</sup>I. Labbé et al., “A population of red candidate massive galaxies ~600 Myr after the Big Bang”, *Nature* **616**, 266—269 (2023) 10.1038/s41586-023-05786-2, [arXiv:2207.12446 \[astro-ph.GA\]](#).
- <sup>44</sup>S. L. Finkelstein, M. B. Bagley, H. C. Ferguson, et al., “A Long Time Ago in a Galaxy Far, Far Away: A Candidate  $z \approx 12$  Galaxy in Early JWST CEERS Imaging”, *The Astrophysical Journal Letters* **946**, L13 (2023) 10.3847/2041-8213/acade4, [arXiv:2207.12474 \[astro-ph.GA\]](#).
- <sup>45</sup>M. Boylan-Kolchin, “Stress testing  $\Lambda$ CDM with high-redshift galaxy candidates”, *Nature Astronomy* **7**, 731—735 (2023) 10.1038/s41550-023-01937-7, [arXiv:2208.01611 \[astro-ph.CO\]](#).



- <sup>46</sup>Euclid Collaboration, “Euclid. i. overview of the euclid mission”, *Astron. Astrophys.* **683**, A175 (2024) 10.1051/0004-6361/202347093, arXiv:2405.13491.
- <sup>47</sup>R. Akeson et al., “The Wide Field Infrared Survey Telescope: 100 Hubbles for the 2020s”, Science overview for the Nancy Grace Roman Space Telescope (formerly WFIRST); launch scheduled 2026 (2019), arXiv:1902.05569 [astro-ph.IM].
- <sup>48</sup>P. Ade et al. (Simons Observatory), “The Simons Observatory: science goals and forecasts”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2019**, 056 (2019) 10.1088/1475-7516/2019/02/056, arXiv:1808.07445 [astro-ph.CO].
- <sup>49</sup>K. Abazajian et al. (CMB-S4), “Snowmass 2021 CMB-S4 White Paper”, Snowmass 2021 White Paper (2022), arXiv:2203.08024 [astro-ph.CO].
- <sup>50</sup>B. J. Carr and S. W. Hawking, “Black holes in the early Universe”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **168**, 399–415 (1974) 10.1093/mnras/168.2.399.
- <sup>51</sup>B. Carr and F. Kühnel, “Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments”, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **70**, 355–394 (2020) 10.1146/annurev-nucl-050520-125911, arXiv:2006.02838 [astro-ph.CO].
- <sup>52</sup>K. Kohri and T. Terada, “Semianalytic calculation of gravitational wave spectrum nonlinearly induced from primordial curvature perturbations”, *Physical Review D* **97**, 123532 (2018) 10.1103/PhysRevD.97.123532, arXiv:1804.08577 [gr-qc].
- <sup>53</sup>G. Agazie et al. (NANOGrav), “The NANOGrav 15-year Data Set: Evidence for a Gravitational-wave Background”, *The Astrophysical Journal Letters* **951**, L8 (2023) 10.3847/2041-8213/acdac6, arXiv:2306.16213 [astro-ph.HE].
- <sup>54</sup>H. Prince and J. Dunkley, “planck-lite-py: A lightweight Python implementation of the Planck 2018 plik-lite likelihood”, *Journal of Open Source Software* **4**, 1586 (2019) 10.21105/joss.01586, arXiv:1909.05869 [astro-ph.CO].
- <sup>55</sup>H. Prince, J. Dunkley, E. Storer and B. Thorne, “Planck low-ell likelihoods for Python”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2021**, 029 (2021) 10.1088/1475-7516/2021/09/029, arXiv:2104.05715 [astro-ph.CO].
- <sup>56</sup>K. Benabed and ih., “clipy: Planck likelihoods in pure Python and JAX”, in preparation, Will be available at <https://github.com/benabed/clipy> (2025).
- <sup>57</sup>J. Carron and ih. (Planck Collaboration), “Planck PR4 lensing data release”, *Astronomy & Astrophysics* **664**, A53 (2022) 10.1051/0004-6361/202243282, arXiv:2206.07773 [astro-ph.CO].
- <sup>58</sup>S. Raghunathan and ih., “Forecasting cosmological constraints from future CMB, BAO and SNe surveys with Cobaya”, in preparation, LSST-DESC 2026 forecasting paper (2025), arXiv:2603.09973.
- <sup>59</sup>J. Lesgourgues, “The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I”, arXiv (2011), arXiv:1104.2933.
- <sup>60</sup>A. Lewis and S. Bridle, “Cosmological parameters from CMB and other data”, *Phys. Rev. D* **66**, 103511 (2002) 10.1103/PhysRevD.66.103511.
- <sup>61</sup>Planck Collaboration, “Planck 2018 results. V. Power spectra and likelihoods”, *A&A* **641**, A5 (2020) 10.1051/0004-6361/201936386.