

# Постійний електричний струм

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

## 1. Основні поняття

## 2. Природа носіїв заряду

## 3. Закон збереження заряду

## 4. Про одиниці вимірювання

## 5. Закон Ома

Теорія провідності металів Друде

Температурна залежність опору

Розподіл зарядів в провіднику

Сторонні сили

Розгалужені кола

## 6. Закон Джоуля-Ленца

## 7. Струми в необмежених середовищах

## 8. Перехідні процеси в колі з конденсатором

# Означення

## Сила та густина струму

**Електричний струм** — це впорядкований рух зарядів.

**Силою струму** називається заряд, що переноситься через переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Електричний струм може бути нерівномірно розподілений по поверхні, через яку він протікає. Для характеристики розподілу по поверхні вводять **вектор густини струму**  $\vec{j}$ . Модуль вектора чисельно дорівнює відношенню сили струму через елементарну площадку, розташовану в даній точці перпендикулярно напрямку руху носіїв, до її площі:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

# Означення

## Сила та густина струму

**Електричний струм** — це впорядкований рух зарядів.

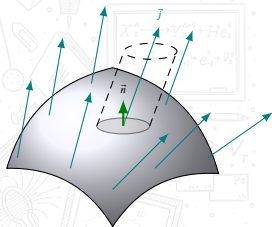
**Силою струму** називається заряд, що переноситься через переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Знаючи вектор густини струму в кожній точці поверхні  $S$ , можна знайти силу струму через цю поверхню як потік вектора  $\vec{j}$ :

$$dI = j dS_{\perp} \Rightarrow$$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



# Означення

## Густина струму та густина заряду

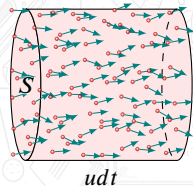
Середню швидкість впорядкованого руху носіїв заряду під дією електричного поля в провіднику називають **дрейфовою швидкістю**.

Візьмемо площадку  $dS$  на шляху носіїв, перпендикулярний дрейфовій швидкості. За час  $dt$  цю площадку перетнуть носії, що перебувають у циліндрі об'ємом  $dV = udt S$ . Їхнє число дорівнює  $dN = ndV$ , а перенесуть вони сумарний заряд  $dq = edN = enudt S$ . За одиницю часу через одиничну площадку пройде заряд:

$$j = \frac{dq}{dt} \frac{1}{S} = enu = \rho u$$

У векторному вигляді

$$\vec{j} = \rho \vec{u}.$$

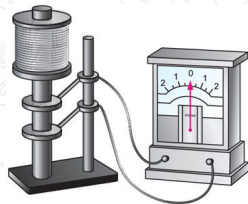


# Природа носіїв струму в металах

Досліди Толмена та Стюарта

У 1916 р. американський фізик Р. Толмен (1881-1948) і шотландський фізик Т. Стюарт виконали кількісні виміри, які неспростовно довели, що струм у металевих провідниках зумовлений рухом вільних електронів.

У цих дослідах котушку з великим числом витків тонкого дроту підключали до гальванометра і приводили в швидке обертання навколо своєї осі. Під час різкого гальмування котушки в колі виникав короточасний струм, зумовлений інерцією носіїв заряду. За напрямком відхилення стрілки гальванометра було встановлено, що **електричний струм створюють негативно заряджені частинки**. При цьому експериментально був отриманий питомий заряд носіїв  $q/m$  близький до питомого заряду електрона, отриманого з інших дослідів. Так було експериментально доведено, що носіями вільних зарядів у металах є електрони.



Установка Толмена і Стюарта

[Відеодемонстрація дослідів](#)

## Швидкість носіїв струму

Срібним дротом з перерізом  $1 \text{ мм}^2$  проходить струм сили  $1 \text{ А}$ . Обчисліть середню швидкість упорядкованого руху електронів у цьому дроті, вважаючи, що кожен атом срібла дає один вільний електрон. Густина срібла дорівнює  $10.5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , його відносна атомна маса дорівнює  $108$ . Постійна Авогадро  $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ . Обчисліть теплову швидкість електронів при  $T = 300 \text{ К}$ .

Струм

$$I = jS = enuS$$

Концентрація електронів – це число електронів в одиниці об'єму, а число електронів дорівнює числу атомів срібла, бо один атом віддає один електрон:

$$\rho = \frac{m_{\text{Ag}}N}{V} = m_{\text{Ag}}n, \Rightarrow n = \frac{\rho}{m_{\text{Ag}}} = \rho \frac{\mu}{N_A}$$

Середня швидкість:

$$u = \frac{I}{enS} = \frac{I\mu}{e\rho N_A S} = 0.17 \text{ мм/с.}$$

Теплова швидкість – це середні квадратична швидкість:

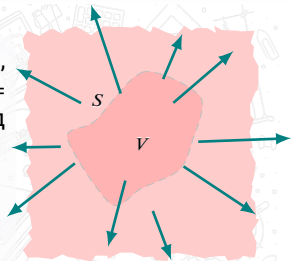
$$v_T = \sqrt{3kT/m_e} = 1.17 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

# Закон збереження заряду



Нехай в деякому провідному середовищі, струм, який витікає через поверхню  $S$  дорівнює  $I = \oint_S \vec{j} d\vec{S}$ . Оскільки струм – це рух зарядів, то заряд в об'ємі  $V$  має заряд зменшуватися з часом:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$



Це співвідношення називають **рівнянням неперервності**. Воно є **вираженням закону збереження електричного заряду**.

В диференціальній формі (використовуючи теорему Остроградського-Гаусса):

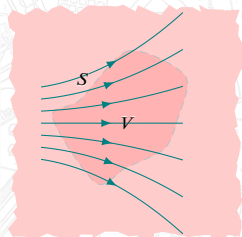
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$



# Закон збереження заряду



Нехай в деякому провідному середовищі, струм, який витікає через поверхню  $S$  дорівнює  $I = \oint_S \vec{j} d\vec{S}$ . Оскільки струм – це рух зарядів, то заряд в об'ємі  $V$  має заряд зменшуватися з часом:



$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

У **стаціонарному випадку**, коли  $\partial\rho/\partial t = 0$ , рівняння набуває вигляду:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0, \text{ або } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

Дана рівність означає, що з об'єму  $V$ , обмеженого замкненою поверхнею  $S$ , витікає така ж сама кількість заряду, що і втікає в цей об'єм.

Георг Ом 1827 року експериментально встановив, що сила струму  $I$ , який протікає однорідним металевим провідником, у якому не діють сторонні сили, пропорційна напрузі  $U$  на кінцях провідника:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Опір  $R$  залежить від форми і розмірів провідника, від його матеріалу і температури, а також від розподілу струму по провіднику. У найпростішому випадку однорідного циліндричного провідника опір:

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Одиниця вимірювання опору в гауссовій системі:

$$[I] = \frac{\Phi_p}{c}, [U] = \frac{\Phi_p}{\text{см}}, \Rightarrow [R] = \frac{c}{\text{см}}$$

Опір в системі СГС має розмірність оберненої швидкості. Питомий опір відповідно:

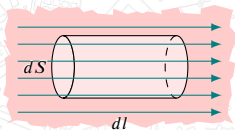
$$[\rho] = [R] \frac{[S]}{[l]} = \frac{c}{\text{см}} \frac{\text{см}^2}{\text{см}} = c$$

У гауссовій системі одиниць питомий опір  $\rho$  вимірюється в секундах (с). Електрична провідність  $\lambda$  має розмірність, обернену часу  $c^{-1}$ .

# Закон Ома

## Диференціальна форма

Виділимо в околиці деякої точки провідного середовища елементарний циліндричний об'єм з твірними, паралельними вектору  $\vec{j}$ .



Якщо поперечний переріз циліндра  $dS$ , а його довжина  $dl$ , то можна записати для такого елементарного циліндра:

$$j dS = \frac{E dl}{\rho \frac{dl}{dS}} = \frac{1}{\rho} E dS.$$

і після відповідних скорочень отримаємо, вже у векторному вигляді:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \lambda \vec{E}$$

де  $\lambda = 1/\rho$  – питома електропровідність середовища.

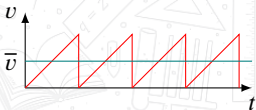
# Теорія провідності металів Друде



У 1900 році Пауль Друде запропонував просту теорію, що пояснює провідність металів. Ця теорія доволі проста і якісно застосовується для оцінки провідності.

Розглянемо рух електрона в постійному однорідному полі  $\vec{E}$ . Рівняння руху має вигляд:

$$\vec{a} = \vec{F}/m_e = e\vec{E}/m_e.$$



Якщо початкова швидкість електрона була нульовою, то до зіткнення з розсіювальним центром вона змінюється за законом  $v = at$ . Після зіткнення швидкість обертається в середньому в нуль, і починається новий цикл прискорення.

Якщо час вільного пробігу дорівнює  $\tau$ , то середня швидкість упорядкованого руху електрона від зіткнення до зіткнення становитиме

$$\vec{u} = \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{e\vec{E}\tau}{m_e}. \Rightarrow \vec{j} = en\vec{u} = \frac{ne^2\tau}{2m_e} \vec{E}, \Rightarrow \lambda = \frac{ne^2\tau}{2m_e}.$$

# Температурна залежність опору

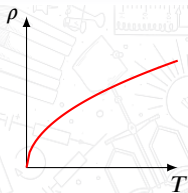


Рис.: Теорія Друде

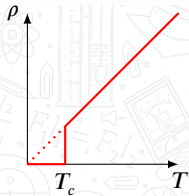


Рис.: Експеримент

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha T].$$

$$\rho = \rho_{20} [1 + \alpha(t - 20)].$$

Таблиця: Питомий опір металів при 20°C

Метал	$\rho, (10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м})$	$\alpha, 10^{-3} 1/^{\circ}\text{C}$
Мідь (Cu)	1.68	4.3
Алюміній (Al)	2.82	4.2
Залізо (Fe)	9.71	6.0
Нікель (Ni)	6.84	6.5
Вольфрам (W)	5.65	5.0

# Розподіл зарядів в провіднику

## Об'ємні заряди

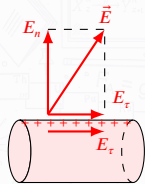
Якщо по однорідному ( $\lambda = \text{const}$ ) провіднику тече постійно струм  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lambda 4\pi\rho = 0 \Rightarrow \rho = 0.$$

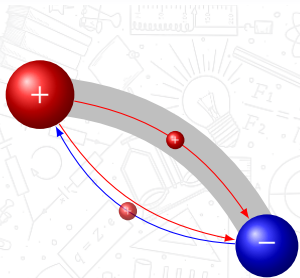
Це означає, що при протіканні струму по однорідному провіднику в його об'ємі нема заряду  $\rho = 0$ .

## Поверхневі заряди

На поверхні провідника, по якому тече постійний електричний струм, є електричні заряди. Вони і є джерелами електричного поля, яке існує в провіднику і забезпечує наявність постійного струму.



# Сторонні сили

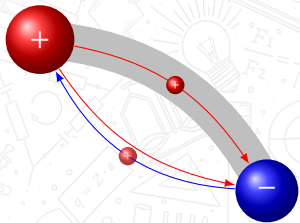


Щоб існував струм, в колі разом з ділянками, де позитивні носії струму рухаються в бік зменшення потенціалу, мають бути ділянки, на яких перенесення позитивних носіїв відбувається в бік зростання потенціалу, тобто **проти сил електричного поля**. Перенесення носіїв на цих ділянках можливе лише за допомогою **сил не електростатичного походження**, які називаються **сторонніми силами**.

Фізична природа сторонніх сил може бути дуже різною. Вони можуть бути зумовлені, хімічною і фізичною неоднорідністю провідника — такими є сили, що виникають під час зіткнення різнорідних провідників (гальванічні елементи, акумулятори) або провідників різної температури (термоелементи) тощо.



# Сторонні сили

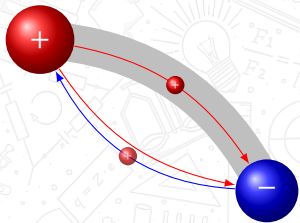


Щоб існував струм, в колі разом з ділянками, де позитивні носії струму рухаються в бік зменшення потенціалу, мають бути ділянки, на яких перенесення позитивних носіїв відбувається в бік зростання потенціалу, тобто **проти сил електричного поля**. Перенесення носіїв на цих ділянках можливе лише за допомогою **сил не електростатичного походження**, які називаються **сторонніми силами**.

Для кількісної характеристики сторонніх сил вводять поняття **поля сторонніх сил і його напруженості**  $\vec{E}^*$ . Цей вектор чисельно дорівнює сторонній силі, що діє на одиничний позитивний заряд:

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{q}.$$

# Сторонні сили



Щоб існував струм, в колі разом з ділянками, де позитивні носії струму рухаються в бік зменшення потенціалу, мають бути ділянки, на яких перенесення позитивних носіїв відбувається в бік зростання потенціалу, тобто **проти сил електричного поля**. Перенесення носіїв на цих ділянках можливе лише за допомогою **сил не електростатичного походження**, які називаються **сторонніми силами**.

Робота сторонніх сил по переміщенню одиничного заряду з точки 1 в точку 2 називається (в області де діють сторонні сили) **електрорушійною силою (ЕРС)**:

$$\mathcal{E} = \frac{A^*}{q} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}.$$

# Узагальнений закон Ома

В диференціальній формі

Якщо під дією електричного поля  $\vec{E}$  у провіднику виникає струм густини  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ , то очевидно, що під спільною дією поля  $\vec{E}$  і поля сторонніх сил  $\vec{E}^*$  густина струму:

$$\vec{j} = \lambda (\vec{E} + \vec{E}^*).$$

# Закон Ома в інтегральній формі

Для неоднорідної ділянки та замкнутого кола

Неоднорідною називають ділянку кола, на якій діють сторонні сили.



$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{j} \cdot d\vec{r}}{\lambda} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}.$$



$$I \int_{(1)}^{(2)} \rho \frac{dl}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}.$$

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}.$$

Якщо ЕРС сприяє руху позитивних носіїв струму в обраному напрямку, то  $\mathcal{E} > 0$ , якщо ж перешкоджає, то  $\mathcal{E} < 0$ .

# Закон Ома в інтегральній формі

Для неоднорідної ділянки та замкнутого кола

Неоднорідною називають ділянку кола, на якій діють сторонні сили.



$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{j} \cdot d\vec{r}}{\lambda} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}.$$



$$I \int_{(1)}^{(2)} \rho \frac{dl}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}.$$

Для замкнутого кола точки 1 і 2 збігаються,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , і закон набуває вигляду:

$$IR = \mathcal{E},$$

де  $R$  – повний опір замкнутого кола, а  $\mathcal{E}$  – алгебраїчна сума окремих ЕРС у цьому колі.

# Розгалужені кола

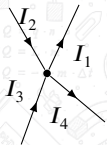
## Правила Кірхгофа

### Перше правило Кірхгофа

Правило стосується **вузлів** кола, тобто точок його розгалуження: алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^K I_k = 0.$$

Струми, що йдуть до вузла, і струми, що виходять з вузла, слід вважати величинами різних знаків.



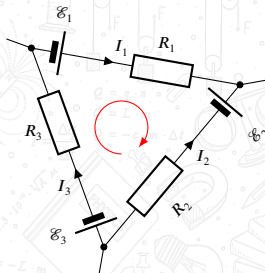
# Розгалужені кола

## Правила Кірхгофа

### Друге правило Кірхгофа

Правило стосується будь-якого виділеного в розгалуженому колі **контур** (замкненої частини кола): алгебраїчна сума добутків сил струмів в окремих ділянках довільного замкненого контуру на їхні опори (падіння напруги) дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що діють у цьому контурі:

$$\sum_{m=1}^M I_m R_m = \sum_{n=1}^N \mathcal{E}_n.$$



# Закон Джоуля-Ленца

При зіткненні електрона з іоном енергія, отримана електроном  $\frac{m_e v_{\max}^2}{2}$  в електричному полі, повністю передається іону. Число зіткнень одного електрона за одиницю часу дорівнює  $\frac{1}{\tau}$ , де  $\tau$  — час вільного пробігу електрона. Загальне число зіткнень за одиницю часу в одиниці об'єму дорівнює  $N = \frac{n}{\tau}$ ,  $n$  — концентрація електронів. Тоді кількість теплоти, що виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу буде:

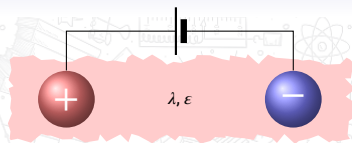
$$w = \frac{dW}{dt dV} = N \frac{m_e v_{\max}^2}{2} = \frac{n}{\tau} \frac{m_e v_{\max}^2}{2} = \frac{n}{\tau} \frac{m_e}{2} \left( \frac{e E \tau}{m_e} \right)^2 = \frac{ne^2 \tau}{2m_e} E^2 = \lambda E^2$$

Потужність енерговиділення, тобто енергія, що виділяється за одиницю часу, дорівнює:

$$W = \int_V w dV = \int_V \rho j^2 dV = I^2 \int_V \rho \frac{dl}{S} = I^2 R$$



# Струми в необмежених середовищах



Нехай у провідне середовище з провідністю  $\lambda$  і діелектричною проникністю  $\epsilon$  поміщено два електроди. Знайдемо повний опір середовища.

З теореми Гауса для провідника із зарядом  $+q$  маємо  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{\epsilon} C(\varphi_+ - \varphi_-)$ , де інтегрування проводиться по зовнішній поверхні провідника, і враховано  $q = C(\varphi_+ - \varphi_-)$ .

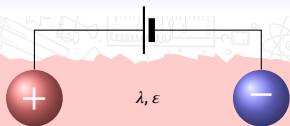
Густина струму, що стікає з + електрода:  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ , де  $\vec{E}$  – поле поблизу його поверхні. Повний струм, що стікає з електрода:

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \lambda \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \lambda \frac{4\pi}{\epsilon} C(\varphi_+ - \varphi_-)$$

Опір між електродами визначається формулою:

$$R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\epsilon}{4\pi\lambda C}$$

# Струми в необмежених середовищах



Нехай у провідне середовище з провідністю  $\lambda$  і діелектричною проникністю  $\epsilon$  поміщено два електроди. Знайдемо повний опір середовища.

Опір між електродами визначається формулою:

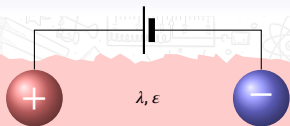
$$R = \frac{\epsilon}{4\pi\lambda C}.$$

Якщо електроди являють собою провідники з власними ємностями  $C_1 = \epsilon r_1$  а і  $C_2 = \epsilon r_2$ , віддалені один від одного на велику відстань, то їхня взаємна ємність дорівнює:  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ , а опір

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Тобто опір практично не залежить від відстані між кулями.

# Струми в необмежених середовищах



Нехай у провідне середовище з провідністю  $\lambda$  і діелектричною проникністю  $\epsilon$  поміщено два електроди. Знайдемо повний опір середовища.

Опір між електродами визначається формулою:

$$R = \frac{\epsilon}{4\pi\lambda C}.$$

Якщо електроди являють собою обкладки плоского конденсатора (з площею пластин  $S$  і відстанню між ними  $d$ ), то  $C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$ . Формула для опору набуває вигляду

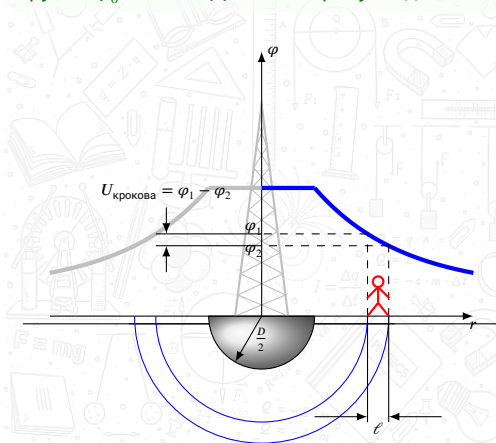
$$R = \frac{d}{\lambda S},$$

що збігається з відомим виразом для опору провідника довжиною  $d$ , поперечним перерізом  $S$  і питомим опором  $1/\lambda$ .

# Задача

## Задача

Фундамент металевої опори виконано із матеріалу, який добре проводить струм і має вигляд півсфери діаметром  $D = 2$  м. Ґрунт навколо фундаменту має провідність  $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$  См/см і є заземленням. Знайти опір заземлення і крокову напругу на відстані  $r = 5$  м від центру опори при замиканні на опору дроту напругою  $\varphi_0 = 10$  кВ. Довжина кроку людини  $\ell = 0.7$  м.



Опір заземлення:

$$R = \frac{1}{\pi \lambda D} \approx 8 \text{ Ом.}$$

Потенціал заземленої кулі спадає обернено пропорційно відстані:

$$\varphi = \frac{\varphi_0 D}{2} \frac{1}{r},$$

а крокова напруга визначається за формулою (див. рис.)

$U_{\text{крокова}} = \varphi_1 - \varphi_2$ , тобто

$$U_{\text{крокова}} = \frac{\varphi_0 D}{2} \frac{\ell}{r^2} \approx 246 \text{ В.}$$

# Перехідні процеси в колі з конденсатором

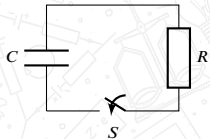
**Перехідні процеси** — це процеси, що відбуваються під час переходу від одного стаціонарного режиму до іншого. Прикладом таких процесів є заряджання та розряджання конденсатора.

**Закон Ома можна застосовувати і до струмів, що змінюються. Це стосується випадків, коли зміна струму відбувається не надто швидко. У цих випадках миттєве значення струму буде одне й те саме у всіх поперечних перерізах кола. Такі струми називають квазістаціонарними.**

**Квазістаціонарні струми можна описувати законами постійного струму, якщо тільки їх застосовувати до миттєвих значень величин.**

# Перехідні процеси в колі з конденсатором

## Розрядка конденсатора



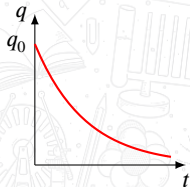
Закон Ома для кола  $RI = U$ . Оскільки  $I = -dq/dt$  і  $U = q/C$ , закон набуде вигляду

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0.$$

Після інтегрування ми отримаємо:

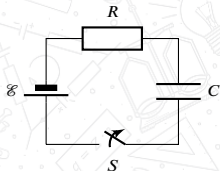
$$q = q_0 e^{-t/RC} = q_0 e^{-t/\tau},$$

де  $q_0$  – початковий заряд конденсатора, а  $\tau = RC$  – називають **часом релаксації**.



# Перехідні процеси в колі з конденсатором

## Зарядка конденсатора



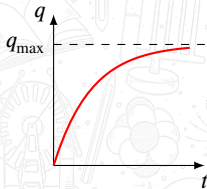
Закон Ома для кола  $RI + U = \mathcal{E}$ . Оскільки  $I = dq/dt$  і  $U = q/C$ , закон набуде вигляду

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \mathcal{E}.$$

Після інтегрування ми отримуємо:

$$q = q_{\max}(1 - e^{-t/\tau}),$$

де  $q_{\max} = \mathcal{E}C$  – граничне значення заряду на конденсаторі ( $t \rightarrow \infty$ ).



Сила струму

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Вектор густини струму

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

Струм, як потік вектора  $\vec{j}$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Зв'язок густини струму і густини заряду

$$\vec{j} = \rho \vec{u}$$

Закон збереження заряду (рівняння неперервності)

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Закон Ома в інтегральній формі

$$I = \frac{U}{R}$$

Закон Ома в диференціальній формі

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}$$

Провідність металів за теорією Друде

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m_e}$$

Електрорушійна сила (означення)

$$\mathcal{E} = \frac{A^*}{q} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}$$



# Підсумки

Електрорушійна сила (означення)

$$\mathcal{E} = \frac{A^*}{q} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}$$

Закон Ома для неоднорідної ділянки кола

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$$

Перше правило Кірхгофа (для вузла)

$$\sum_{k=1}^K I_k = 0$$

Друге правило Кірхгофа (для контурів)

$$\sum_{m=1}^M I_m R_m = \sum_{n=1}^N \mathcal{E}$$

Закон Джоуля-Ленца (в диференціальній формі)

$$w = \lambda E^2$$

Закон Джоуля-Ленца (в Інтегральній формі)

$$W = IR^2$$