МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

С. М. Пономаренко

Елементи фізики плазми

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями Е6 Прикладна фізика та наноматеріали.

КИЇВ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2026

УДК 537(075.8)
ББК 22.31я73
П 563

Рецензенти:

Відповідальний редактор: С. А. Смирнов, к.ф.-м.н., доцент, голова методичної ради НН ФТІ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № Х від ХХ.ХХ.2026 р.) за поданням Вченої ради Навчально-наукового Фізико-технічного інституту (протокол № ХХ від ХХ.ХХ.2026 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Пономаренко Сергій Миколайович, к.ф.-м.н., доцент

Елементи фізики плазми

Елементи фізики плазми: [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальностей Е6 «Прикладна фізика та наноматеріали» / С. М. Пономаренко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 789 кБ). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. — 280 с.

Для студентів фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, які навчаються за спеціальностями Е6 Прикладна фізика та наноматеріали.

© С. М. Пономаренко, 2026 р.
© КПІ ім. Ігоря Сікорського (НН ФТІ), 2026 р.

Зміст

Зміст **3**

Передмова **8**

Розділ 0. **Плазма довкола нас** **14**
§ 0.1 Що таке плазма? 14
§ 0.2 Природна плазма 16
§ 0.3 Лабораторна й технічна плазма 22
§ 0.4 Схожі на вигляд, різні за природою 25
§ 0.5 Що об'єднує всі ці об'єкти 27
Контрольні питання 29

Розділ 1. **Плазма: від іонізованого газу до колективного середовища** **30**
§ 1.1 Іонізація: формула Саха 30
§ 1.2 Температура плазми та два компоненти 32
§ 1.3 Квазінейтральність і плазмові коливання 33
§ 1.4 Дебаївське екранування 35
§ 1.5 Дебаївська сфера. Умова колективності 39
§ 1.6 Слабкозв'язана та сильнозв'язана плазма 42
§ 1.7 Екранування у виродженому газі: довжина Томаса–Фермі 45
§ 1.8 Шар біля стінки і зонд Ленгмюра 45
Задачі 54
Контрольні питання 55

Розділ 2. **Колективні коливання та хвилі в плазмі 57**
§2.1 Діелектрична проникність холодної плазми 57
§2.2 Закон дисперсії. Частота відсікання 59
§2.3 Поздовжні (ленгмюрівські) хвилі 61
§2.4 Зіткнення й поглинання електромагнітних хвиль 62
§2.5 Відбиття електромагнітних хвиль від плазми 64
§2.6 Іоносфера і далекий радіозв'язок 65
§2.7 Як це вимірюють: інтерферометрія і рефлектометрія 66
Задачі 69
Контрольні питання 70

Розділ 3. **Рух зарядженої частинки в електричному та магнітному полях 72**
§3.1 Однорідне магнітне поле 72
§3.2 Дрейфи в схрещених полях 73
§3.3 Поляризаційний дрейф 77
§3.4 Магнітний момент і адіабатичний інваріант 78
§3.5 Магнітне дзеркало і конус втрат 81
§3.6 Подовжній інваріант 82
§3.7 Диполь Землі та радіаційні пояси 83
§3.8 Як це вимірюють: аналізатор енергій і ECE 85
Задачі 86
Контрольні питання 88

Розділ 4. **Зіткнення, провідність та перенос у плазмі 89**
§4.1 Кулонівські зіткнення 89
§4.2 Провідність плазми 92
§4.3 Теплопровідність плазми 94
§4.4 Дифузія в плазмі. Амбіполярна дифузія 95
§4.5 Як це вимірюють: температура з опору і з ширини ліній 96
Задачі 97
Контрольні питання 98

Розділ 5. **Гідродинамічний та магнітогідродинамічний опис 100**
§5.1 Гідродинамічний опис не є синонімом частих зіткнень 100
§5.2 Дворідинний опис 101
§5.3 Від дворідинної моделі до однорідинної МГД 102
§5.4 Основне рівняння магнітної гідродинаміки 105
§5.5 Альвенівська швидкість і число Альвена 107
§5.6 МГД-рівновага та магнітні поверхні 108
§5.7 Енергія електромагнітного поля та плазми 110
§5.8 Діамагнетизм плазми 111

§5.9 Вмороженість магнітного поля 112
§5.10 Пересполучення силових ліній 114
§5.11 Дві мови опису: окремі частинки й суцільне середовище 116
§5.12 Як це вимірюють: магнітні виміри 122
Задачі 124
Контрольні питання 126

Розділ 6. **Хвилі в замагніченій плазмі 127**
§6.1 Що в плазмі може бути відновлювальною силою? 127
§6.2 Звукова й іонно-звукова хвилі 128
§6.3 Лінеаризована МГД і загальне дисперсійне рівняння 130
§6.4 Альвенівська хвиля 132
§6.5 Магнітозвукові хвилі 133
§6.6 Підсумок: хвилі в рідинному описі 133
§6.7 Високочастотні хвилі в замагніченій плазмі 135
§6.8 Межі застосовності МГД-хвиль 139
Задачі 142
Контрольні питання 143

Розділ 7. **Кінетичний опис плазми 144**
§7.1 Функція розподілу та фазовий простір 144
§7.2 Моменти функції розподілу 145
§7.3 Кінетичне рівняння 146
§7.4 Максвеллівський розподіл і температура 147
§7.5 Від кінетики до гідродинаміки 148
§7.6 Перший міст між кінетикою та рідинним описом: дисперсія Ленгмюра 149
§7.7 Лінеаризація кінетичного рівняння та хвильовий відгук 150
§7.8 Загасання Ландау 155
§7.9 Коли потрібен кінетичний опис? 158
§7.10 Як це вимірюють: томсонівське розсіяння 159
Задачі 162
Контрольні питання 163

Розділ 8. **Загальний принцип нестійкості плазми 165**
§8.1 Що означає нестійкість? 165
§8.2 Лінеаризація: як знайти долю малого збурення 166
§8.3 Хвиля, що може рости 166
§8.4 Дисперсійне рівняння 167
§8.5 Звідки береться енергія нестійкості? 168
§8.6 Рівновага та стійкість у магнітному полі 169
§8.7 Перетяжка як найпростіший приклад нестійкості ... 170

§ 8.8 Лінійна та нелінійна стадії 171
§ 8.9 Нестійкість Релея–Тейлора та жолобкова нестійкість 171
§ 8.10 Двопотокова нестійкість та нестійкість пучка 173
§ 8.11 Нестійкості анізотропної плазми 174
§ 8.12 Енергетичний принцип 175
§ 8.13 Дрейфові хвилі та аномальний перенос 176
§ 8.14 Від загального принципу до конкретних нестійкостей 177
§ 8.15 Як це вимірюють: котушки Мірнова і м'який рентген 178
Задачі 179
Контрольні питання 180

Розділ 9. **Магнітне утримання плазми 182**
§ 9.1 Проблема утримання 182
§ 9.2 Відкриті пастки: магнітне дзеркало 182
§ 9.3 Пінч-ефект 183
§ 9.4 Рівновага z-пінча. Співвідношення Беннета 184
§ 9.5 Рівновага θ-пінча 185
§ 9.6 Нестійкості пінча 186
§ 9.7 Тороїдальні системи: токамак і стеларатор 188
§ 9.8 Захоплені частинки й неокласичний перенос 189
§ 9.9 Рівновага тора: зсув Шафранова та межа за тиском 191
§ 9.10 Як це вимірюють: магнітна реконструкція рівноваги 191
Задачі 193
Контрольні питання 193

Розділ 10. **Керований термоядерний синтез 195**
§ 10.1 Реакції та паливо 195
§ 10.2 Чому потрібна саме така температура: бар'єр і тунелювання 195
§ 10.3 Баланс потужностей і критерій Лоусона 197
§ 10.4 Втрати 198
§ 10.5 Дві стратегії: магнітне й інерційне утримання 199
§ 10.6 Від реакції до розетки 199
§ 10.7 Що ще треба вирішити 201
§ 10.8 Інерційний шлях 202
§ 10.9 Де ми зараз: стан на 2026 рік 202
§ 10.10 Як це вимірюють: нейтронна діагностика 203
Задачі 205
Контрольні питання 206

Розділ 11. **Низькотемпературна плазма та газовий розряд . 207**
§ 11.1 Елементарні процеси: іонізація і її швидкість 207
§ 11.2 Пробій газу: механізм Таунсенда і закон Пашена 208
§ 11.3 Тліючий розряд і дуга 209

§ 11.4 Приелектродний шар у розряді 211
§ 11.5 Глобальна модель розряду 212
§ 11.6 Високочастотні джерела плазми 213
§ 11.7 Плазмова обробка матеріалів 215
§ 11.8 Як це вимірюють: оптична емісія і ВЧ-зонди 217
Задачі 219
Контрольні питання 219

Розділ 12. **Основні масштаби, режими та межі моделей 221**
§ 12.1 Просторові та часові масштаби 221
§ 12.2 Зіткнювальний та беззіткнювальний режими 222
§ 12.3 Як за масштабами вибирають модель 223
§ 12.4 Типова ієрархія масштабів у магнітному утриманні . 224
§ 12.5 Від кінетики до МГД 225
§ 12.6 Безрозмірні параметри МГД 226
§ 12.7 Межі простих моделей 226
§ 12.8 Основні масштаби та формули 227
§ 12.9 Що вимірюють на якому масштабі 228
Задачі 230
Контрольні питання 231

Підсумки 232

Відповіді 236

Додатки 248
А Таблиця позначень 248
Б Перехід між СГС і СІ. Константи 257
В Шпаргалка: ключові масштаби 262

Словник термінів 263

Література 271
Основні підручники та посібники 271
Допоміжні підручники та посібники 271
Джерела фактів і результатів 273

Предметний покажчик 277

Передмова

Переважна більшість баріонної речовини у Всесвіті — зорі, міжзоряний газ, сонячний вітер — перебуває в стані плазми. На Землі плазма — це блискавка, полярні сяйва, іоносфера, газовий розряд у лампах, зварювальна дуга, плазмове травлення мікросхем і плазма, яку намагаються утримувати в установках керованого термоядерного синтезу.

Спільна риса всіх цих явищ — колективна поведінка заряджених частинок. У всьому посібнику важливо відрізняти *масштабну оцінку* від точної теорії. Якщо результат отримано в простій моделі, ми спочатку з'ясуємо фізичний зміст цієї моделі, а потім зазначимо, де вона перестає працювати.

Фізика плазми поєднує кілька рівнів опису. Спершу, у вступному розд. 0, ми побачимо плазму в природі й техніці та домовимося, що вважати плазмою, потім визначимо, коли система заряджених частинок справді поводиться як плазма, і введемо її характерні просторові та часові масштаби (розд. 1). Далі розглянемо *колективні* коливання і хвилі в холодній плазмі (розд. 2), рух *окремої* частинки в електромагнітному полі (розд. 3), зіткнення та перенос (розд. 4). Після цього перейдемо до гідродинамічного та магнітогідродинамічного опису (розд. 5), МГД-хвиль та хвиль у замагніченій плазмі (розд. 6) і кінетичної теорії, де з'являється загасання Ландау (розд. 7). Нарешті розглянемо нестійкості (розд. 8) й застосуємо ці моделі до магнітного утримання (розд. 9) і керованого термоядерного синтезу (розд. 10), а також до низькотемпературної плазми газового розряду (розд. 11); довідкові масштаби й формули зібрано в розд. 12.

Для кого цей посібник. Він розрахований на студентів-фізиків прикладного напряму, які вже пройшли курси загальної та теоретичної фізики: ми спираємося на електродинаміку, класичну й статистичну механіку, але не вимагаємо знання плазмових понять. Розділи побудовано за принципом «оцінка — модель — межі застосовності»; у кінці розділів є задачі та контрольні питання.

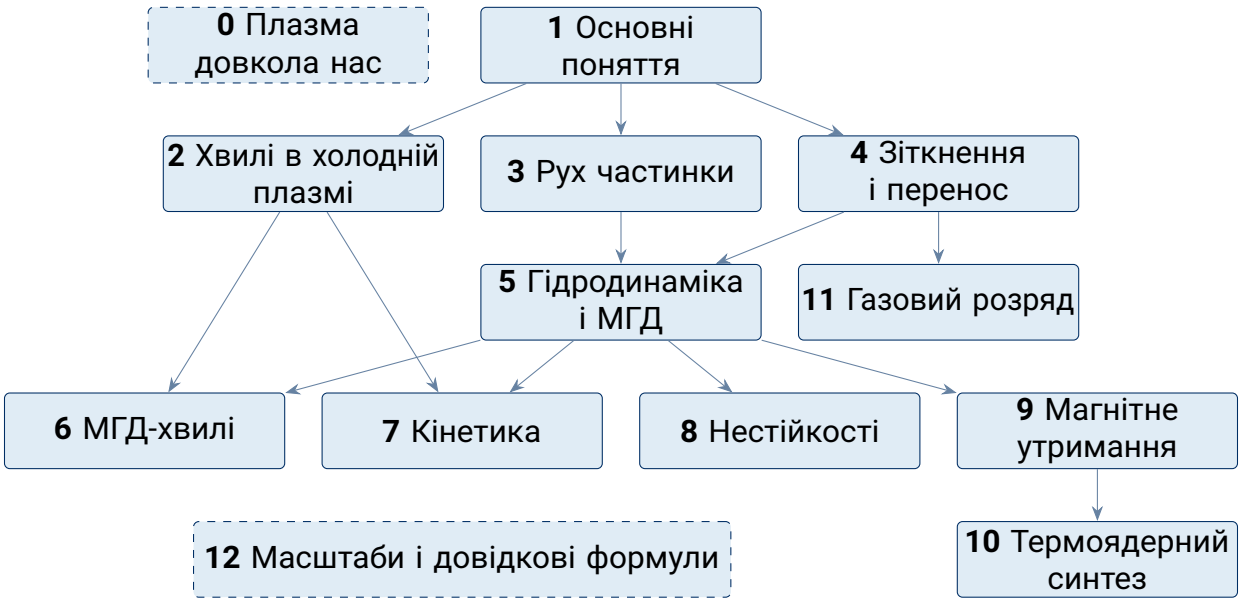
Чого в посібнику немає. Це вступний курс, тому нелінійну теорію (квазілінійне наближення, солітони, розвинена турбулентність), параметричні процеси, пилову й лазерну плазму, а також детальну теорію ВЧ-нагрівання лише згадано, а не викладено. Космічну плазму

подано вибірково (розд. 0 лише оглядає її, без виведень): сонячний вітер, іоносфера, динамо й пересполучення силових ліній як приклади загальних моделей. Для поглиблення див. перелік літератури наприкінці книги.

Головний принцип посібника: одна й та сама плазма може потребувати різних моделей залежно від масштабу явища. Тому щоразу будемо ставити три питання: *який просторовий масштаб? який часовий масштаб? які фізичні процеси встигають відбутися?*

Як читати посібник

Посібник призначений для вивчення дисципліни за силабусом: порядок і обсяг тем задає викладач, а книга їх супроводжує. Розділи залежать один від одного не по прямій, тому наведена нижче схема — це не маршрут, який треба пройти, а *карта зв'язків* між темами. Стрілка від розділу X до розділу Y означає, що перед Y бажано знати X. Розділи 0 (огляд) і 12 (довідник) на схемі пунктирні й без стрілок: перший читають для мотивації, до другого звертаються на будь-якому етапі.



Схемою зручно користуватися так:

- *Перед новою темою* знайдіть її розділ на схемі й подивіться, звідки в нього йдуть стрілки. Це розділи, матеріал яких варто пригадати, якщо він призабувся; посилання на них є й у самому тексті.
- *Якщо тему скорочено чи пропущено в силабусі*, схема показує, що від неї залежить далі. Розділ, з якого не виходять стрілки до потрібних вам тем, можна пропустити, нічого не втративши.

- *Якщо хочете копнути глибше* за програму, йдіть уздовж стрілок від вивченого до наступного розділу: так тема розкривається послідовно.

Посилання вперед. Викласти фізику плазми цілком послідовно неможливо: майже кожна тема спирається на інші, а вони — на неї. Тому розд. 0 і деякі інші місця неминуче забігають наперед. Домовимося про три правила:

- посилання на пізніший розділ («див. розд. *N*») показує, де тему буде розкрито; його не обов'язково розуміти з першого разу;
- потрібне поняття зазвичай коротко пояснено на місці, а повне означення подано там, куди веде посилання;
- формулу чи оцінку, що спирається на пізніший матеріал, можна прийняти як факт і повернутися до виведення згодом.

Розділи й підрозділи під назвою «Як це вимірюють» (діагностика плазми) можна читати окремо, разом із відповідною теорією, якщо вас цікавить насамперед експеримент; їх зведено в таблиці «масштаб — метод» у розд. 12.

Позначення в тексті

Текст має наскрізну систему врізок, яка полегшує самостійну роботу з посібником:

- блок «Нагадаємо…» (синя рамка із заголовком) стисло повторює відомі з інших курсів факти — статистичну фізику, електродинаміку, механіку, — на які спирається подальший виклад; якщо матеріал знайомий, його можна пропустити;
- жовта врізка зі знаком «!» виділяє принципові зауваження та поширені помилки, на які варто звернути особливу увагу;
- зелена врізка із значком калькулятора «🖩» і заголовком «Числова оцінка» показує, як щойно виведену формулу застосовують до типових параметрів (лабораторної плазми, токамака, іоносфери). Ці оцінки задають порядок величини, а не точний розрахунок: вони допомагають відчути масштаб і перевірити, чи виправдана використана модель;
- розділи й підрозділи під назвою «Як це вимірюють» (діагностика плазми) пояснюють, яким приладом і за яким принципом знаходять величину, про яку щойно йшлося (зонд Ленгмюра, інтерферометрія, томсонівське розсіяння, магнітні виміри тощо); для зв'язку з експериментом їх варто читати разом із відповідною теорією;
- фіолетова врізка із значком «▶» і заголовком «Інтерактивна симуляція» відсилає до віртуальної лабораторної, яку відкривають у браузері за клікабельним посиланням (потрібен доступ до ін-

тернету). Поки такі лабораторні є до зонда Ленгмюра (розд. 1) та до інтерферометрії й рефлектометрії (розд. 2). У них задають параметри плазми або прилада, знімають «показання» з шумом і обробляють їх так само, як в експерименті; у режимі «чорний ящик» параметри плазми невідомі, їх треба знайти самому, а відповідь перевіряє програма. Це доповнення до тексту, а не заміна задач: книгу можна читати й без нього;
- перелік «Контрольні питання» наприкінці розділу призначений для самоперевірки; блакитна смуга «Головне в розділі» стисло підсумовує розділ.

Структура кожного розділу однакова: вступ і мотивація, теорія з оцінками, діагностика, підсумок, питання й задачі.

Задачі й відповіді

Наприкінці кожного розділу зібрано задачі для самостійного розв'язання. Відповіді й розв'язки подано окремо, в кінці книги, перед додатками: номер задачі в тексті є посиланням на відповідь, а номер відповіді — на задачу. Частина задач доповнює викладене (наприклад, виведення критерію Бома чи закону Чайлда–Ленгмюра винесено до задач з докладними відповідями), тому радимо не пропускати їх навіть тим, хто читає книгу лише для загального уявлення.

Біля номера кожної задачі стоять зірочки, що показують складність: ★☆☆ — пряма підстановка у формулу або проста оцінка (кілька хвилин); ★★☆ — кілька кроків чи оцінка з поясненням; ★★★ — виведення, аналітична або чисельна задача, що потребує окремої роботи. Така розмітка допомагає вибрати задачі за наявним часом і підготовкою.

Як приклади та задачі я добирав переважно класичні, які давно стали частиною курсів фізики плазми та дозволяють зрозуміти матеріал на конкретних випадках. Вони передавалися від покоління до покоління викладачів і підручників, тому частина задач неминуче повторює відомі зі збірників та курсів лекцій; їхню першу появу встановити неможливо, а сама ідея таких задач є спільним надбанням. Водночас у посібнику є й оригінальні задачі, придумані автором.

Система одиниць

У цьому посібнику, як і в більшості наведених нижче формул, використано систему СГС-Гаусса: сила Лоренца має вигляд $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}/c)$, а закон Ампера — $\nabla\times\mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j} + (1/c)\partial_t\mathbf{E}$. Наприкінці посібника (розд. 12) наведено практичні формули в СГС. Перехід

до СІ простий, але множники c та 4π в окремих рівняннях змінюються. Перевідні співвідношення для величин і вигляд основних формул плазми в обох системах зібрано в додатку Б; для безрозмірних параметрів (β, R_m, N_D, відношень частот) система одиниць не має значення.

Математичний апарат

Від читача очікується знання векторного аналізу (градієнт, дивергенція, ротор, теореми Остроградського–Гаусса і Стокса) та основ теорії ймовірностей і статистичної фізики (розподіл Максвелла, середні). Складніші математичні відомості, потрібні для окремого розділу (наприклад, теорія функцій комплексної змінної для загасання Ландау), нагадано в блоках «Нагадаємо…» там, де вони вперше знадобляться. Позначення зведено в додатку «Таблиця позначень», а означення термінів — у Словнику термінів (після додатків, перед літературою й предметним покажчиком).

Методологічні аспекти підготовки навчального видання

Сучасне технологічне середовище змінює підхід до підготовки навчальних видань. Поряд із традиційними методами автор використовував цифрові інструменти: засоби перевірки правопису, моделі штучного інтелекту для редагування, уніфікації термінології та уточнення формулювань, а також для чисельних перевірок оцінок. Ці засоби прискорювали технічну роботу, але не замінювали авторського задуму. Добір матеріалу, логіка викладу, методична послідовність і наукова коректність залишалися визначальними критеріями, а відповідальність за зміст і якість видання несе автор.

Ілюстративний матеріал має змішане походження. Переважну більшість рисунків автор виконав самостійно засобами пакета TikZ, що забезпечує векторну якість зображень, єдність їхнього оформлення з основним текстом і можливість точного редагування. Для тих рисунків, побудова яких засобами TikZ була недоцільною, зокрема растрових, залучено зображення з відкритих джерел та згенеровані моделями штучного інтелекту за докладним технічним завданням; відповідальність за фізичну коректність таких зображень, як і всього іншого матеріалу, несе автор.

Подяки

Якість посібника залежить не лише від задуму та інструментів, а й від фахової оцінки, діалогу та досвіду інших людей. Тому дякую

рецензентам і колегам, чиї зауваження допомогли вдосконалити цю працю. За будь-яких технологічних змін людське судження та незалежна експертиза залишаються незамінними: вони виявляють недоліки, перевіряють обґрунтованість викладу й оцінюють навчальну цінність.

Окрема подяка — студентам. Їхні запитання на лекціях та помилки в задачах найточніше показують, де бракує чіткості, логічного кроку чи прикладу. Буду вдячний і майбутнім читачам за конструктивні зауваження та вказівки на неточності.

Автор

0 Плазма довкола нас

Почнімо з того, що просто подивимося на плазму: числа й формули чекатимуть у наступних розділах. Спершу домовимося, що саме називаємо плазмою, а далі здійснимо екскурсію від космосу до лабораторії й техніки. За оцінками, понад 99 % звичайної (баріонної) видимої речовини у Всесвіті перебуває в стані плазми. У цьому розділі нічого не виводимо: лише розглядаємо знімки й вчимося бачити на них фізику, яку з'ясуємо в наступних розділах. Частину об'єктів (іоносферу, корону, сонячний вітер, газовий розряд, токамак) знайдемо в табл. 2 і на діаграмі рис. 8 у § 0.5. Якщо якесь слово чи число здається незрозумілим, не зупиняйтеся: посилання вказує розділ, де це пояснено.

§ 0.1. Що таке плазма?

Плазма (від грец. *plasma* — виліплене, оформлене) — це частково або повністю іонізований газ, у якому густини позитивних і негативних зарядів практично однакові, а заряджені частинки поводяться *колективно*. Обидва виділені слова мають точний зміст, який ми з'ясуємо в розд. 1 (квазінейтральність — у § 1.3, колективність — у § 1.5). Термін «плазма» запропонував І. Ленгмюр наприкінці 1920-х років; 1929 р. Л. Тонкс і Ленгмюр описали власні коливання електронного газу (§ 1.3) [7].

Ступінь іонізації характеризують величиною

$$\alpha = \frac{n_i}{n_i + n_n}, \tag{1}$$

де n_i і n_n — концентрації іонів та нейтральних частинок. У плазмі можуть одночасно бути присутніми електрони, кілька сортів іонів і нейтральні атоми чи молекули. Залежно від α розрізняють *слабо іонізовану* (частки відсотка), *помірно іонізовану* (кілька відсотків) і *повністю іонізовану* ($\alpha \to 1$) плазму. Газ іонізується помітно вже за температур, значно нижчих за енергію іонізації атома (для водню 13,6 еВ); чому, пояснює формула Саха (§ 1.1).

Чим плазма відрізняється від нейтрального газу? Не просто наявністю заряджених частинок. У нейтральному газі частинки майже вільні й обмінюються імпульсом у короткочасних зіткненнях. У плазмі кулонівська сила спадає повільно ($\propto r^{-2}$): кількість частинок у сферичному шарі радіуса r зростає як r^2, тож для впорядкованого (усередненого) відгуку сумарний внесок далеких частинок не менший, ніж близьких, і кожна заряджена частинка *одночасно* взаємодіє з великою кількістю інших. Сила, що діє на частинку, формується усередненим полем багатьох частинок, а не парними зіткненнями. Такі «колективні взаємодії» породжують екранування зарядів, плазмові коливання, хвилі й нестійкості. Тому плазма не зводиться до сукупності незалежних частинок: її макроскопічні властивості визначаються спільною електромагнітною взаємодією. Ступінь колективності задає число N_D частинок у сфері радіуса λ_D (§ 1.5): поле заряду на відстанях понад дебаївський радіус гасить не найближчий сусід, а спільний внесок цих N_D частинок (§ 1.4).

Друга особливість — тісний зв'язок механіки з електродинамікою. Плазма не лише рухається в зовнішньому електромагнітному полі, а й сама створює макроскопічні поля та струми, які діють назад на її рух.

Теоретичні відомості **Температура в енергетичних одиницях**

Температуру T вимірюємо в енергетичних одиницях ($k_\mathrm{B}=1$, тож $k_\mathrm{B}T$ пишемо просто як T); практично T дають в еВ, 1 еВ $\approx 11\,600$ К. Температура — це параметр максвеллівського розподілу $f \propto \exp(-mv^2/2T)$; середня кінетична енергія поступального руху $\langle mv^2/2\rangle = \frac{3}{2}T$. Поки не сказано інакше, мова йде саме про такий розподіл. Для оцінок зручні числа (СГС): $e = 4{,}8\times10^{-10}$ СГС, $e^2 \approx 1{,}44\times10^{-7}$ еВ·см, 1 СГС напруженості поля = 300 В/см.

З термодинаміки відомо, що стан газу задають p, V і T, але незалежних серед них лише два: їх пов'язує рівняння стану, для ідеального газу $pV = NT$ (при $k_\mathrm{B}=1$). Зручно взяти інтенсивні величини, що не залежать від кількості речовини: $n = N/V$ і T; тоді тиск $p = nT$ визначається ними. Так само й плазму (заданого складу) характеризують двома параметрами, n й T (для суміші сортів $p = \sum_s n_s T_s$). До того ж від n і T залежить уся специфічна для плазми фізика: ступінь іонізації (§ 1.1), дебаївська довжина (§ 1.4), число частинок у дебаївській сфері (§ 1.5), плазмова частота (§ 1.3). Тому плазму зображають точкою на діаграмі n–T (рис. 8); докладніше про температуру — у § 1.2.

Плазма виникає різними способами: термічною іонізацією (нагрівання), електричним розрядом, фотоіонізацією, ударною іонізацією, бомбардуванням частинками. Залежно від температури її поділяють на *низькотемпературну* ($T \lesssim 10^5$ К, тобто $\lesssim 10$ еВ) і *високотем-*

пературну ($T \gtrsim 10^6$ K, тобто $\gtrsim 100$ еВ; у термоядерних установках (токамаках — тороїдальних магнітних камерах) — до 10^8 K ≈ 10 кеВ і вище). Область між цими межами називають проміжною. Саме високотемпературна плазма потрібна для реакцій *керованого термоядерного синтезу*. Не варто плутати цей поділ з назвами «холодна» і «гаряча» плазма, які трапляються далі в теорії хвиль: там ідеться не про саме значення T, а про те, чи істотний тепловий рух частинок для процесу, що розглядається (це пояснено там, де такі назви з'являються, і в Словнику термінів (с. 263)). Скільки в природі різних плазм і де вони лежать за n і T, показано в § 0.5.

§ 0.2. Природна плазма

Всесвіт як плазма. Почнімо з самого початку. Плазма — не екзотика, а первинний стан видимої речовини. Приблизно перші 380 тисяч років після Великого вибуху Всесвіт був заповнений гарячою *воднево-гелієвою плазмою*: протони (разом із ядрами гелію це приблизно вся звичайна речовина), електрони й фотони. Фотони безперервно розсіювалися на вільних електронах, тож Всесвіт був непрозорий, як сяюча куля. Розширення охолоджувало плазму, і коли її температура впала до $\sim 3 \times 10^3$ K (близько 0,3 еВ, у ~ 50 разів нижче за потенціал іонізації водню 13,6 еВ), електрони об'єдналися з ядрами в нейтральні атоми: настала *рекомбінація*. Відтоді світло летить вільно й дійшло до нас як *реліктове випромінювання*, охолоджене розширенням до 2,725 K (рис. 1).

Коли Всесвіт рекомбінував. Сьогодні концентрація атомів водню у Всесвіті — $n_H \approx 2 \times 10^{-7}$ см$^{-3}$. Під час рекомбінації Всесвіт був менший у $1 + z \approx 1100$ разів за кожним виміром (z — червоне зміщення), тож $n \approx 2 \times 10^{-7} \cdot 1100^3 \approx 2{,}7 \times 10^2$ см$^{-3}$. За формулою Саха (§ 1.1) для такої концентрації ступінь іонізації α (§ 0.1) досягає 1/2 за $T \approx 3{,}7 \times 10^3$ K (0,32 еВ), а за $T = 3 \times 10^3$ K вона вже лише $\alpha \sim 5 \times 10^{-3}$. Температура реліктового випромінювання тоді була $2{,}725 \cdot 1101 \approx 3 \times 10^3$ K, тобто збігається з оцінкою за порядком.

Рівноважна формула Саха дає дещо вищу температуру, ніж справжня: у Всесвіті, що розширюється, рекомбінація не встигає за рівновагою. Важливо, що водень рекомбінує за $T \approx 0{,}3$ еВ, а не за 13,6 еВ: на один атом припадає близько 10^9 фотонів, і навіть рідкісні фотони з «хвоста» планківського розподілу з енергією понад 13,6 еВ встигають іонізувати атоми; це той самий виграш ентропії вільних електронів, що й у § 1.1.

Неоднорідності на цій карті малі, порядку 10^{-5} від середньої температури, але саме вони важливі: це відбитки *звукових хвиль у пер-*

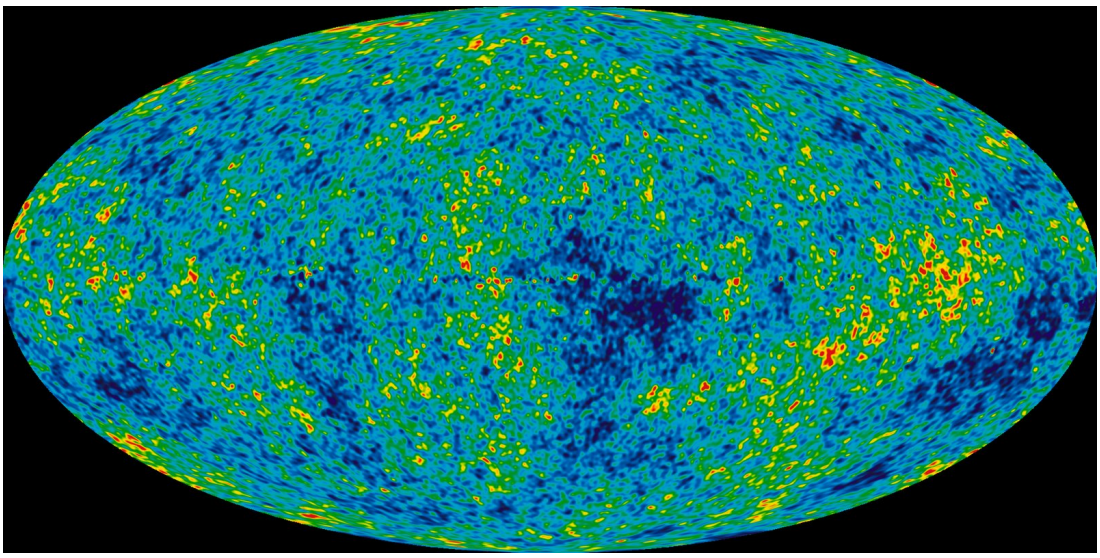
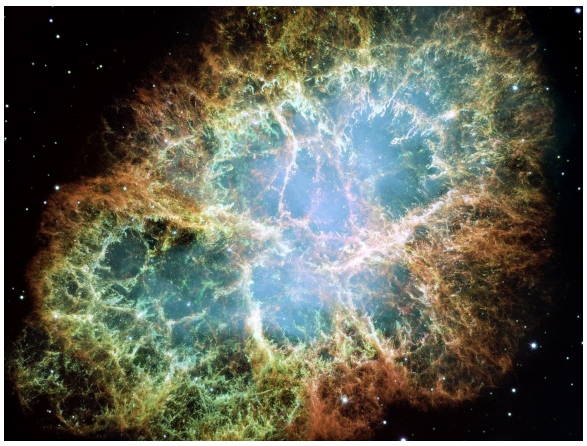


Рис. 1. Реліктове випромінювання: карта всього неба за даними WMAP (дев'ятирічні спостереження; NASA/WMAP Science Team, суспільне надбання). Кольори показують відхилення температури від середньої 2,725 K в межах $\pm 2 \times 10^{-4}$ K (синій — холодніше, червоний — тепліше)

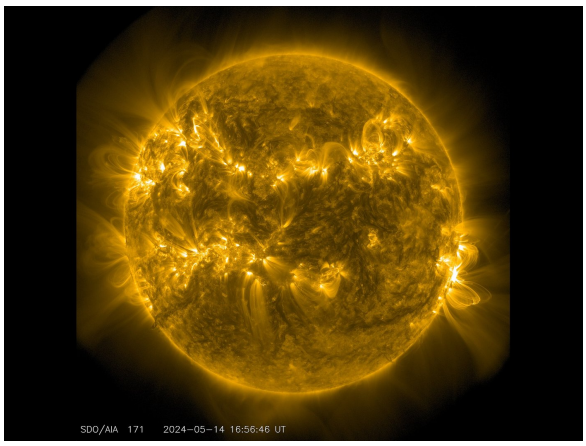
винній плазмі. Гравітація (передусім темної матерії) стискала плазму, тиск випромінювання розпирав її, і так вона коливалася, як струна (про коливання й хвилі в плазмі йтиметься в розд. 2). Зі зменшенням температури коливання «заморозилися», а потім з цих згущень виросли галактики. Пізніше випромінювання перших зір знову іонізувало газ (протягом першого мільярда років), і міжгалактичний газ, у якому зосереджена значна частина звичайної речовини, відтоді лишається плазмою — вкрай розрідженою ($n \lesssim 10^{-5}$ см$^{-3}$), з температурою від 10^4 до 10^7 K.

Масштаби й структури. Природна плазма охоплює розміри від сантиметрів (канал блискавки) до світлових років (туманності) і концентрації від $\sim 10^{-5}$ см$^{-3}$ до 10^{26} см$^{-3}$. У розрідженій космічній плазмі зіткнень мало, а магнітне поле істотне. Тому на рис. 2 а, б, в ми бачимо переважно не «газ», а *структури, задані полем*. Об'єкти нижче впорядковано за масштабом: від центрів галактик через міжзоряне середовище й Сонячну систему до навколоземного космосу й атмосфери.

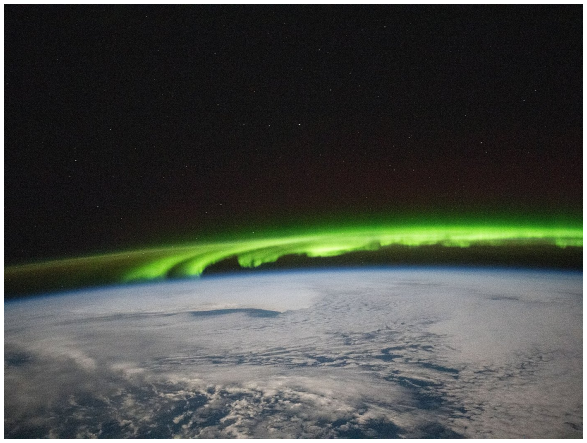
Дальній космос: чорні діри та джети. Сама чорна діра не є плазмою, але плазма довкола неї — одна з найекстремальніших у природі. Речовина, що падає в діру, не потрапляє в неї одразу: вона закручується в *акреційний диск* з іонізованого газу, який нагрівається тертям до температур від мільйонів до мільярдів кельвінів. Цей газ намагнічений: магнітне поле «вморожене» в плазму (розд. 5), а нестійкості



(а) Крабоподібна туманність (Hubble; NASA, ESA, J. Hester, A. Loll)



(б) Корона Сонця, 171 Å (SDO/AIA; NASA/SDO)



(в) Полярне сяйво з борту МКС (NASA)



(г) Блискавка, Техас (NOAA)

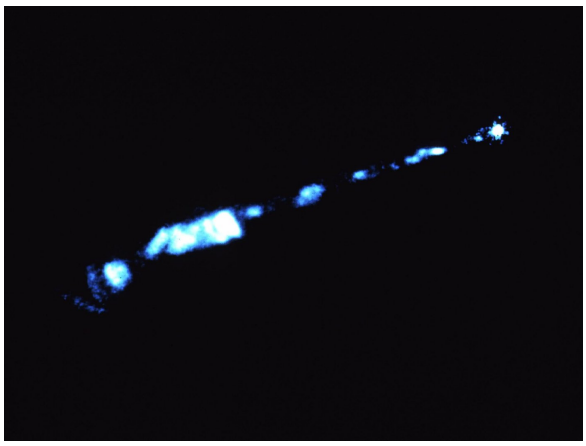
Рис. 2. Природна плазма від далекого космосу до Землі: залишок наднової (а), корона Сонця (б), полярне сяйво (в), блискавка (г). Знімки є суспільним надбанням

плазми (розд. 8) переносять момент імпульсу назовні й дають речовині змогу падати. Саме таку картину фіксує Event Horizon Telescope — мережа радіотелескопів, що працює як єдиний телескоп розміром із Землю. Кільце на знімку 2019 р. (рис. 3 а) — випромінювання гарячої плазми біля центральної діри галактики M87, а темна пляма всередині — *тінь* діри: світло, що летить до неї, не повертається. Маса цієї діри близько $6{,}5 \times 10^9$ мас Сонця, тому її радіус Шварцшильда $2GM/c^2 \approx 2 \times 10^{13}$ м, тобто близько 130 астрономічних одиниць. Діра в центрі нашої Галактики Sgr A* у півтори тисячі разів легша, близько 4 млн мас Сонця.

З околиць діри вилітають *джети* — вузькі потоки плазми зі швидкостями, близькими до швидкості світла, що тягнуться вздовж осі обертання на тисячі світлових років (рис. 3 б: джет M87 завдовжки близько 4 тисяч світлових років). Їх колімує й, імовірно, живить магнітне поле, закручене разом із диском. Зображення діри з фільму



(а) M87* (EHT Collaboration, CC BY 4.0)



(б) Джет галактики M87 (Hubble; NASA/ESA, F. D. Macchetto)

Рис. 3. Плазма навколо чорної діри: диск і тінь M87* (а), джет тієї самої галактики (б). Знімок (б) — суспільне надбання

«Інтерстеллар» теж обчислене за рівняннями теорії відносності, але зі спрощеннями заради ефектності; реальні знімки менш яскраві, зате це справжня плазма.

Галактика: міжзоряний газ. Ближче до нас — *міжзоряний газ*. Його концентрація мізерна (від $\sim 10^{-3}$ до 10^3 частинок в одному кубічному сантиметрі), температура змінюється від ~ 10 К у холодних хмарах до $\sim 10^6$ К у гарячих бульбашках, а зіткнень настільки мало, що газ не врівноважений із випромінюванням, а за фронтами ударних хвиль наднових іони й електрони довго мають різні температури. Іонізують газ ультрафіолетом зірок, ударними хвилями наднових і космічними променями. Поруч із ним — залишки наднових, як-от Крабоподібна туманність (рис. 2 а): наднова 1054 р., розліт газу на кілька світлових років. Її волокна тримає магнітне поле, «вморожене» в газ, а блакитне світіння в центрі — синхротронне випромінювання, тобто випромінювання релятивістських електронів, що крутяться в магнітному полі туманності, яке живить пульсар (швидко обертова нейтронна зірка; розд. 3).

Сонячна система: Сонце й сонячний вітер. Сонце (рис. 2 б) — найближча до нас зірка й найдоступніша для спостережень лабораторія плазми. У його ядрі, де $T \sim 1{,}5 \times 10^7$ К, ідуть термоядерні реакції (розд. 10); енергія повільно виходить назовні променистим перенесенням, а в зовнішніх шарах — конвекцією. Рухи провідної плазми в конвективній зоні підтримують магнітне поле Сонця: у сонячних плямах воно досягає $\sim 0{,}4$ Тл, а приблизно кожні 11 років змінює напрям. Поверхня (фотосфера) має $T \approx 5800$ К, а от розріджена *корона* над нею гарячіша на два порядки, $T \sim 10^6$ К. Цей парадокс (звідки

корона бере енергію?) остаточно не розв'язано [20]; один із претендентів — хвилі в плазмі (розд. 6). Яскраві петлі на знімку — це плазма, утримана в магнітних трубках — пучках силових ліній **B**: заряджені частинки легко рухаються вздовж поля й майже не рухаються впоперек (розд. 3).

Корона не утримується: вона безперервно розширюється, і потік заряджених частинок, що тече з неї, називають *сонячним вітром*. Біля орбіти Землі його швидкість становить 300–800 км/с, концентрація — кілька частинок в одному кубічному сантиметрі, а температура — порядку 10^5 К (близько 10 еВ). Вітер захоплює з собою магнітне поле Сонця (воно «вморожене» в плазму, розд. 5), і через обертання Сонця силові лінії закручуються в спіраль. Область, у якій панує сонячний вітер, називають геліосферою.

Скільки маси Сонце втрачає на вітер. Потік маси крізь сферу радіуса $r = 1$ а.о. $= 1{,}5 \times 10^{13}$ см при $n \approx 9$ см$^{-3}$ і $v \approx 470$ км/с (протони, $m_p = 1{,}67 \times 10^{-24}$ г): $\dot{M} = 4\pi r^2 n m_p v \approx 2 \times 10^{12}$ г/с $= 2 \times 10^9$ кг/с. За рік це 6×10^{16} кг, тобто $\sim 3 \times 10^{-14}$ маси Сонця. Вітер зі швидкістю 400 км/с долітає до Землі за $r/v \approx 4$ доби, а корональний викид маси, що летить зі швидкістю близько 10^3 км/с, за $\sim 1{,}7$ доби.

Це мізерна втрата: вона порівнянна з масою, яку Сонце щосекунди перетворює на випромінювання, але за мільярди років не змінює його масу помітно. Зате вітер визначає все, що відбувається в міжпланетному просторі.

Навколоземний космос: магнітосфера й іоносфера. Зустрівши магнітне поле Землі ($B \sim 0{,}5$ Гс на поверхні), сонячний вітер не проходить крізь нього, а обтікає (рис. 4), стискаючи його з боку Сонця й витягуючи у довгий хвіст з нічного боку. Область, у якій поле Землі керує рухом плазми, називають *магнітосферою*. Перед нею утворюється стрибок густини й поля — *ударна хвиля*: вітер надзвуковий (його швидкість ~ 400 км/с набагато більша за швидкість магнітного звуку ~ 50–70 км/с), причому хвиля така, що частинки майже не стикаються: енергію розсіюють колективні поля, а не зіткнення (розд. 4). Заряджені частинки, що потрапили в дипольне поле Землі, відбиваються від його згущень біля полюсів і накопичуються в *радіаційних поясах* (§ 3.5); під час магнітних бур електрони з хвоста магнітосфери, прискорені до кількох кеВ, висипаються вздовж силових ліній в атмосферу на висоти 80–150 км, і виникає полярне сяйво (рис. 2 в). Спричинені вітром магнітні бурі можуть наводити в довгих лініях електропередач струми, що виводять з ладу обладнання (так, у березні 1989 р. магнітна буря призвела до багатогодинного вимкнення електроенергії у канадській провінції Квебек), а також порушують

зв'язок і роботу супутників. Прогнозування таких подій називають *космічною погодою*.

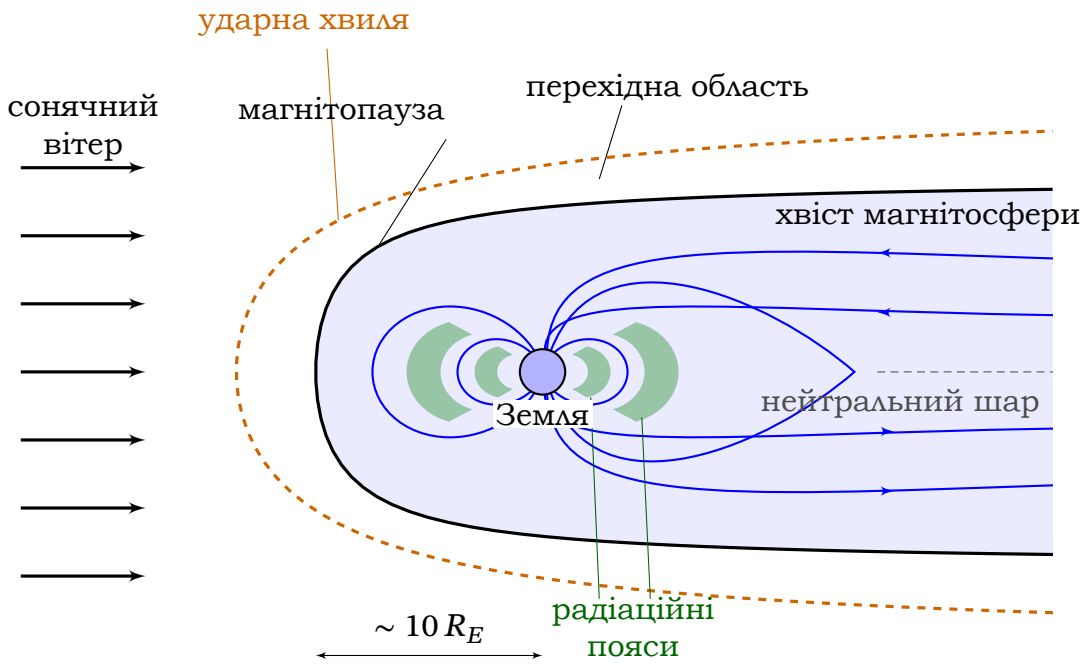


Рис. 4. Магнітосфера Землі (вид збоку, Сонце ліворуч; без масштабу). Сонячний вітер утворює перед нею ударну хвилю (штрих), за якою лежить перехідна область; магнітопауза стиснута з денного боку (до неї $\sim 10\,R_E$) і витягнута в хвіст з нічного. Силові лінії поля Землі замкнені поблизу планети й розкриті в хвості, де вони розділені нейтральним шаром; у дипольній частині поля захоплені частинки утворюють радіаційні пояси (їхні перерізи зафарбовано).

Нижче, на висотах від ~ 60 км, лежить *іоносфера* — верхня атмосфера, іонізована випромінюванням Сонця. Її поділяють на шари D, E і F; найбільша концентрація електронів (10^5–10^6 см$^{-3}$) припадає на висоти 250–400 км. Вночі, коли Сонце не іонізує газ, нижні шари майже зникають. Для практики важливо, що така плазма відбиває радіохвилі, частота яких нижча за *плазмову* f_p — власну частоту коливань електронів (§ 1.3): $f_p \approx 9\sqrt{n}$ кГц, де n у см$^{-3}$, тобто ~ 9 МГц за $n = 10^6$ см$^{-3}$. Такі хвилі не проходять, і завдяки відбиттю від іоносфери можна приймати короткохвильові станції за тисячі кілометрів (§ 2.6).

Атмосфера Землі: блискавка. *Блискавка* (рис. 2 г) — гігантська іскра. У грозовій хмарі більші й важчі краплі й льодинки заряджаються переважно негативно й падають швидше за дрібні позитивні, тож хмара стає електричним диполем. Коли поле десь (імовірно, біля крапель і льодинок) стає достатнім для пробою, починається електронна лавина; з лавин зливаються провідні канали — *лідери*, що

ступінчасто, стрибками в десятки метрів, тягнуться до землі. Коли лідер наближається до поверхні, назустріч йому виростає короткий канал, і вздовж прокладеного лідером шляху проскакує зворотний (головний) розряд зі струмом 10^4–10^5 А. Канал діаметром кілька сантиметрів розігрівається до $\sim 3\times10^4$ К; стрімке розширення нагрітого газу й дає грім. Плазма каналу живе лише соті–десяті частки секунди: потім вона охолоджується й іони рекомбінують.

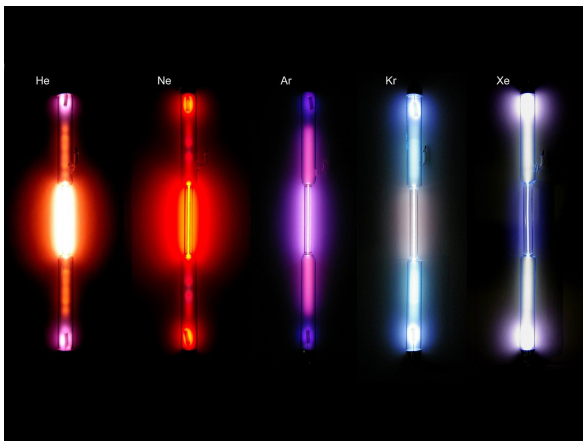
Усі ці об'єкти різняться на десятки порядків за концентрацією, але до всіх застосовні однакові поняття: дебаївське екранування (§ 1.4), квазінейтральність (§ 1.3), рух у магнітному полі (розд. 3). Докладніше про космічну плазму див. [11].

§ 0.3. Лабораторна й технічна плазма

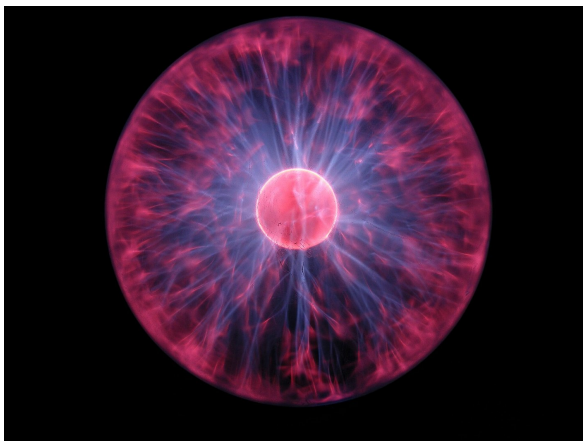
Лабораторну плазму отримують штучною іонізацією газу (способи перелічено в § 0.1), найчастіше електричним розрядом. Вона, як правило, холодніша й густіша за космічну (виняток — гаряча плазма для синтезу), зате її можна вимірювати й керувати нею (рис. 5).

Газові розряди. У *розрядній трубці* (рис. 5 а) світиться слабоіонізований газ низького тиску: електричне поле розганяє вільні електрони, ті іонізують і збуджують атоми, а колір дає лінійчатий спектр збуджених атомів (неон світить червоним, аргон — фіолетовим). Електрони набирають від поля енергію, а іони, нерухливі й важкі, її майже не отримують: тому $T_e \sim 1$ еВ, а T_i — близько кімнатної, а концентрація електронів у тліючому розряді лише $\sim 10^{10}$ см$^{-3}$ (§ 1.2). У *плазмовій кулі* (рис. 5 б) високочастотна напруга на центральному електроді запалює розряд у розрідженому газі, а тонкі світні канали — це *стримери*. *Зварювальна дуга* (рис. 5 в) навпаки, горить за високого тиску. Тут частих зіткнень вистачає, щоб вирівняти T_e й T_i (порядку 1 еВ), тож плазма *ізотермічна*, а її концентрація на кілька порядків вища, ніж у трубці. Теорія розрядів викладена в розд. 11.

Якщо потрібна чиста плазма без забруднення матеріалом електродів, користуються *безелектродними* розрядами: високочастотним чи надвисокочастотним. Продуваючи газ крізь розряд, отримують струмінь плазми; такий пристрій називають *плазмотроном*. Температура струменя сягає $(1\text{–}3)\times10^4$ К, а потужність пристрою — від десятків ватів до десятків мегаватів. Для досліджень, де хвилі в плазмі мають бути слабкими, будують спокійну плазму в *Q-машині* (від англ. *quiescent* — спокійний): атоми цезію, потрапляючи на розжарену вольфрамову пластину, втрачають електрон і стають іонами, а сама пластина випромінює електрони. Виходить майже повністю іонізована плазма з температурою $\sim 0{,}2$ еВ.



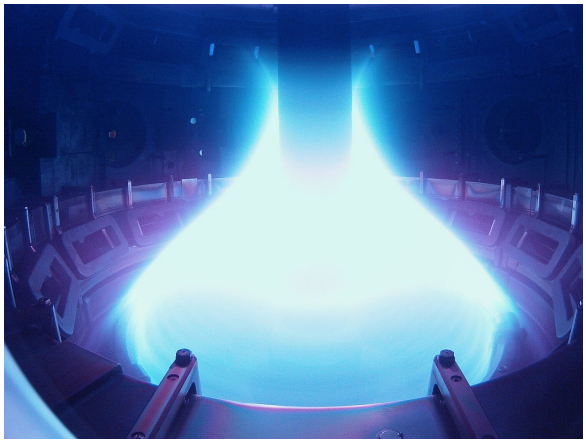
(а) Розрядні трубки з He, Ne, Ar, Kr, Xe (Alchemist-hp, CC BY-SA 2.0 DE)



(б) Плазмова куля (Supportstorm)



(в) Дугове зварювання (W. M. Plate Jr.)



(г) Токамак MAST, Culham (Eye Steel Film, CC BY 2.0)

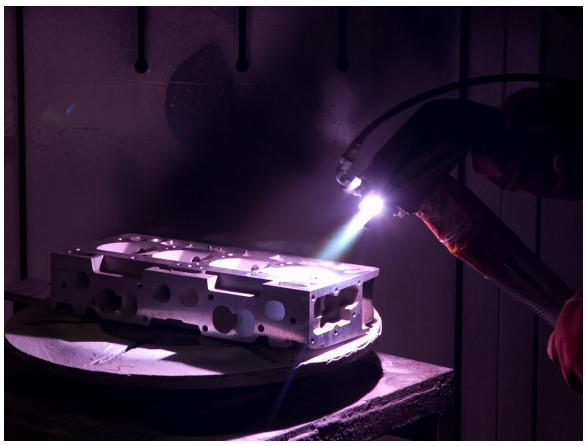
Рис. 5. Лабораторна й технічна плазма: газовий розряд (а), плазмова куля (б), електрична дуга (в), токамак (г). Знімки (б) і (в) — суспільне надбання

Плазма в технологіях. Плазма давно вийшла з лабораторії (рис. 6). Почнімо з теплових застосувань. У *плазмовому різаку* (різновиді плазмотрона; рис. 6 а) електрична дуга стискається вузьким соплом і потоком газу перетворюється на струмінь із температурою $\sim 2{\times}10^4$ K, що розплавляє метал і здуває розплав; так розрізають сталеві листи завтовшки до кількох сантиметрів. Той самий принцип, але зі струменем, у який вдувають порошок, використовують для *плазмового напилення* (рис. 6 б): частинки металу чи кераміки розплавляються в плазмі, вдаряються об деталь і утворюють покриття, скажімо теплозахисне для двигунів.

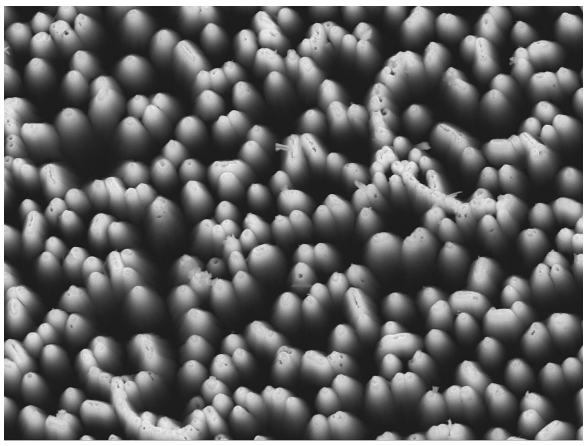
Інший напрям — *хімічний*, а не тепловий. У газі низького тиску ($\sim$ 1–100 мТор) високочастотний розряд має T_e кілька електронвольтів і $n_e \sim 10^9$–10^{11} см$^{-3}$ [15], тоді як сам газ лишається майже холодним. Електрони розкладають молекули робочого газу (фтор- чи хлоровмісні) на хімічно активні радикали, а електричне поле біля поверхні



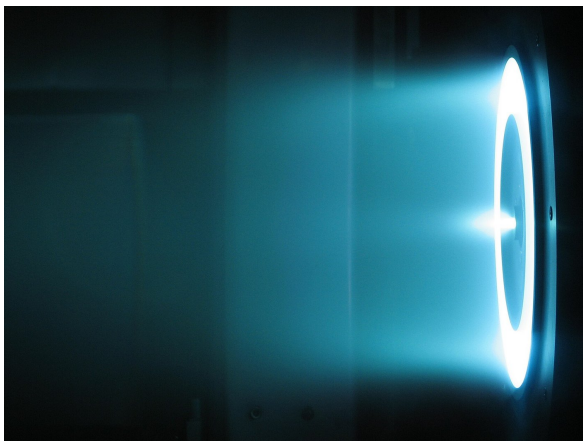
(а) Плазмове різання металу (D. Baron Carral, CC0)



(б) Плазмове напилення покриття на деталь двигуна (Optimi3e, CC BY-SA 4.0)



(в) Поверхня кремнію після плазмового травлення, електронний мікроскоп (PolinLinB, CC BY 4.0)



(г) Лабораторний двигун Холла на ксеноні, 6 кВт (NASA/JPL)

Рис. 6. Плазма в технологіях: різання (а), напилення (б), травлення (в), космічний двигун (г). Знімок (г) — суспільне надбання

розганяє іони перпендикулярно до пластини. Радикали реагують із матеріалом, іони допомагають реакції й задають їй напрям, тож у кремнії виходять вузькі глибокі канавки з вертикальними стінками — так виготовляють мікросхеми. Таким *травленням* обробляють і метали (алюміній травлять хлоровмісною плазмою), і скло; плазмою також очищають поверхні й наносять тонкі плівки. Рис. 6 в показує поверхню кремнію після плазмового травлення.

Нарешті, *космічні двигуни*. У двигуні Холла (рис. 6 г) іони ксенону розганяються електричним полем у кільцевому каналі, де радіальне магнітне поле утримує електрони, і вони дрейфують у схрещених полях $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ (розд. 3). Швидкість витікання сягає 10–30 км/с — у кілька разів більше, ніж у хімічних ракетних двигунів, тож витрата палива для тієї самої зміни швидкості мала. Це далеко не весь перелік: газорозрядні лампи й вивіски, дисплеї, плазма олова, розігріта лазером,

як джерело ультрафіолетового випромінювання для літографії, холодна плазма атмосферного тиску, яку досліджують для знезараження поверхонь і води, в медицині та сільському господарстві. Спільне для всіх цих технологій: плазма дає змогу створити хімічно активні частинки без високої температури всього газу або, навпаки, досягти температур, недосяжних для полум'я.

Гаряча плазма для термоядерного синтезу. Окремий клас — гаряча плазма з температурою порядку 10^8 K, потрібна для реакцій термоядерного синтезу (розд. 10). Контакт зі стінкою миттєво охолодив би плазму (і зруйнував би стінку), тому її *утримують* магнітним полем (розд. 9): у токамаку (рис. 5 г), стелараторі чи пастці з дзеркалами. У видимому світлі світиться насамперед холодніша периферія плазми, а гаряче ядро ($T \sim 10^4$ еВ) майже не світить: воно випромінює переважно в інших діапазонах. Інший підхід — *інерційний*: мішень стискають лазерними імпульсами так швидко, що вона не встигає розлетітися. У грудні 2022 р. в Національному комплексі запалювання (NIF, США) вихід енергії синтезу вперше перевищив енергію лазерних імпульсів, що надійшли на мішень [21], а у токамаку JET 2023 р. у D–T-розряді отримали рекордні 69 МДж за ~ 5 с [22]. Будують і міжнародний реактор ITER [23].

§ 0.4. Схожі на вигляд, різні за природою

Інтуїція про плазму легко підводить: схожі на вигляд об'єкти бувають фізично різними. Розгляньмо три пари, на яких видно, що саме треба вимірювати, щоб відрізнити одне від іншого.

Вогонь і плазма. Поширена думка, що вогонь — це плазма: полум'я (рис. 7) гаряче, світиться й містить заряджені частинки.

На рисунку видно ламінарне полум'я: газ тече спокійно, без вихорів, тому видно його шарувату будову — блакитну зону внизу, де паливо реагує з повітрям, і вище яскраву жовту зону розжарених частинок сажі. Світло дають саме вони й збуджені радикали (CH, C_2), а не плазма. Така будова задана хімією горіння, тобто реакціями палива з киснем повітря. Заряджених частинок у полум'ї дуже мало: лише кілька на мільярд нейтральних атомів і молекул, і утворюються вони переважно хімічно, а не нагріванням. Чи достатньо їх, щоб газ поводився як плазма, покажуть три умови, виведені в розд. 1:

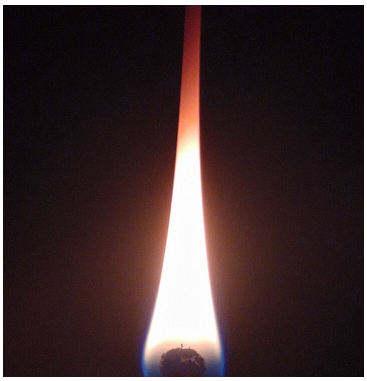


Рис. 7. Полум'я гасової лампи (Arivumathi, CC0)

ми перевіримо їх для полум'я в § 1.6 і побачимо, що дві з них виконано, а третя — ні.

Розрядна трубка й дуга. Неонова лампа й зварювальна дуга обидві світяться й обидві є газовим розрядом (рис. 5 а, в), але фізично це різні плазми. Різницю підсумовує табл. 1: у трубці низького тиску електрони рідко стикаються з важкими частинками й не віддають їм енергію, тому $T_e \gg T_i$; у дузі високого тиску зіткнень вистачає, щоб вирівняти температури.

Таблиця 1. Розряд низького тиску й дуга: орієнтовні параметри

	Розрядна трубка	**Дуга**
Тиск	$\sim$ 0,1–10 Тор	$\gtrsim$ 1 атм
T_e	$\sim$ 1 еВ	$\sim$ 1 еВ
T_i	$\sim$ 300 К	$\sim$ 1 еВ
n_e, см$^{-3}$	$\sim 10^{10}$	10^{15}–10^{17}
Ступінь іонізації	$\lesssim 10^{-6}$	відсотки й більше
Рівновага	$T_e \gg T_i$	ізотермічна

Сонце й токамак. І те, й те — гаряча плазма, у якій відбувається (чи має відбуватися) термоядерний синтез, але плазму утримують принципово по-різному. Сонце тримає власна гравітація, а в токамаку — магнітне поле (розд. 9). Це визначає й те, наскільки «щільно» виділяється енергія.

Скільки потужності дає кубометр Сонця. Світність Сонця $L \approx 3{,}8 \times 10^{26}$ Вт виділяється майже вся в ядрі радіусом $0{,}2R_\odot \approx 1{,}4 \times 10^8$ м, тобто в об'ємі $V \approx 1{,}1 \times 10^{25}$ м^3. Середня питома потужність $L/V \approx 30$ Вт/м^3, як у купі компосту. Для термоядерного реактора потрібно близько мегавата на кубометр плазми, тобто в десятки тисяч разів більше.

Сонце виграє розмірами й часом: його ядро велике, а тримається гравітацією мільярди років, до того ж протон-протонна реакція в ньому дуже повільна. Реактору ж потрібна швидка реакція, а суміш дейтерію з тритієм реагує значно швидше, проте лише за вищої температури. Тому на Землі плазма мусить бути значно гарячішою (близько 10^8 К проти $1{,}5 \times 10^7$ К у ядрі Сонця) і горіти на іншому паливі (розд. 10).

§ 0.5. Що об'єднує всі ці об'єкти

Підсумуємо розглянуте таблицею й діаграмою: плазми різняться за концентрацією n й температурою T на багато порядків (табл. 2).

Таблиця 2. Орієнтовні параметри різних плазм (значення наведено за порядком величини).

Плазма	n_e, см$^{-3}$	T, **еВ**
Іоносфера	10^5	0,1
Міжзоряний газ	10	1
Сонячна корона	10^8	10^2
Ядро Сонця	10^{26}	10^3
Токамак	10^{14}	10^4
Сонячний вітер (1 а.о.)	10	10
Газовий розряд	10^{12}	3
Електрони в металі	10^{23}	вироджені, $E_F \sim 8$

Концентрації в таблиці відрізняються на 25 порядків (від 10 до 10^{26} см$^{-3}$), температури — на п'ять (від 0,1 до 10^4 еВ). Електрони в металі *вироджені*: їхня енергія визначається не теплом, а принципом Паулі ($T \ll E_F$), де E_F — енергія Фермі, тобто найбільша енергія електронів при $T = 0$; такий газ потребує квантового опису (§ 1.7). Діаграму на рис. 8 читають так: кожна точка — плазма з даними n і T, а лінії відокремлюють області, де змінюється фізика: $N_D \sim 1$ — межа колективної поведінки (§ 1.5), $T = E_F$ — виродження, $T = m_e c^2$ — релятивізм ($\hbar$ — стала Планка, c — швидкість світла). Величини λ_{De}, N_D й Γ означимо в розд. 1.

Інтерактивна симуляція. Побачити всі розглянуті об'єкти на одній діаграмі $\lg n$–$\lg T$, подивитися їхні параметри (λ_{De}, N_D, Γ, ω_{pe}) і задати власну пару n, T, щоб дізнатися, чи це ще колективна плазма, можна в **інтерактивній мапі плазм**. Клацніть по знімку-об'єкту — побачите його фото, параметри й режим; перетягніть «мій об'єкт» під лінію $N_D = 1$ — колективна поведінка зникне.

Ми бачили плазму в усіх масштабах: від каналу іскри завтовшки кілька сантиметрів до світлових років, від кімнатної температури іонів до сотень мільйонів кельвінів. Три властивості, що повторюються в більшості прикладів, і є змістом нашого курсу.

- *Колективність і квазінейтральність.* Плазма квазінейтральна на масштабах, більших за λ_D, але заряди в ній взаємодіють усереднe-

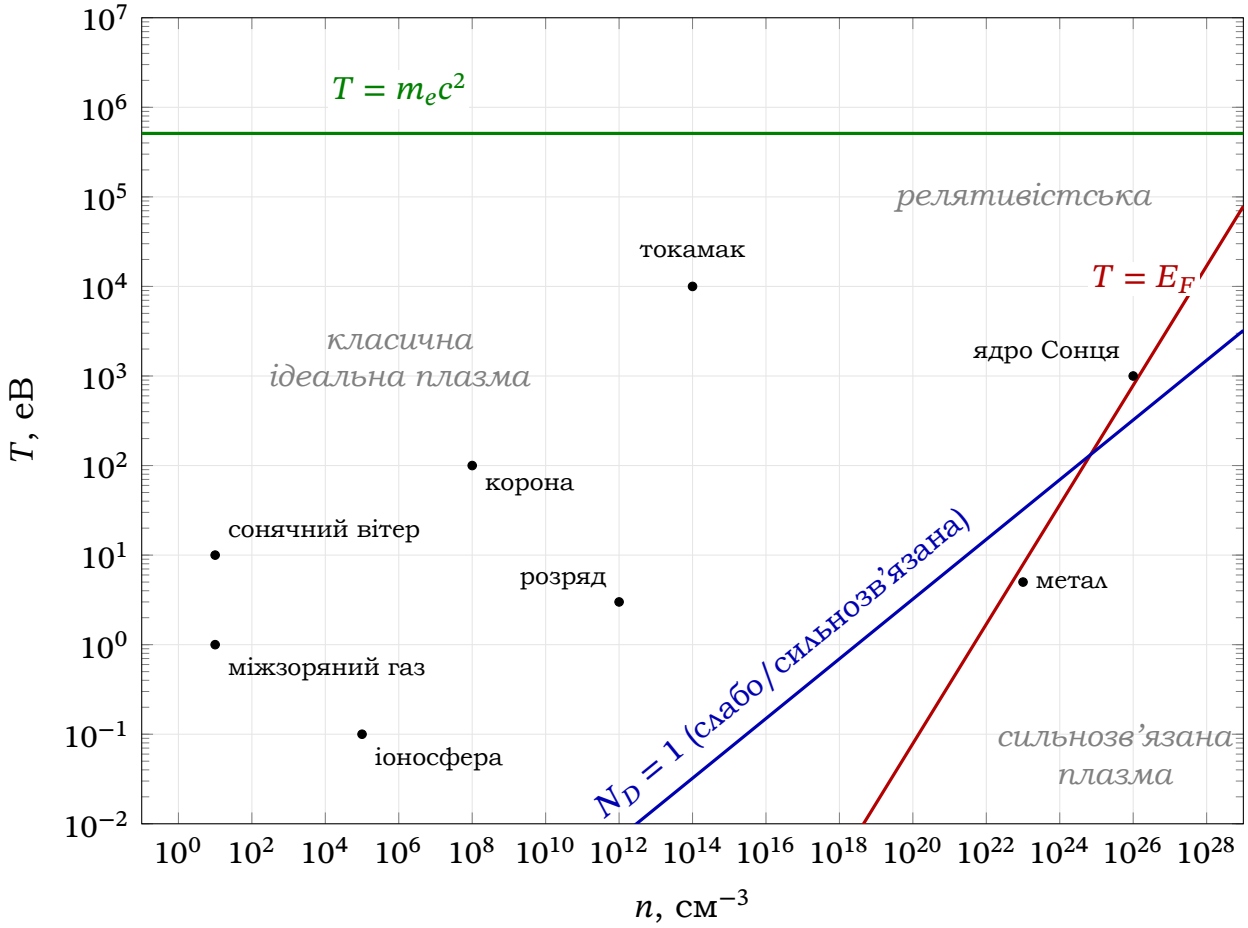


Рис. 8. Діаграма $\lg n$–$\lg T$ видів плазми: лінії $N_D \sim 1$ (орієнтовна межа слабкозв'язаної плазми; практично потрібно $N_D \gtrsim 100$), $T = E_F$ (виродження) та $T = m_e c^2$ (релятивізм) обмежують область класичної ідеальної плазми $\max\{e^2 n^{1/3}, \hbar^2 n^{2/3}/m_e\} \ll T \ll m_e c^2$

но, на великих відстанях. Звідси екранування й власні коливання (розд. 1, 2).

- *Магнітне поле.* Воно вказує частинкам траєкторію: звідси дрейфи, магнітні пастки й вморожене поле (розд. 3, 5, 9).
- *Роль зіткнень.* У розрідженій плазмі (космос, розряд низького тиску) зіткнення рідкісні, тож потрібні кінетичний опис і теорія хвиль та нестійкостей; у щільній (дуга, полум'я) зіткнення часті й визначають перенос (розд. 4, 7, 8).

Решта книги — про те, як ці властивості виражаються формулами. Спершу, у розд. 1, з'ясуємо, що саме відрізняє плазму від газу; далі — хвилі в холодній плазмі (розд. 2), рух частинок (розд. 3), зіткнення (розд. 4), гідродинамічний опис (розд. 5), хвилі в замагніченій плазмі (розд. 6), кінетика (розд. 7), нестійкості (розд. 8), утримання плазми й синтез (розд. 9, 10), газовий розряд (розд. 11) і підсумкова карта масштабів (розд. 12).

Головне в розділі

- Понад 99 % видимої речовини у Всесвіті — плазма: від первинної воднево-гелієвої плазми раннього Всесвіту (рекомбінація за $T \approx 0{,}3$ еВ) до зір, туманностей, міжгалактичного газу й акреційних дисків чорних дір.
- Природна плазма охоплює концентрації від $\sim 10^{-5}$ до 10^{26} см$^{-3}$ й розміри від сантиметрів до світлових років; у розрідженій космічній плазмі зіткнень мало, а структури задає магнітне поле (петлі корони, сяйво, вморожені волокна туманностей).
- Лабораторна плазма: розряд низького тиску нерівноважний ($T_e \gg T_i$), дуга ізотермічна; плазмотрони, різання, напилення, травлення, двигуни Холла; гаряча плазма для синтезу, яку утримує магнітне поле.
- Плазма — квазінейтральний іонізований газ із колективною поведінкою; низько- й високотемпературну плазму розрізняють за T (межі $\sim 10^5$ і $\sim 10^6$ К). Полум'я — гранична слабоіонізована плазма ($\alpha \sim 10^{-9}$): зіткнення з нейтралами домінують над плазмовими процесами (перевірка — § 1.6).
- Об'єкти розрізняють за n, T_e і T_i, ступенем іонізації та способом утримання (гравітація, магнітне поле, інерція, стінки).

Контрольні питання

1. Чому Всесвіт був непрозорим до рекомбінації і став прозорим після неї?

2. Чому водень рекомбінує за $T \sim 0{,}3$ еВ, хоча потенціал іонізації становить 13,6 еВ?

3. Чому петлі в короні Сонця повторюють силові лінії магнітного поля?

4. Чим плазма розрядної трубки відрізняється від плазми дуги за T_e, T_i і ступенем іонізації? Чому так?

5. Чому полум'я — слабкоіонізована плазма? Яка величина показує, що колективні процеси в ньому придушені? (Підказка: § 1.6.)

6. Чому на Землі для термоядерного реактора потрібна вища температура плазми, ніж у ядрі Сонця?

7. Чому іоносфера відбиває короткі радіохвилі, а ультракороткі проходять крізь неї?

8. Чому в міжзоряному газі температури електронів та іонів можуть помітно відрізнятися?

9. Чому світло, яке бачить Event Horizon Telescope, випромінює не сама чорна діра, а плазма довкола неї?

1 Плазма: від іонізованого газу до колективного середовища

У розд. 0 ми побачили плазму в природі й техніці, домовилися, що називаємо плазмою (§ 0.1), і з'ясували, як вона виникає. Тепер з'ясуємо, *коли* речовина справді є плазмою. Почнемо зі ступеня іонізації (§ 1.1), далі розглянемо квазінейтральність і власні коливання (§ 1.3), екранування (§ 1.4) й умови колективності (§§ 1.5, 1.6). Наприкінці § 1.6 ці умови перевіримо на прикладі полум'я: воно світиться й містить заряджені частинки, але чи є воно плазмою?

§ 1.1. Іонізація: формула Саха

Скільки енергії потрібно, щоб газ став плазмою? Енергія іонізації атома водню $I = 13{,}6$ еВ, що відповідає $1{,}6\times10^5$ К, проте газ іонізується помітно за значно нижчих температур. Пояснює це формула Саха, яка визначає ступінь іонізації газу в стані термодинамічної рівноваги.

Теоретичні відомості Нагадаємо зі статистичної фізики

Для ідеального газу з концентрацією n хімічний потенціал $\mu = T\ln(n\lambda_T^3/g)$, де $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/mT}$ — теплова довжина хвилі де Бройля, g — статистична вага (кратність виродженого внутрішнього стану; для електрона зі спіном $g_e = 2$). Умова хімічної рівноваги реакції атом $\rightleftharpoons$ іон + електрон: $\mu_a = \mu_i + \mu_e$. Енергія іонізації I зсуває нуль енергії: атом лежить на I нижче за пару «іон + електрон», тобто $\mu_a = T\ln(n_n\lambda_{Ta}^3/g_a) - I$ (n_n — концентрація атомів). Підставляючи, маємо $\ln\dfrac{n_e\lambda_{Te}^3}{g_e} + \ln\dfrac{n_i\lambda_{Ti}^3}{g_i} = \ln\dfrac{n_n\lambda_{Ta}^3}{g_a} - \dfrac{I}{T}$, звідки $\dfrac{n_e n_i}{n_n} = \dfrac{g_e g_i}{g_a}\dfrac{\lambda_{Ta}^3}{\lambda_{Te}^3\lambda_{Ti}^3}\,e^{-I/T}$. Оскільки $m_a \approx m_i$, то $\lambda_{Ta} \approx \lambda_{Ti}$, і залишається $\dfrac{n_e n_i}{n_n} = \dfrac{g_e g_i}{g_a}\lambda_{Te}^{-3}\,e^{-I/T}$. Для водню $g_e g_i/g_a = 2\cdot 1/2 = 1$ ($g_e = 2$ за спіном електрона, $g_i = 1$ для протона, $g_a = 2$ для основного стану атома). Тут T — температура електронів, а газ вважаємо ідеальним і рівноважним. (Врізку можна пропустити при першому читанні: далі важливий лише результат — формула Саха.)

Для водню формула Саха [7] має вигляд (m — маса електрона)

$$\frac{n_e n_i}{n_n} = \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{I}{T}\right) \approx 2{,}4\times 10^{15}\, T^{3/2}\, e^{-I/T}\ \text{см}^{-3}, \qquad (1.1)$$

де в числовій формі T підставляють у кельвінах, а тоді й I в показнику експоненти треба виразити в кельвінах: $I/k_{\mathrm{B}} \approx 1{,}58\times 10^5$ K (тут, і лише тут, повертаємо k_{B} явно). Для інших елементів у правій частині з'являється відношення статистичних ваг $g_e g_i/g_a$.

Дві обставини визначають зміст формули. По-перше, експоненціальний множник: ступінь іонізації стає помітним, коли T лише в 10–20 разів менша за I. По-друге, перед експонентою стоїть величина $n_q = (mT/2\pi\hbar^2)^{3/2} = \lambda_{Te}^{-3}$, обернена до квантового об'єму електрона (λ_{Te} — теплова довжина хвилі де Бройля з врізки вище). Об'єм λ_{Te}^3 — це «клітинка», яку займає один квантовий стан електрона, тож $n_q = \lambda_{Te}^{-3}$ — кількість станів, доступних електрону в одиниці об'єму (для $T = 1$ еВ $n_q \approx 3\times 10^{21}$ см$^{-3}$). Класична статистика застосовна, поки $n_e \ll n_q$. Для типової розрідженої плазми $n_q/n = 1/(n\lambda_{Te}^3)$ лежить від 10^6 до 10^{10}: на кожен електрон припадає величезна кількість вільних станів, тому вільний стан значно вигідніший за зв'язаний в атомі (виграш ентропії) і перекриває больцманівський фактор $e^{-I/T}$ уже за T від $I/20$ до $I/10$. Звідси ще один наслідок: за однакової температури *чим розрідженіший газ, тим легше він іонізується* — менша n означає більше вільних станів на електрон.

Іонізація за кімнатної температури. Для контрасту візьмемо кімнатну температуру ($T \approx 0{,}026$ еВ) і газ з $I = 14{,}6$ еВ при $n \approx 3\times 10^{19}$ см$^{-3}$ (атоми азоту; реальний N_2 молекулярний, але порядок величини той самий): $e^{-I/T} \sim 10^{-244}$, тож ступінь іонізації $\alpha \sim 10^{-122}$, тобто практично нуль. А водень при 1 еВ і густині 10^{17} см$^{-3}$ іонізований уже на $\sim 20\,\%$.

Щоб знайти α, зауважимо: кожен акт іонізації народжує пару іон+електрон, тож $n_e = n_i$. Позначивши повну концентрацію частинок $n = n_i + n_n$, маємо $n_e = n_i = \alpha n$, $n_n = (1-\alpha)n$, і рівняння (1.1) набуває вигляду $\alpha^2/(1-\alpha) = n_q\, e^{-I/T}/n$ — квадратне рівняння відносно α. Для водню з повною концентрацією частинок $n = 10^{17}$ см$^{-3}$ його розв'язок дає

$$\alpha \approx 1{,}3\times 10^{-4}\ (0{,}5\ \text{еВ}), \qquad \alpha \approx 0{,}18\ (1\ \text{еВ}), \qquad \alpha \approx 0{,}99\ (2\ \text{еВ}).$$

Газ іонізується у вузькому інтервалі температур (рис. 1.1): для водню з повною концентрацією 10^{17} см$^{-3}$ — між 0,5 і 2 еВ (при іншій густині інтервал зсувається логарифмічно). Перехід *плавний*: $\alpha(T)$ — гладка функція, розриву немає, тобто це *кросовер*[1], а не фазовий перехід.

[1] Кросовер — плавний перехід між двома станами системи при зміні параметра (тут температури): без стрибка властивостей і без певної температури переходу, на відміну від фазового переходу, як-от кипіння води

Так є в розрідженому газі, де застосовна формула (1.1). У дуже щільній речовині (сильнозв'язана плазма) можливий і справжній фазовий перехід, але це вже окреме питання. У розрядах і під дією випромінювання ступінь іонізації може значно відрізнятися від рівноважного, тому формула (1.1) дає лише орієнтир.

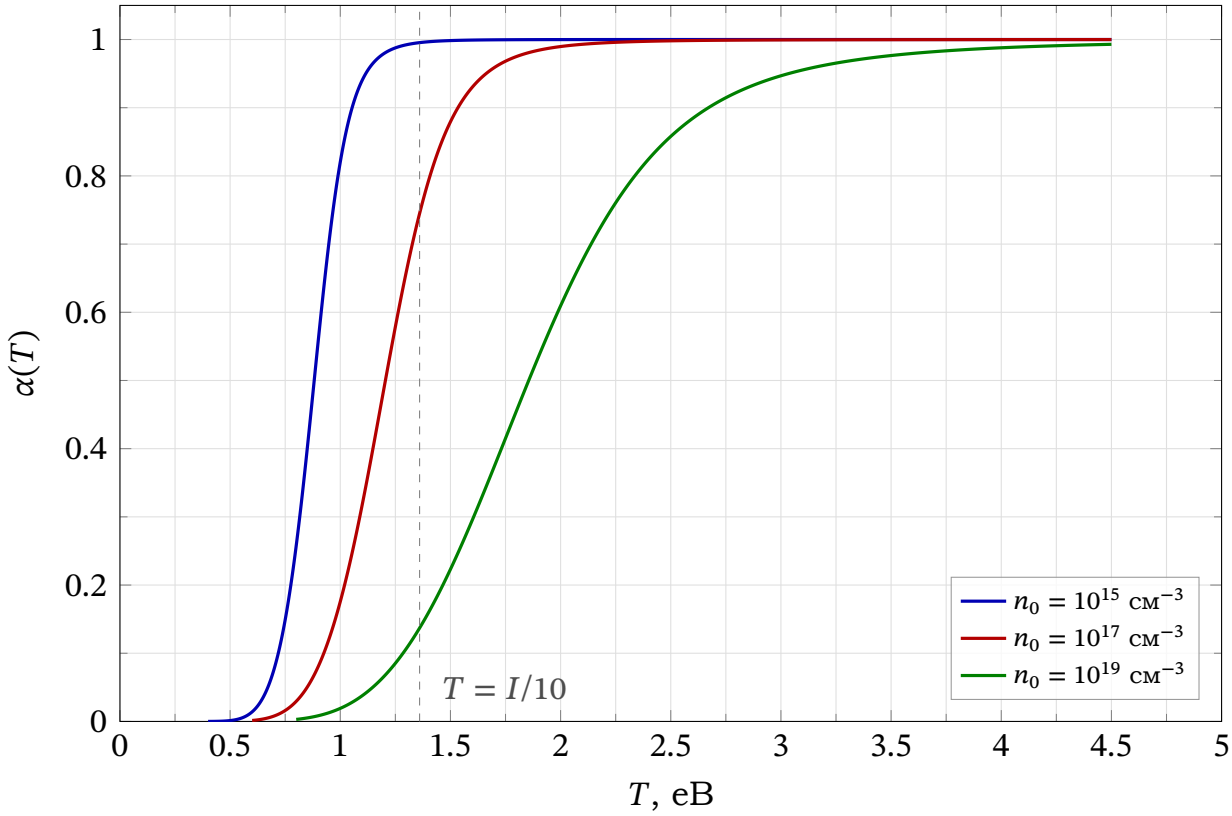


Рис. 1.1. Залежність ступеня іонізації водню від температури (формула Саха); пунктиром позначено $T = I/10 \approx 1{,}4$ еВ, де іонізація вже переважна ($\alpha \approx 0{,}75$), хоча $T \ll I$

§ 1.2. Температура плазми та два компоненти

У плазмі електрони й іони можуть мати різні середні кінетичні енергії, тому взагалі треба вводити дві температури T_e та T_i. Температуру вимірюють в енергетичних одиницях, зазвичай в еВ (співвідношення з кельвінами — у врізці в § 0.1).

У газорозрядній плазмі енергія від зовнішнього поля спершу передається електронам: струм, а отже й джоулеве тепло $\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$, переносять переважно вони, бо значно рухливіші за іони. Через велику різницю мас ($m_i \geq 1836\,m_e$) електрон при пружному зіткненні з іоном передає тому лише частку $\delta E/E \leq 4m_e m_i/(m_e+m_i)^2 \approx 4m_e/m_i \approx 0{,}2\,\%$ (для протона) своєї енергії — як тенісний м'ячик, що відскакує від вантажівки (центральний пружний удар з теоретичної механіки), тому

часто $T_e > T_i$. Лише за достатньо великої густини та тривалого часу електрон-іонні зіткнення вирівнюють температури: $T_e = T_i = T$. Отже, вираз «температура плазми» без уточнення неоднозначний, і в нерівноважній плазмі T_e та T_i слід вказувати окремо. Якщо $T_e \neq T_i$, плазму називають *двотемпературною*. Яскравий приклад — позитивний стовп тліючого розряду (довга світна однорідна ділянка розряду в трубці між катодом і анодом) за тиску $\sim 0{,}1$ мм рт. ст.: температура електронів досягає ~ 1–3 еВ ($\sim 1{,}2\times10^4$–$3{,}5\times10^4$ К) [7], тоді як іони мають лише кілька сотень кельвінів. Різні часи релаксації (розд. 4) пояснюють, чому така система існує тривалий час: спочатку встановлюється максвеллівський розподіл електронів, потім іонів, і лише згодом вирівнюються їхні температури.

§ 1.3. Квазінейтральність і плазмові коливання

Якби в плазмі була присутня велика кількість нескомпенсованих зарядів, виникали б сильні поля, які приводили б заряди в рух. Тому на макроскопічних масштабах густини позитивного й негативного зарядів практично збігаються.

Нехай у плазмі з концентраціями n_e електронів (заряд $-e$) та n_i іонів (заряд $+Ze$) виникла просторова локальна різниця густин. За теоремою Гаусса виникне кулонівське поле:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\pi e(Zn_i - n_e). \tag{1.2}$$

Оскільки питомий заряд електрона e/m_e величезний, а іони важкі й повільні, це поле за дуже короткий час (його знайдемо нижче) створить потужні сили, які змістять електрони так, щоб знівелювати розділення зарядів. Оцінимо силу цього поля.

Сила поля при розділенні зарядів. Плазма з $n = 10^{12}$ см$^{-3}$ і розміром $L = 1$ см, розділення зарядів лише на $1\,\%$, $\delta n = 10^{10}$ см$^{-3}$. Тоді $E \sim 4\pi e\,\delta n\,L \approx 60$ СГС$\approx 2\times10^4$ В/см, тоді як тепловому руху за $T = 1$ еВ відповідає поле $T/(eL) \sim 1$ В/см (поле суттєве, якщо його робота eEL на відстані L порівнянна з тепловою енергією T). Навіть відхилення $\delta n/n \sim 10^{-6}$ дає $E \sim 2$ В/см, тобто порівнянне з тепловим: розділення зарядів стає енергетично невигідним уже на рівні 10^{-6}.

Загальну оцінку дано наприкінці § 1.4.

Тому на макроскопічних масштабах плазма є *квазінейтральною*:

$$\rho = \sum_s q_s n_s = e(Zn_i - n_e) \approx 0 \quad\Rightarrow\quad n_e \approx Zn_i. \tag{1.3}$$

! *Квазінейтральність — це не тотожний нуль у кожній точці, а макроскопічне наближення. Локальні відхилення від нейтральності можливі й саме вони лежать в основі екранування та плазмових коливань.*

Плазмові коливання. Нехай в плоскому шарі однорідної плазми електрони змістилися як ціле відносно нерухомого іонного фону (іони важкі, $m_i \gg m_e$) на невелику відстань x (рис. 1.2). Зміщення однакове для всіх електронів, тому відстані між ними не змінюються, а їхня взаємодія одне з одним (за третім законом Ньютона) не впливає на рух електронів як цілого: його задає лише поле, що виникло через розділення зарядів. Хаотичний тепловий рух накладається на цей спільний зсув і поки не розглядається. На краях шару виникають заряди з поверхневою густиною $\sigma = \mp n_e e x$, і між ними — поле плоского конденсатора, напрямлене так, щоб повернути електрони назад: $E = 4\pi n_e e x$. Рівняння руху електрона (його заряд $-e$)

$$m_e \ddot{x} = -eE = -4\pi n_e e^2 x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_{pe}^2 x = 0, \tag{1.4}$$

де

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} \approx 5{,}64 \times 10^4 \sqrt{n_e[\text{см}^{-3}]}\ \text{с}^{-1} \tag{1.5}$$

називається *електронною плазмовою* (або *ленгмюрівською*) *частотою*, а самі коливання — *плазмовими*. Тобто ω_{pe} — це частота, з якою плазма «відновлює» порушену квазінейтральність, а ω_{pe}^{-1} — характерний час цього відновлення (для $n = 10^{12}$ см$^{-3}$ це $\sim 2 \times 10^{-11}$ с).

Той самий результат дає й опис без уявного конденсатора. З рівняння неперервності $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ та рівняння руху $m_e \partial_t \mathbf{v} = -e\mathbf{E}$ при $\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{v}$ маємо $\partial_t^2 \rho = -\nabla \cdot \partial_t \mathbf{j} = -(n_e e^2/m_e) \nabla \cdot \mathbf{E}$, а за теоремою Гаусса $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Тому

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 \rho = 0.$$

Отже, густина заряду, тобто порушення квазінейтральності, сама коливається з частотою ω_{pe}.

З урахуванням руху іонів (заряд Ze, маса m_i) для довгохвильових поздовжніх коливань $\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \simeq \omega_{pe}^2$, де $\omega_{pi}^2 = 4\pi Z^2 e^2 n_i / m_i$: іонний внесок мізерний (оцінка — у задачі 1.4), тому далі $\omega_p \equiv \omega_{pe}$. Реальні коливання загасають, а за теплового руху їхня частота залежить від хвильового числа (§ 2.3), тож ω_{pe} слід розуміти насамперед як базову *масштабну* частоту плазми.

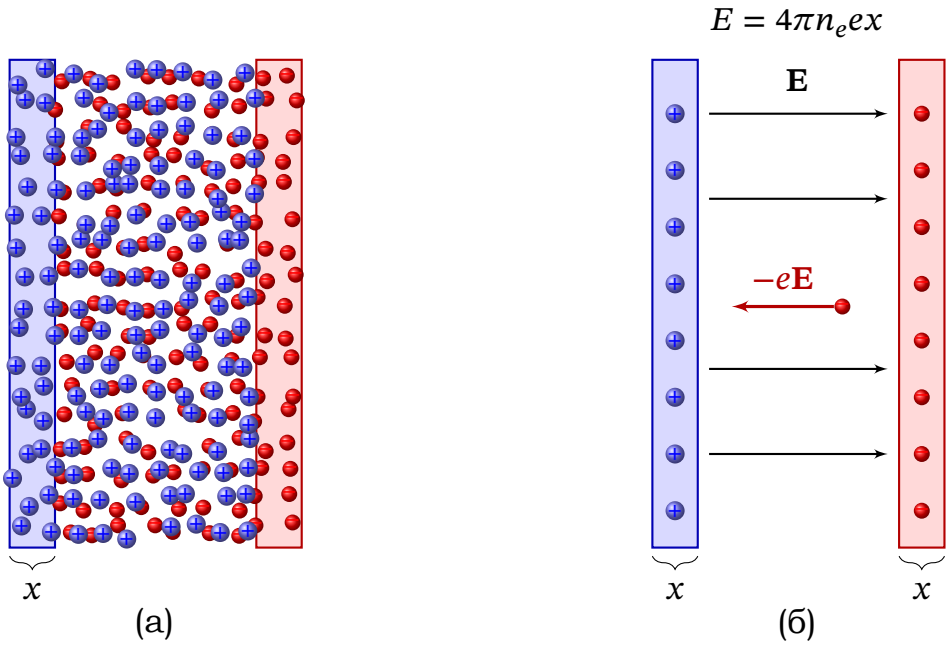


Рис. 1.2. Модель плазмових коливань: (а) нерухомі іони й електрони, зміщені на x (мале порівняно з розміром області); (б) нескомпенсовані заряди двох шарів завтовшки x утворюють «конденсатор», поле $\mathbf{E}$ між ними повертає електрони назад

Тепловий рух зв'язує цей час із довжиною: за час ω_{pe}^{-1} електрон із тепловою швидкістю v_{Te} проходить відстань

$$\lambda_{De} = \frac{v_{Te}}{\omega_{pe}}, \qquad v_{Te} = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \approx 4{,}2 \times 10^7 \sqrt{T_e[\text{еВ}]}\ \text{см/с} \,. \tag{1.6}$$

Це і є дебаївська довжина (у § 1.4 вона виведеться з екранування). Тому плазма на масштабах, менших за λ_{De} «не встигає» колективно відповідати: електрон вилітає з такої області раніше, ніж поле встигне його повернути, і тепловий рух розмиває ефект. Отже, колективну реакцію плазми задають два масштаби: час $\sim \omega_{pe}^{-1}$ і довжина $\sim \lambda_{De}$.

§ 1.4. Дебаївське екранування

Внесемо в плазму малий пробний заряд q. У вакуумі його поле спадає як $1/r$ і сягає як завгодно далеко. У плазмі ж є рухливі заряджені частинки, які реагують на це поле: частинки протилежного знака притягуються до заряду, однойменного — відштовхуються. Заряд виявляється оточеним «шубою» частинок протилежного знака, і його поле зменшується (рис. 1.3). Тому, попри далекодійність кулонівської взаємодії, на великих відстанях поле окремого заряду не відчувається. Тепловий рух не дає такій «шубі» стиснутися до точки:

вона розмазана на деяку характерну відстань порядку λ_D (повний її заряд дорівнює $-q$, див. нижче). Знайдемо, чому дорівнює λ_D.

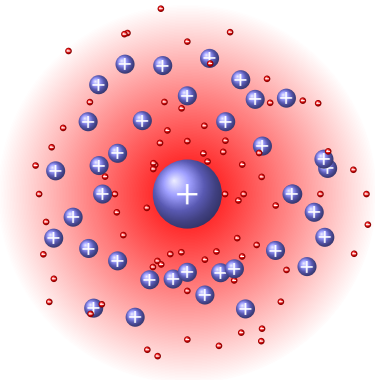


Рис. 1.3. Пробний додатний заряд оточений електронною «шубою», яка екранує його поле

Кожен сорт частинок s (заряд q_s, концентрація n_s) перебуває в стаціонарному потенціалі $\varphi(\mathbf{r})$ у тепловій рівновазі зі своєю температурою T_s, тому розподіл частинок за Больцманом

$$n_s = n_{s0} \exp\left(-\frac{q_s\varphi}{T_s}\right).$$

Тут n_{s0} — незбурена концентрація вдалині від заряду, де $\varphi \to 0$, а сумарний заряд плазми нульовий: $\sum_s q_s n_{s0} = 0$. Густина заряду плазми

$$\rho = \sum_s q_s n_{s0} \exp\left(-\frac{q_s\varphi}{T_s}\right).$$

Для слабкого поля $|q_s\varphi| \ll T_s$ розкладемо експоненти. Нульовий доданок зникає завдяки нейтральності, залишається

$$\rho \simeq -\varphi \sum_s \frac{n_{s0} q_s^2}{T_s}.$$

Підстановка в рівняння Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi(\rho + q\delta(\mathbf{r}))$ дає (дельта-функція $\delta(\mathbf{r})$ описує точковий пробний заряд і забезпечує кулонівську поведінку потенціалу при $r \to 0$)

$$\Delta\varphi - \frac{\varphi}{\lambda_D^2} = -4\pi q\,\delta(\mathbf{r}), \qquad \boxed{\frac{1}{\lambda_D^2} = 4\pi \sum_s \frac{n_{s0} q_s^2}{T_s}}. \tag{1.7}$$

Величина λ_D називається *дебаївською довжиною* (радіусом екранування).

Поле пробного заряду сферично симетричне, $\varphi = \varphi(r)$, і при $r > 0$ маємо $\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2}$. Для $u = r\varphi$ рівняння (1.7) спрощується до $u'' = u/\lambda_D^2$, загальний розв'язок якого $u = Ae^{-r/\lambda_D} + Be^{r/\lambda_D}$. Умова $\varphi \to 0$ при

$r \to \infty$ виключає зростаючий доданок ($B = 0$), а близько до заряду потенціал має збігатися з кулонівським q/r, звідки $A = q$:

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right). \tag{1.8}$$

Кулонівське поле заряду експоненціально послаблюється на відстанях порядку λ_D (рис. 1.4). Цей результат у 1923 р. одержали П. Дебай і Е. Хюккель для електролітів; плазма — його найчистіший прояв.

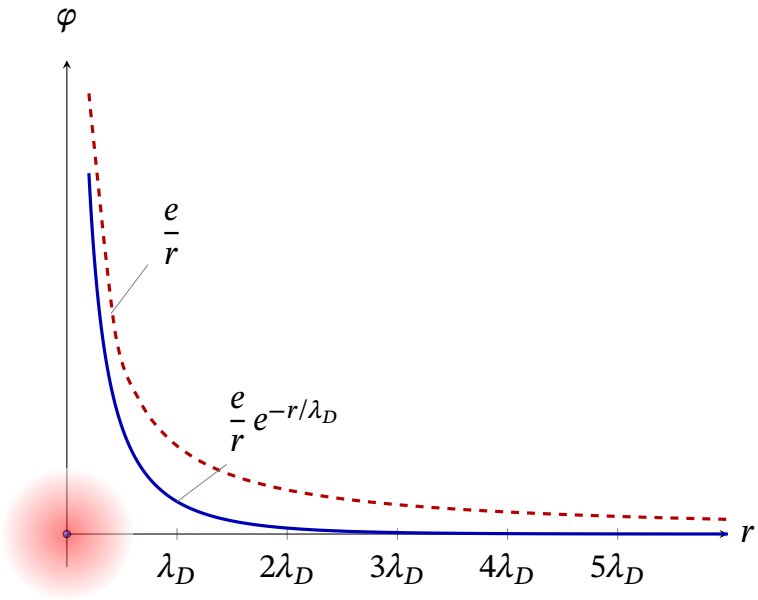


Рис. 1.4. Дебаївське екранування пробного заряду: потенціал швидко спадає на відстанях порядку λ_D

Знайдемо заряд «шуби». Густина заряду плазми $\rho = -\Delta\varphi/4\pi = -\varphi/(4\pi\lambda_D^2)$ при $r > 0$, тому

$$\int \rho\, 4\pi r^2 dr = -\frac{q}{\lambda_D^2} \int_0^\infty r e^{-r/\lambda_D} dr = -q.$$

Отже, повний заряд оболонки в точності компенсує q, а її характерний радіус — λ_D. Для спостерігача на відстані $\gg \lambda_D$ пробний заряд разом з оболонкою практично нейтральний. Те саме стосується кожної зарядженої частинки самої плазми: для решти частинок вона «пробна», тож усюди в плазмі частинка оточена шубою завтовшки λ_D (це використаємо в § 1.5).

Скільки сортів частинок бере участь в екрануванні?. Для електронів і одноразово заряджених іонів

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{Di}^2}, \qquad \lambda_{De} = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_e e^2}}, \quad \lambda_{Di} = \sqrt{\frac{T_i}{4\pi n_i e^2}}.$$

При $T_e = T_i = T$ маємо

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi n e^2}} = \frac{\lambda_{De}}{\sqrt{2}}. \tag{1.9}$$

Практично $\lambda_{De} \approx 743\sqrt{T_e[\text{еВ}]/n_e[\text{см}^{-3}]}$ см.

Ця довжина збігається з v_{Te}/ω_{pe} з (1.6): екранування встановлюється за час відновлення нейтральності, поки тепловий електрон проходить λ_{De}.

Формули вище припускають, що *обидва* сорти встигають перебудуватися в полі заряду, тобто що процес повільний порівняно з часом руху іонів на відстань λ_D ($\sim \lambda_D/v_{Ti}$, де $v_{Ti} = \sqrt{T_i/m_i}$). Якщо процес швидкий, іони лишаються практично на місцях, екранують лише електрони, і замість λ_D слід брати λ_{De}. Зауважимо: у двотемпературній плазмі з $T_i \ll T_e$ сума дає $\lambda_D \approx \lambda_{Di} \ll \lambda_{De}$ — холодні іони екранують *статичний* заряд ефективніше за гарячі електрони, але лише якщо встигли досягти рівноваги з температурою T_i. У літературі під «дебаївською довжиною» найчастіше розуміють саме λ_{De}, тому в кожній задачі слід перевіряти, які компоненти встигають перебудуватися.

Умова застосовності. Лінеаризація експонент потребує $|q_s\varphi| \ll T_s$ принаймні на відстанях $r \gtrsim \lambda_D$. Для $q = e$ на $r = \lambda_D$ це $e^2/\lambda_D \ll T$, або, підставивши (1.7), $1/(8\pi n\lambda_D^3) \ll 1$ (для двох сортів $T = 8\pi n e^2\lambda_D^2$), тобто, з точністю до числового множника, $1/N_D \ll 1$ (число N_D означено в § 1.5). Отже, теорія виконується лише тоді, коли *в сфері радіуса λ_D міститься багато частинок* (докладніше — у § 1.5): за одиниць частинок густина не є гладкою функцією, і усереднювати за Больцманом нічого. Але сама λ_D лишається *лінійкою*, з якою порівнюють інші масштаби. З відстанню між частинками a: чи містить хмара багато частинок ($\lambda_D \gg a$) чи ні ($\lambda_D \lesssim a$, див. § 1.6). З розміром системи L: чи встигає екранування утворитися всередині неї ($\lambda_D \ll L$).

Зовсім близько до пробного заряду ($r \lesssim e^2/T$) $|q\varphi| \gtrsim T$ і лінеаризація порушується, але ця область менша за λ_D у $\sim 1/N_D$ разів, тож на масштабі екранування формула (1.8) справедлива.

Квазінейтральність і розмір системи. Тепер можна уточнити зміст квазінейтральності. Нехай на масштабі L виникла локальна неоднорідність концентрації δn. З рівняння Пуассона $\varphi/L^2 \sim 4\pi e\,\delta n$, а потенціал не може суттєво перевищити T/e: за $e\varphi \gg T$ електрони з тепловими енергіями $\sim T$ були б виштовхані або втягнені полем, і відхилення зникло б. Тож $\varphi \lesssim T/e$ і

$$\frac{\delta n}{n} \lesssim \frac{T}{4\pi n e^2 L^2} = \left(\frac{\lambda_{De}}{L}\right)^2.$$

Отже, квазінейтральність виконується тим точніше, чим менша дебаївська довжина порівняно з розміром плазми L:

$$\lambda_D \ll L. \tag{1.10}$$

(У нерівностях такого типу різницею між λ_D і λ_{De} нехтуємо — вона лише в множнику $\sqrt{2}$.) Біля стінок, електродів та інших меж ця умова порушується — там існують *дебаївські шари*, де квазінейтральності немає.

§ 1.5. Дебаївська сфера. Умова колективності

Електричне поле зарядженої частинки в плазмі екранується іншими частинками. Екранування колективне, якщо цих частинок багато. Тому порахуємо їх в області радіуса λ_{De} навколо цієї частинки; її називають *дебаївською сферою*.

Кількість електронів у такій сфері дорівнює

$$N_D = \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_{De}^3. \tag{1.11}$$

Отже, N_D — це просто число електронів у області, на масштабі якої відбувається дебаївське екранування. Тут береться саме електронна довжина λ_{De}; заміна на $\lambda_D = \lambda_{De}/\sqrt{2}$ змінила б N_D лише в $2^{3/2} \approx 2{,}8$ раза, що для умови $N_D \gg 1$ несуттєво.

Якщо

$$N_D \gg 1, \tag{1.12}$$

то в екрануванні бере участь дуже багато частинок. У цьому випадку не можна говорити про взаємодію цієї частинки з одним конкретним сусідом: поле, що виникає унаслідок перерозподілу зарядів, визначається сумарною дією великої кількості частинок. Екранування має *колективний* характер.

Саме тому умова (1.12) є основною умовою колективності плазми.

Є й спостережуваний наслідок. Парні зіткнення змінюють імпульс частинки з частотою $\nu \sim \omega_p \ln N_D / N_D$ (орієнтовно, з точністю до множника ~ 10; виведемо в розд. 4; логарифм дають далекі проліти, а не лише близькі зіткнення), де $\omega_p = v_{Te}/\lambda_{De}$ — плазмова частота, тобто швидкість колективної відповіді (§ 1.3). Тому за $N_D \gg 1$ колективні ефекти домінують над парними зіткненнями: $\nu \ll \omega_p$. Саме це робить «усереднене поле багатьох частинок» головною силою в плазмі.

Зрозуміємо тепер, коли ця умова виконується. Концентрація n визначає характерну відстань між частинками. Оскільки на одну частинку в середньому припадає об'єм порядку $1/n$, маємо

$$a^3 \sim \frac{1}{n}, \qquad a \sim n^{-1/3},$$

де a — характерний масштаб міжчастинкової відстані.

Тоді

$$N_D \sim \left(\frac{\lambda_D}{a}\right)^3.$$

Отже, умова $N_D \gg 1$ просто означає

$$\lambda_D \gg a.$$

Інакше кажучи, дебаївська довжина повинна бути набагато більшою за відстань між сусідніми частинками. Тільки тоді в області екранування міститься багато частинок і екранування може бути колективним. Отже, «велика» дебаївська сфера означає велике *число частинок* у ній, а не просто велике значення λ_D.

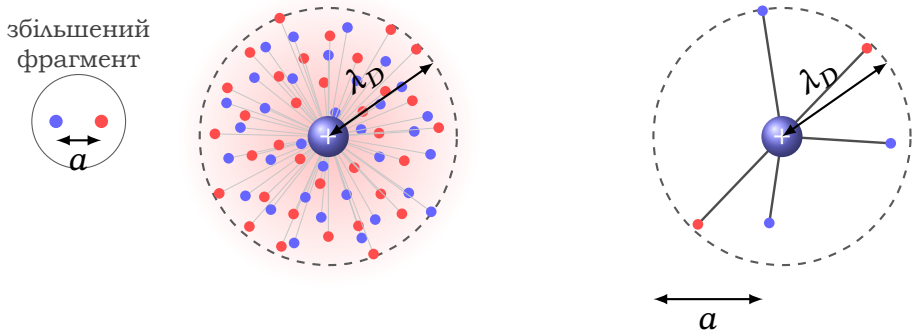
! ***Тут інтуїція часто працює навпаки.*** *Здається: «багато частинок у сфері — вони сильно взаємодіють і постійно б'ються одна об одну; а коли сфера майже порожня, поле згасло і частинки вільні». Насправді все навпаки.*

Багато частинок у сфері ⇒ кожен окремий сусід діє слабко. *Дебаївська сфера велика саме тому, що плазма гаряча і (або) розріджена ($\lambda_{De}^2 = T/4\pi ne^2$), а це ті самі умови, за яких сусіди далеко, а їхня потенціальна енергія e^2/a набагато менша за теплову T (тобто $\Gamma \ll 1$, див. (1.14)). Поштовх від одного сусіда крихітний; сила на частинку — сума сотень таких крихітних внесків, що згладжуються в спільне поле. Сильне «стукання» плюса об мінус вимагає зближення до відстані $e^2/T \ll a$, а це трапляється рідко. Тому ідеальна плазма — не плазма без дальніх сил, а газ майже вільних частинок у гладкому полі всіх інших; парні зіткнення й кореляції дають лише малі поправки $\sim 1/N_D$.*

Мало частинок у сфері ($N_D \lesssim 1$) ⇒ сусід діє сильно: *хмари немає, поле сусіда на відстані a голе кулонівське, $e^2/a \gtrsim T$ (§ 1.6).*

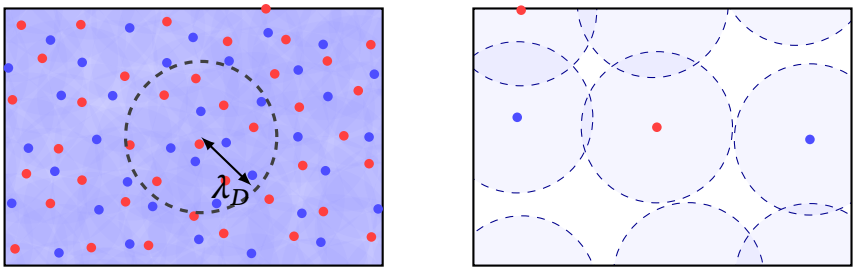
Геометрично це видно так (рис. 1.5). Коли $\lambda_D \gg a$, дебаївські сфери сусідніх частинок сильно *перекриваються*: у кожній точці одночасно «чують» одна одну сотні частинок, тому поле в ній є гладким усередненим результатом багатьох слабких внесків — це і є колективна поведінка. Будь-яка точка плазми лежить одразу в N_D сферах (стільки частинок міститься на відстані λ_D від неї). Тож за $N_D \gg 1$ сфери зливаються в одне суцільне середовище з єдиним узгодженим полем (рис. 1.6 а). Самі «сфери» при цьому не є предметами.

Екранувальна хмара несе заряд $-e$, тобто надлишок лише *однієї* частинки протилежного знака серед N_D, тоді як число частинок у сфері випадково коливається на $\sim\sqrt{N_D}\gg 1$. На миттєвому знімку хмари не видно: вона існує лише в середньому, як слабка перевага протилежних зарядів біля цього. Кожна частинка водночас належить N_D чужим хмарам і вносить у кожну лише $\sim 1/N_D$. Коли ж $\lambda_D \lesssim a$, сфери окремі, і домінують парні взаємодії (рис. 1.6 б) — це область сильного зв'язку (§ 1.6).



(а) $\lambda_D \gg a$ **(б)** $\lambda_D \sim a$

Рис. 1.5. Одна й та сама дебаївська сфера (штрихове коло радіуса λ_D), схематично, за різного числа частинок у ній: (а) багато — поле в центрі є сумою багатьох слабких внесків (тонкі лінії), сфери сусідів перекриваються; (б) лише кілька — переважають парні взаємодії з найближчими сусідами (товсті лінії). Червоні й сині точки — частинки протилежних знаків



(а) $\lambda_D \gg a$ **(б)** $\lambda_D \lesssim a$

Рис. 1.6. Об'єм плазми, заповнений дебаївськими сферами одного й того самого радіуса λ_D (схематично): (а) сфер багато і вони густо перекриваються — у кожній точці $N_D \gg 1$ сфер, плазма поводиться як суцільне колективне середовище; (б) сфери не перекриваються — частинки взаємодіють насамперед парами

§ 1.6. Слабкозв'язана та сильнозв'язана плазма

Є ще один спосіб оцінити, наскільки важливою є кулонівська взаємодія між сусідніми частинками. Порівняємо потенціальну енергію їхньої взаємодії

$$U_C \sim \frac{e^2}{a}$$

з характерною енергією теплового руху

$$U_T \sim T.$$

Їхнє відношення називають *параметром зв'язку*:

$$\Gamma = \frac{U_C}{U_T} = \frac{e^2}{a\,T}, \qquad a = n^{-1/3}. \tag{1.13}$$

Таким чином, Γ безпосередньо показує, наскільки сильна кулонівська взаємодія порівняно з тепловим рухом.

При

$$\Gamma \ll 1$$

теплова енергія значно більша за кулонівську. Частинки взаємодіють слабко, а плазму називають *слабкозв'язаною*. У цьому режимі

$$N_D \gg 1,$$

і екранування має колективний характер.

Навпаки, при

$$\Gamma \gtrsim 1$$

кулонівська взаємодія між сусідніми частинками стає порівнянною з тепловою або перевищує її. Частинки рухаються вже не як майже незалежні частинки, а їхній рух суттєво корельований. Таку систему називають *сильнозв'язаною*.

Для нашого визначення $a = n^{-1/3}$ зв'язок між Γ та N_D отримується безпосередньо з формули для дебаївської довжини. Справді, $T = e^2 n^{1/3}/\Gamma$, тож $\lambda_{De}^2 = T/(4\pi n e^2) = 1/(4\pi n^{2/3}\Gamma)$ і $N_D = \frac{4\pi}{3} n\lambda_{De}^3 = \frac{4\pi}{3}(4\pi)^{-3/2}\Gamma^{-3/2}$, тобто

$$N_D = \frac{1}{6\sqrt{\pi}}\,\Gamma^{-3/2}. \tag{1.14}$$

Тому

$$\Gamma \ll 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad N_D \gg 1.$$

Тобто Γ і N_D відповідають за дві різні проблеми. Ближня: сусід на відстані $a < \lambda_D$ діє голим полем e^2/a, екранування його не послаблює — слабкість дає лише $\Gamma \ll 1$. Дальня: кулонівський внесок далеких зарядів розбігався б, і його обрізає на λ_D спільна хмара N_D частинок. Еквівалентність означає, що обидві проблеми зникають одночасно.

Те саме через відношення довжин: $\lambda_{De}^2/a^2 = Ta/4\pi e^2 = 1/4\pi\Gamma$, тобто $\lambda_{De}/a = (4\pi\Gamma)^{-1/2}$. За $\Gamma \ll 1$ дебаївська довжина набагато більша за a і справді є довжиною екранування. За $\Gamma \gtrsim 1$ формула дає $\lambda_{De} \lesssim a$, і дебаївське екранування (колективне, експоненційне) там не працює. Заряд, як і раніше, оточений зарядом протилежного знака, сумарно $-q$, але це вже не плавна хмара з сотень частинок, а шар найближчих сусідів на відстані $\sim a$ (як перша оболонка сусідів у рідині); λ_D тут лишається лише мірною лінійкою.

Числові множники тут важливі. У (1.14) стоїть малий коефіцієнт: $1/(6\sqrt{\pi}) \approx 0{,}09$, тому $N_D \approx 0{,}09\,\Gamma^{-3/2}$. Підставимо кілька значень: $\Gamma = 0{,}01$ дає $N_D \approx 90$ (тобто близько сотні), $\Gamma = 0{,}07$ дає лише $N_D \approx 5$, а $\Gamma = 1$ дає $N_D \approx 0{,}1$. Отже, щоб у дебаївській сфері справді було багато частинок ($N_D \gtrsim 100$), потрібно не просто $\Gamma < 1$, а $\Gamma \lesssim 0{,}01$. Саме так на практиці слід читати знак «$\ll$» у умові $\Gamma \ll 1$.

Ядро Сонця: межа ідеальної плазми. Ядро Сонця: $\Gamma \approx 0{,}07$, тобто формально $\Gamma < 1$, але $N_D \approx 5$: у дебаївській сфері лише кілька частинок. Це все ще плазма (речовина повністю іонізована і квазінейтральна), проте колективний опис там працює лише наближено: поправки мають порядок $1/N_D \sim 0{,}2$.

Тому Сонце лежить на межі застосовності теорії ідеальної плазми, а не глибоко всередині неї. Умова $N_D \gtrsim 100$ каже, коли ця теорія *точна*, а не коли речовина *є* плазмою.

Для слабкозв'язаної плазми, крім того, справедливе наближення ідеального газу (поправка Дебая–Хюккеля: потенціал оболонки в точці самої частинки відрізняється від кулонівського на $-q/\lambda_D$, тож кореляційна енергія $W_{\text{кор}} \approx -e^2/2\lambda_D$ на частинку, а відносно $|W_{\text{кор}}|/T \sim e^2/(\lambda_D T) \sim 1/N_D \ll 1$; вона дає лише малу поправку до тиску):

$$p \simeq \sum_s n_s T_s. \tag{1.15}$$

Нарешті, умова колективності сама по собі ще не гарантує квазінейтральності всієї системи: для цього потрібна ще умова (1.10), $\lambda_D \ll L$. Тоді на макроскопічних масштабах, значно більших за λ_D, зарядові неоднорідності швидко згладжуються і $n_e \simeq Zn_i$.

Отже, маємо три різні умови з різним фізичним змістом:

1. $N_D \gg 1$ — колективність екранування;

2. $\lambda_D \ll L$ — квазінейтральність на масштабі системи;
3. $\omega_p \tau \gg 1$ — плазма поводиться як плазма, а не як нейтральний газ: за час $1/\omega_p$ плазма встигає колективно відповісти на збурення, а заряджена частинка — не зіткнутися з нейтральним атомом (τ — середній час між зіткненнями заряджених частинок з нейтральними атомами). У слабко іонізованому газі з частими зіткненнями з нейтральними атомами ця умова порушується, і газ веде себе як звичайний, хоч $N_D \gg 1$. Докладніше — в розд. 2.

Саме ці властивості дають змогу розглядати плазму як колективне квазінейтральне середовище.

Приклад: чи є плазмою полум'я?. Перевіримо три умови для полум'я гасової лампи (рис. 7).

Чи є полум'я плазмою. Візьмемо $T \approx 2000$ K ($\approx 0{,}17$ еВ) і концентрацію електронів у вуглеводневому полум'ї $n_e \sim 10^{10}$ см$^{-3}$ (значення залежить від палива). Атомів і молекул за тиску 1 атм та $T = 2000$ K маємо $n = p/(k_B T) \approx 3{,}6 \times 10^{18}$ см$^{-3}$, тож ступінь іонізації $\alpha = n_e/n \sim 3 \times 10^{-9}$. Дебаївська довжина $\lambda_{De} \approx 743\sqrt{T/n_e} \approx 3 \times 10^{-3}$ см (тут T в еВ, n_e в см$^{-3}$), число частинок у дебаївській сфері $N_D \approx 1{,}2 \times 10^3$, а розмір полум'я $\ell \sim 10$ см, тобто $\lambda_{De} \ll \ell$. Плазмова частота $\omega_p \approx 5{,}6 \times 10^4 \sqrt{n_e} \approx 6 \times 10^9$ с$^{-1}$, а частота зіткнень електрона з нейтралами $\nu \sim n\sigma v \sim 10^{11}$ с$^{-1}$ (для перерізу $\sigma \sim 10^{-15}$ см^2 і швидкості $v \sim 3 \times 10^7$ см/с).

Перші дві умови, $N_D \gg 1$ і $\lambda_{De} \ll \ell$, виконано: заряди екранують одне одного на відстані, значно меншій за розмір полум'я. Тому воно справді трохи проводить струм і реагує на електричне поле. Але третю умову порушено: $\nu \gg \omega_p$, тобто $\omega_p \tau \sim 0{,}06 \ll 1$. Електрон стикається з нейтралом набагато частіше, ніж встигає здійснити плазмове коливання, тож колективні процеси придушені. Отже, полум'я — слабоіонізований газ, який лише частково виявляє властивості плазми (провідність, реакцію на поле), але не колективну поведінку. Його структуру, температуру й світіння визначають хімічні реакції горіння: ланцюгові реакції радикалів, дифузія та теплопровідність у реагуючій суміші, розжарені частинки сажі. Заряджені частинки тут — побічний продукт реакцій (хемоіонізація) і на енергетику майже не впливають. Тому полум'я належить до предмета теорії горіння (фізики реагуючих газів), а не фізики плазми; плазмові методи, наприклад зонд Ленгмюра, застосовують до нього лише для вимірювання самих зарядів. Для контрасту іоносфера ($n_e \sim 10^5$ см$^{-3}$, $T \approx 0{,}1$ еВ): $\lambda_{De} \approx 0{,}7$ см, $N_D \approx 2 \times 10^5$, $\omega_p \approx 1{,}8 \times 10^7$ с$^{-1}$, а частота зіткнень електронів порядку 10^3 с$^{-1}$, тож усі три умови виконано із запасом. Перевірити ці умови для довільних n і T можна в інтерактивній мапі плазм.

§ 1.7. Екранування у виродженому газі: довжина Томаса–Фермі

Виведення дебаївського екранування спирається не на закон Больцмана як такий, а лише на чутливість концентрації електронів до потенціалу. Нехай електрони перебувають у рівновазі з хімічним потенціалом μ (нерухомий іонний фон). У потенціалі φ електрон має додаткову енергію $-e\varphi$, тому рівновага вимагає, щоб локальна величина $\mu_{\text{лок}}(n) - e\varphi$ була сталою. Звідси зміна концентрації $\delta n = (\partial n/\partial \mu)\, e\varphi$, густина заряду $\rho = -e\,\delta n$, і рівняння Пуассона набуває вигляду $\Delta\varphi = \varphi/\lambda^2$ з

$$\frac{1}{\lambda^2} = 4\pi e^2 \frac{\partial n}{\partial \mu}. \tag{1.16}$$

Для невиродженого газу $n \propto e^{\mu/T}$, $\partial n/\partial\mu = n/T$, і одержуємо λ_{De}. Для виродженого електронного газу металу ($T \ll E_F$) $n \propto \mu^{3/2}$, тобто $\partial n/\partial\mu = 3n/2E_F$, і

$$\lambda_{TF} = \sqrt{\frac{E_F}{6\pi n e^2}} \approx 0{,}5\sqrt{a_B\, n^{-1/3}}, \qquad a_B = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}53 \times 10^{-8}\ \text{см}, \tag{1.17}$$

де використано $E_F = (\hbar^2/2m)(3\pi^2 n)^{2/3}$. Тобто в квантовій плазмі металу тепловий масштаб T замінюється енергією Фермі, а екранування визначається середньою відстанню між електронами.

Довжина Томаса–Фермі для міді. Для міді ($n \approx 8{,}5 \times 10^{22}$ см$^{-3}$, $E_F \approx 7$ еВ) $\lambda_{TF} \approx 0{,}55 \times 10^{-8}$ см: заряд провідника зосереджений у шарі завтовшки з частку міжатомної відстані.

Це й пояснює, чому в електростатиці так добре працює наближення «заряд розподілений по поверхні». Тут важлива не стільки сама оцінка λ_{TF}, скільки ідея: *масштаб екранування визначається властивостями розподілу частинок*, а не самим фактом наявності заряду. Для плазми це не екзотика: у щільних астрофізичних об'єктах (білі карлики, ядра планет) електрони вироджені, і для статичного екранування замість λ_{De} працює λ_{TF} (якщо іони нерухомі; за рухомих іонів повна довжина екранування визначається меншою з двох — λ_{TF} і іонною λ_{Di}).

§ 1.8. Шар біля стінки і зонд Ленгмюра

Як виміряти концентрацію й температуру електронів усередині плазми? Найпростіше внести в неї маленький електрод — *зонд* — і подати на нього напругу відносно стінки камери. Тоді в колі «зонд — плазма — стінка» потече струм, який вимірюють амперметром (рис. 1.9).

Змінюючи напругу, знімають залежність струму від неї. Але електрод заряджається, і плазма на це реагує: біля нього утворюється шар об'ємного заряду. Щоб зрозуміти, що саме показує зонд, спершу з'ясуємо, як влаштований такий шар.

Заряджена поверхня: шар екранування. Нехай півпростір $x > 0$ заповнено плазмою з електронів і однозарядних іонів (концентрація вдалині n, $T_e = T_i = T$), а на межі $x = 0$ розташована площина з поверхневою густиною заряду $\sigma > 0$. Електрони притягаються до неї, іони відштовхуються, і біля поверхні виникає шар екрануючого заряду (рис. 1.7). Його заряд компенсує σ, а товщина має порядок λ_D. При $|e\varphi| \ll T$ це вже знайома лінійна теорія: $\varphi = \varphi_0 e^{-x/\lambda_D}$, $\varphi_0 = 4\pi\sigma\lambda_D$. Але біля стінок і зондів потенціал може бути більшим за T/e, і ця формула перестає працювати. Що тоді з шаром? Точно задачу можна розв'язати для плоскої поверхні. Зонд, щоправда, зазвичай циліндричний чи сферичний, але для нього плоске наближення цілком доречне: шар тонкий, його товщина порядку λ_D, а розмір зонда $r_p \gg \lambda_D$ (ця умова знадобиться нижче). На масштабі шару поверхня майже плоска, як Земля для людини, що йде по ній, тож кривизною можна знехтувати. Для тонких зондів із $r_p \lesssim \lambda_D$ геометрія вже істотна, і цей розділ їх не охоплює.

За Больцманом $n^{\pm} = n\exp(\mp e\varphi/T)$, тому густина заряду $\rho = e(n^+ - n^-) = -2ne\sinh(e\varphi/T)$, а рівняння Пуассона дає ($E = -d\varphi/dx$)

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho = -8\pi ne\sinh\frac{e\varphi}{T}.$$

Множимо обидві частини на $2E$: ліворуч $2E\,E' = (E^2)'$, праворуч $E\,dx = -d\varphi$, тож $d(E^2) = 16\pi ne\sinh(e\varphi/T)\,d\varphi$. Це «інтеграл енергії», як для $\ddot{x} = F(x)$ в механіці (там множать на $2\dot{x}$), з x у ролі часу. Інтегруючи з умовою $E \to 0$ при $\varphi \to 0$ ($x \to \infty$) і користуючись тотожністю $\cosh y - 1 = 2\sinh^2(y/2)$, маємо

$$E^2 = 32\pi nT\sinh^2\frac{e\varphi}{2T}, \qquad -\frac{d\varphi}{dx} = 4\sqrt{2\pi nT}\,\sinh\frac{e\varphi}{2T}$$

(знак такий, що E і φ однакового знаку). Змінні розділяються: з $y = e\varphi/T$ маємо $dy/\sinh(y/2) = -2\,dx/\lambda_D$, а $\int dy/\sinh(y/2) = 2\ln\tanh(y/4)$ (перевірте диференціюванням). Отже (розв'язок Гуї–Чепмена),

$$\tanh\frac{e\varphi}{4T} = \tanh\frac{e\varphi_0}{4T}\,e^{-x/\lambda_D}, \qquad \lambda_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi ne^2}}, \tag{1.18}$$

де $\varphi_0 = \varphi(0)$, а λ_D збігається з дебаївською довжиною (1.9) (обидва сорти, $T_e = T_i = T$, тобто $\lambda_D = \lambda_{De}/\sqrt{2}$). Зв'язок φ_0 з σ дає теорема Гаусса:

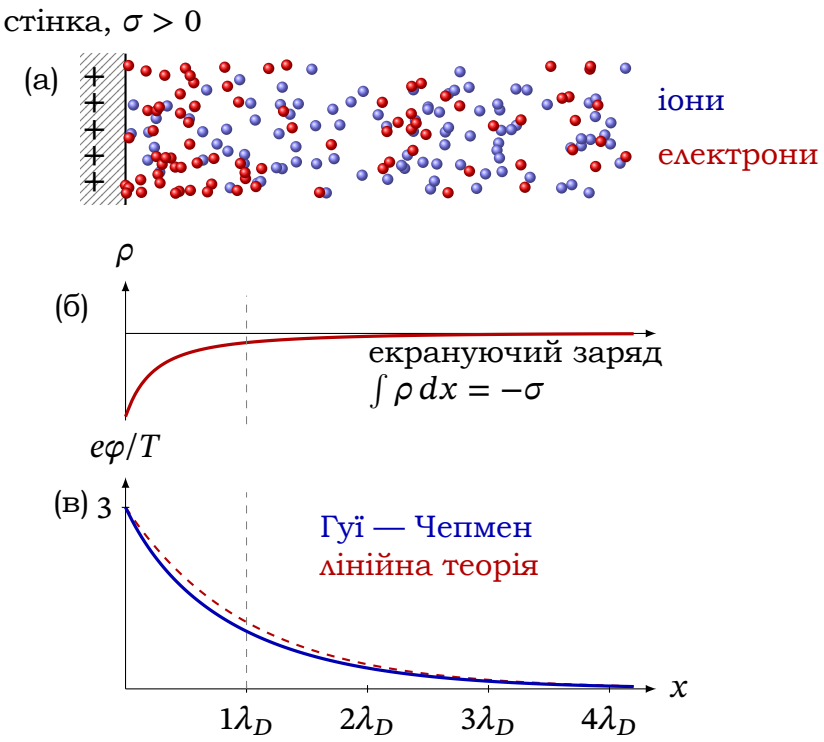


Рис. 1.7. Шар екранування біля площини з додатним зарядом при $e\varphi_0 = 3T$: (а) електрони скупчуються біля поверхні, іони відштовхуються; (б) густина заряду шару; (в) потенціал: точний розв'язок Гуї–Чепмена (1.18) і лінійна теорія $\varphi_0 e^{-x/\lambda_D}$. Усі три панелі мають спільну вісь x; шар має товщину порядку λ_D

екрануючий заряд компенсує σ, поза площиною поля немає, тому $E(0) = 4\pi\sigma$ і

$$\sinh\frac{e\varphi_0}{2T} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2nT}}.$$

При $e\varphi_0 \ll T$ повертаємося до лінійної теорії. При $e\varphi_0 \gg T$ потенціал біля поверхні росте лише логарифмічно, $\varphi \approx (2T/e)\ln(2\lambda_D/x)$ при $x \ll \lambda_D$, а далеко від неї спадає як e^{-x/λ_D}, але з амплітудою $(4T/e)\tanh(e\varphi_0/4T) < \varphi_0$ (потенціал «насичується»). Тож сильне поле змінює *форму* профілю: від λ_D лишається лише далекий хвіст. Ефективна товщина шару (положення центра ваги екрануючого заряду)

$$\frac{\varphi_0}{E(0)} = \lambda_D\,\frac{y_0}{2\sinh(y_0/2)}, \qquad y_0 = \frac{e\varphi_0}{T},$$

за $y_0 \gg 1$ спадає майже експоненційно, а ємність шару зростає як $\cosh(y_0/2)$. Товщина порядку λ_D зберігається лише для $e\varphi_0 \lesssim T$.

Шар біля поглинальної стінки. Розв'язок Гуї–Чепмена описує рівновагу з Больцмановим розподілом *обох* сортів. Біля стінки (або зонда), що поглинає частинки, ситуація інша. Розгляньмо по кроках (рис. 1.8).

1. Електрони значно швидші за іони ($v_{Te}/v_{Ti} \sim \sqrt{m_i/m_e}$), тож спочатку на стінку потрапляє більше електронів, і вона заряджається негативно відносно плазми.
2. Негативна стінка відштовхує електрони від прилеглої області плазми завтовшки $\sim \lambda_D$. Іони там лишаються, тож $n_i > n_e$: біля стінки, але *всередині плазми*, виникає шар додатного просторового заряду. Він екранує заряд стінки (як шар електронів на рис. 1.7 екранував заряд площини), тож за межами шару плазма знову квазінейтральна.
3. Поле між шаром і стінкою напрямлене до стінки, тобто потенціал падає до неї. Це поле відштовхує електрони назад у плазму й прискорює іони до стінки.

Від цього шару залежать струм на зонд і потоки частинок та енергії на будь-яку поверхню в плазмі[1]. Далі з'ясуємо кількісно: з якою швидкістю іони входять у шар (критерій Бома), якого потенціалу набуває стінка (плаваючий потенціал) і скільки енергії вона отримує.

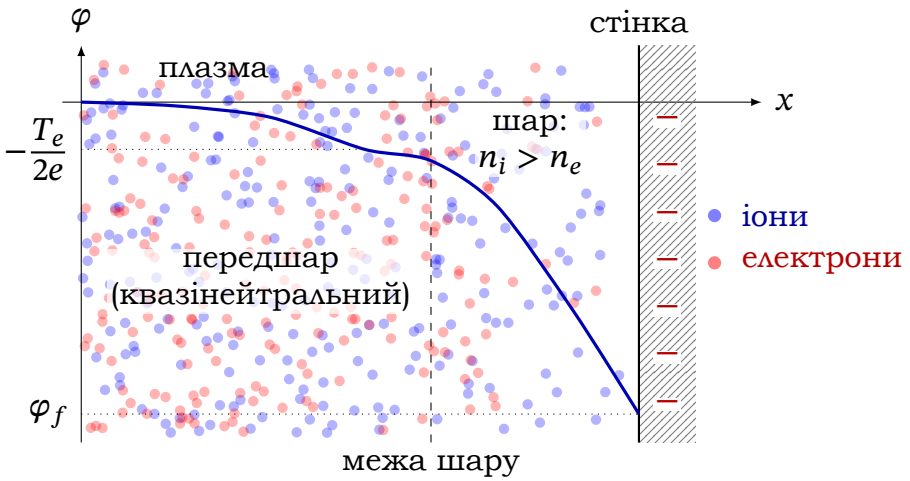


Рис. 1.8. Профіль потенціалу біля поглинальної стінки: квазінейтральний передшар, де іони набирають швидкість $\gtrsim c_s$, і дебаївський шар, у якому $n_i > n_e$. На фоні схематично показано іони й електрони: біля стінки електронів помітно менше; знаки «−» позначають негативний заряд стінки

Критерій Бома. Іони мають увійти в шар зі швидкістю не меншою за *іонно-звукову* (чому саме так її називають, з'ясуємо в § 6.2):

$$u_0 \geq c_s, \qquad c_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} \quad (T_i \ll T_e,\ Z = 1). \tag{1.19}$$

[1] У термоядерному реакторі ці потоки визначають нагрів і розпилення *першої стінки* — внутрішньої стінки камери, що першою зустрічається з плазмою.

Це *критерій Бома* [7]. Чому саме так? Шар існує, лише якщо в ньому $n_i > n_e$, тобто коли до стінки густина іонів спадає *повільніше* за густину електронів. Порівняймо, як вони спадають, коли потенціал падає до стінки.

- Електрони розподілені за Больцманом, $n_e \propto \exp(e\varphi/T_e)$: їхня густина падає з фіксованою швидкістю, яка не залежить ні від чого, окрім T_e.
- Іони прискорюються полем, і за збереження потоку $n_i u = \text{const}$ їхня густина теж падає. Але що повільніше іон входить у шар, то сильніше те саме поле змінює його швидкість, а отже, то швидше падає n_i.

Якщо $u_0 < c_s$, густина іонів падає швидше за електронну, виходить $n_i < n_e$, тобто негативний заряд, і шар існувати не може — суперечність. Межа настає при $u_0 = c_s$, коли швидкості падіння збігаються. Кількісний вивід (лінеаризація рівняння Пуассона біля межі шару) пропонуємо провести самостійно в задачі 1.11.

Де іони набирають швидкість. Іони прискорюються в квазінейтральному *передшарі*: там $n_i = n_e$ з високою точністю, але потенціал усе ж повільно спадає на масштабі $L_{\text{ps}} \gg \lambda_D$ (довжина пробігу або розмір плазми). Для $u_0 = c_s$ іони набирають $\frac{1}{2}m_i u_0^2 = \frac{1}{2}T_e$, тож падіння потенціалу в передшарі $\approx T_e/2e$, а електрони за Больцманом дають $n_{\text{sh}} = n_0 \exp(-1/2) \approx 0{,}61\, n_0$ (n_0 — концентрація в незбуреній плазмі). Це оцінка, а не строге виведення: реальний перепад залежить від того, як іони народжуються й гальмуються в передшарі, і не менший за $T_e/2e$.

Плаваючий потенціал. Ізольований зонд (чи стінка) набуває потенціалу φ_f відносно плазми, за якого сумарний струм дорівнює нулю. Тепер потенціал відлічуємо від незбуреної плазми (а не від межі шару), тож перепад $T_e/2e$ передшару входить у φ_f. Потік іонів на стінку $\Gamma_i = n_{\text{sh}} c_s = n_0 \exp(-1/2)\, c_s$. Електрони розподілені за Больцманом у всьому перепаді від плазми до стінки, тому до стінки доходить потік $\Gamma_e = \frac{1}{4} n_0 \bar{v}_e \exp(e\varphi_f/T_e)$, де $\bar{v}_e = \sqrt{8T_e/\pi m_e}$ (однобічний потік $\frac{1}{4}n\bar{v}$ відомий з молекулярної фізики). Прирівнюючи, маємо

$$\varphi_f = -\frac{T_e}{2e}\left(\ln\frac{m_i}{2\pi m_e} + 1\right), \tag{1.20}$$

що для водню дає $\varphi_f \approx -3{,}3\, T_e/e$, для дейтерію — $\approx -3{,}7\, T_e/e$.

Товщина шару і потік енергії на стінку. З перепаду φ_f приблизно $T_e/2e$ припадає на передшар, решта ($\approx 2{,}8\, T_e/e$ для водню) — на дебаївський шар. Якщо вважати, що в шарі є лише іони, які падають у потенціалі (закон Чайлда–Ленгмюра, $\varphi \propto x^{4/3}$; задача 1.12; [7]), то товщина шару для водню становить близько $2\lambda_{De}$. Іон, пройшовши весь перепад, приносить на стінку енергію $|e\varphi_f|$, тобто кілька T_e. Разом

з електронами (кожен, що подолав бар'єр, приносить в середньому $\approx 2T_e$) і початковою тепловою енергією іонів ($\approx 2{,}5T_i$) повний потік енергії на стінку $Q \approx \gamma T_e \Gamma_i$ з множником $\gamma \approx 2 + e|\varphi_f|/T_e + 2{,}5\, T_i/T_e$; для водню за $T_i \sim T_e$ це γ від 7 до 8.

Зонд Ленгмюра: що він вимірює. Нехай зонд — малий електрод площею S і характерним розміром r_p, потенціал якого V відраховують від опорного електрода (наприклад, заземленої камери). Потенціал самої плазми щодо опорного електрода позначимо V_p, плаваючий потенціал зонда — V_f; тоді $\varphi_f = V_f - V_p < 0$ — та сама величина, що в формулі (1.20). Змінюючи V, вимірюють струм I у колі зонда [7, 5]. З плазми на зонд потрапляють і електрони, і іони, але по дроту й через амперметр течуть лише електрони: електрон, що досяг зонда, іде далі по дроту, а іон, що досяг зонда, забирає з його поверхні електрон і нейтралізується, тобто в дроті це потік електронів у протилежний бік. Тому амперметр показує різницю двох потоків: електронний струм з плазми на зонд вважаємо додатним, а іонний — від'ємним. Вольт-амперна характеристика (ВАХ; рис. 1.10) має три ділянки, і кожна дає свою величину (табл. 1.1). Отже, обробка ВАХ іде в такому порядку:

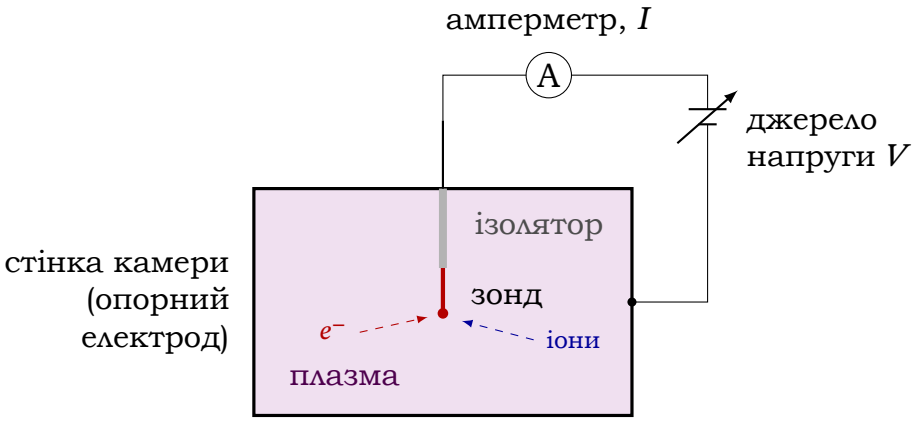


Рис. 1.9. Схема вимірювання одиночним зондом: напруга V від джерела прикладена між зондом і стінкою камери (опорним електродом), амперметр вимірює струм I у колі зонд — плазма — стінка. Ізолятор залишає відкритим лише кінчик зонда

за нахилом $\ln(I + I_{is})$ знаходять T_e; зі зламу характеристики — V_p; далі за відомим T_e обчислюють $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ і з I_{is} одержують n_0 (а I_{es} дає незалежну перевірку). Так з'являються локальні параметри плазми T_e, V_p і n_0, яких не знайти іншими простими методами.

Числова оцінка. Водень, $T_e = 3$ еВ, $n = 10^{10}$ см$^{-3}$: $c_s \approx 1{,}7 \times 10^6$ см/с; $I_{is}/S \approx 0{,}6\, enc_s \approx 1{,}6$ мА/см^2; $I_{es}/S = \frac{1}{4} en\bar{v}_e \approx 46$ мА/см^2; $\varphi_f \approx -3{,}3\, T_e/e \approx -10$ В.

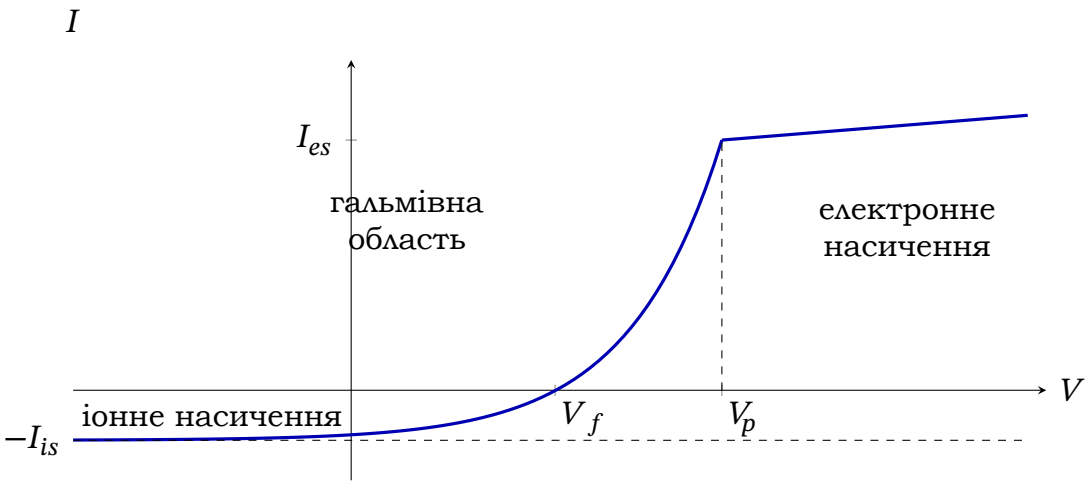


Рис. 1.10. Вольт-амперна характеристика одиночного зонда Ленгмюра (V_p — потенціал плазми, V_f — плаваючий потенціал)

Подвійний зонд і межі застосовності. Одиночний зонд потребує опорного електрода, що торкається плазми, а розряд з високочастотними коливаннями потенціалу спотворює характеристику. Цього уникають *подвійним зондом* — двома однаковими електродами, між якими прикладено напругу V, а вся система плаває (рис. 1.11): стінка камери в колі не бере участі. Що тече в один електрод, те витікає з іншого. Нехай електроди мають потенціали V_1, V_2 відносно плазми, $V = V_1 - V_2$. Кожен збирає іонний струм насичення I_{is} і електронний $I_{ek} \propto \exp(eV_k/T_e)$, тож $I = I_{e1} - I_{is} = -(I_{e2} - I_{is})$. Звідси $I_{e1} + I_{e2} = 2I_{is}$ і $I_{e1}/I_{e2} = \exp(eV/T_e)$, підстановка дає

$$I = I_{is}\,\frac{\exp(eV/T_e)-1}{\exp(eV/T_e)+1} = I_{is}\tanh\frac{eV}{2T_e}\,, \qquad T_e = \frac{e\,I_{is}}{2\,(dI/dV)_{V=0}}\,. \tag{1.21}$$

Струм не перевищує I_{is}, тому збурення плазми мале; T_e дає нахил у нулі (рис. 1.12).

Зонд працює лише тоді, коли він не руйнує плазму, яку вимірює:

- розмір зонда значно більший за товщину шару, $r_p \gg \lambda_D$ (тоді струм збирається з площі S), але значно менший за довжину вільного пробігу λ_{fp} (розд. 4), інакше струм визначається зіткненнями, а не шаром;
- у магнітному полі потрібно $r_{Le} \gtrsim r_p$, де r_{Le} — ларморівський радіус електрона (формула (3.1) у розд. 3); практично

$$r_{Le} \approx \frac{2{,}4\sqrt{T_e[\text{еВ}]}}{B[\text{Гс}]}\ \text{см}.$$

Якщо $r_{Le} \ll r_p$, електрони потрапляють на зонд лише вздовж силових ліній, збір струму *анізотропний* і формули цього розділу не працюють;

Таблиця 1.1. Ділянки вольт-амперної характеристики зонда Ленгмюра.

Ділянка	Що відбувається	Що отримуємо
$V \ll V_f$: іонне насичення	до зонда йдуть лише іони; їхній потік фіксує критерій Бома: $I_{is} \approx 0{,}6\, e\, n_0 c_s S$ ($0{,}6 \approx e^{-1/2}$ з передшару)	n_0 (при відомому T_e)
$V_f < V < V_p$: гальмівна область	електрони гальмуються; долітають ті, чия енергія перевищує $e(V_p - V)$, їхня частка $\exp[-e(V_p - V)/T_e]$, тож $I_e \propto \exp\big(e(V - V_p)/T_e\big)$	T_e з нахилу: $d \ln I_e / dV = e/T_e$ (беруть $\ln(I + I_{is})$)
$V \geq V_p$: електронне насичення	зонд збирає весь тепловий потік електронів: $I_{es} = \frac{1}{4} e n_0 \bar{v}_e S$	V_p (злам характеристики); перевірка n_0

- у гарячій плазмі ($T_e \gtrsim 50$ еВ) зонд перегрівається, тому в токамаках його використовують лише на периферії; за наявності швидких електронів нахил $\ln I(V)$ зменшується за великих гальмівних потенціалів $e(V_p - V) \gg T_e$, і T_e виходить завищеною.

Інтерактивна симуляція. Зняти ВАХ одиночного й подвійного зонда на віртуальному стенді, підібрати вікно апроксимації й знайти T_e, V_p і n для невідомої плазми можна в **віртуальній лабораторній**. Там видно, як гарячий хвіст завищує T_e і чому подвійний зонд не дає V_p.

Головне в розділі

- Плазма — квазінейтральний частково чи повністю іонізований газ із колективною поведінкою заряджених частинок.
- За формулою Саха газ помітно іонізується вже за $T \ll I$: вільний електрон має величезний фазовий об'єм, і виграш ентропії компенсує больцманівський множник $e^{-I/T}$.
- Електрони й іони можуть мати різні температури ($T_e \gg T_i$ у розрядах), бо при зіткненні електрон віддає іону лише частку $\sim m_e/m_i$ енергії.
- Порушена нейтральність відновлюється коливаннями з плазмовою частотою $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_e e^2/m_e}$; за час ω_{pe}^{-1} тепловий електрон проходить $\lambda_{De} = v_{Te}/\omega_{pe}$.
- Дебаївська довжина λ_D — масштаб екранування заряду; на відстанях $L \gg \lambda_D$ плазма квазінейтральна.
- Колективність потребує великого числа частинок у дебаївській сфері, $N_D \gg 1$; це те саме, що слабка зв'язаність $\Gamma \ll 1$ ($N_D \approx 0{,}09\,\Gamma^{-3/2}$).
- Плазма — це ще й $\lambda_D \ll L$ (квазінейтральність на масштабі системи)

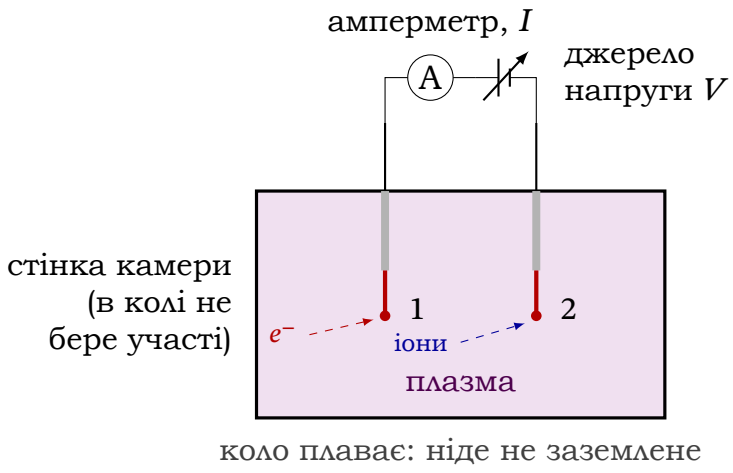


Рис. 1.11. Схема подвійного зонда: два однакові електроди з'єднані через амперметр і джерело напруги V; коло ніде не заземлене, тож струм замикається лише через плазму між електродами

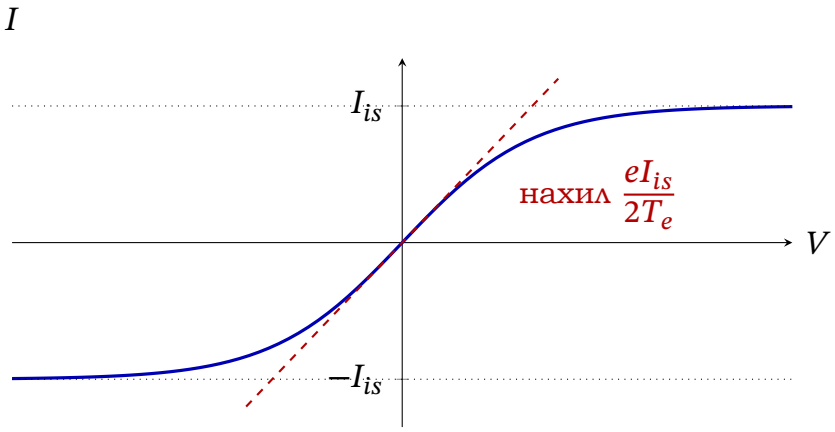


Рис. 1.12. Характеристика подвійного зонда (1.21): симетрична, насичується на $\pm I_{is}$; нахил у нулі дає T_e

та $\omega_p\tau \gg 1$ (немає домінування зіткнень з нейтральними атомами).

- У виродженому газі (метали) тепловий масштаб T замінюється енергією Фермі: екранування задає довжина Томаса–Фермі.
- Біля поглинальної стінки іони входять у шар об'ємного заряду зі швидкістю $u \geq c_s$ (критерій Бома); на цьому ґрунтується зонд Ленгмюра.

Задачі

1.1. ★☆☆ Виразіть температуру поверхні Сонця ($T \approx 5800$ K) в електронвольтах, ергах і джоулях.

1.2. ★★☆ За формулою Саха знайдіть ступінь іонізації водню з повною концентрацією 10^{17} см$^{-3}$ при $T = 1$ еВ і оцініть температуру, при якій $\alpha = 1/2$.

1.3. ★☆☆ Знайдіть плазмову частоту ω_{pe}, частоту $f = \omega_{pe}/2\pi$ та період коливань для $n_e = 10^{10}$ см$^{-3}$. До якого діапазону електромагнітних хвиль належить ця частота?

1.4. ★★☆ Покажіть, що відношення іонного та електронного внесків у ω_p^2 для водневої плазми дорівнює m_e/m_i, і оцініть відносну поправку до плазмової частоти.

1.5. ★☆☆ Оцініть час відновлення квазінейтральності $t_{\mathrm{rel}} \sim \lambda_{De}/v_{Te}$, $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$, для іоносфери та токамака з табл. 2.

1.6. ★★☆ Для плазми з $n = 10^{12}$ см$^{-3}$, $T_e = 3$ еВ, $T_i = 0{,}03$ еВ знайдіть λ_{De}, λ_{Di} і λ_D. Яку довжину екранування слід брати для швидкого й для повільного (порівняно з λ_D/v_{Ti}) процесу?

1.7. ★★☆ Оцініть довжину Томаса–Фермі для міді ($n = 8{,}5 \times 10^{22}$ см$^{-3}$). Порівняйте з міжатомною відстанню та поясніть, у якому сенсі заряд провідника «розподілений по поверхні».

1.8. ★☆☆ Знайдіть дебаївську довжину λ_{De}, число частинок у дебаївській сфері N_D та параметр зв'язку Γ для плазми з $n_e = 10^{12}$ см$^{-3}$, $T_e = 2$ еВ.

1.9. ★☆☆ Для $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T = 10$ еВ знайдіть λ_{De}, a і N_D. Перевірте співвідношення (1.14). Чи виконується умова колективності?

1.10. ★★☆ Плазма з $n = 10^{12}$ см$^{-3}$, $T = 1$ еВ межує із зарядженою площиною (§ 1.8). Знайдіть λ_D і поверхневу густину заряду σ, при якій $e\varphi_0 = T$. Покажіть, що при малих σ маємо $\varphi_0 = 4\pi\sigma\lambda_D$.

1.11. ★★★ Виведіть критерій Бома (1.19). Нехай холодні іони входять у шар (на його межі $\varphi = 0$, концентрація n_{sh}) зі швидкістю u_0 в напрямку стінки, а електрони розподілені за Больцманом.

? (а) Знайдіть $n_i(\varphi)$ і $n_e(\varphi)$. (б) Для малого $\chi = -e\varphi/T_e > 0$ запишіть рівняння Пуассона для χ і з'ясуйте, за якої умови його розв'язок монотонний.

? **1.12.** ★★★ Біля стінки, де електрони відштовхнуті, у шарі є лише іони (закон Чайлда–Ленгмюра). Іони входять у шар із потоком $\Gamma_i = n_{\text{sh}} c_s$ і малою початковою швидкістю (енергією входу $T_e/2$ грубо нехтуємо), рухаючись у падінні потенціалу $V = -\varphi > 0$ ($V(0) = 0$, $V'(0) = 0$). (а) Виведіть залежність $V(x)$ і покажіть, що $V \propto x^{4/3}$. (б) Оцініть товщину шару для водню, якщо повний перепад у шарі $V_{\text{sh}} \approx 2{,}8\, T_e/e$, і виразіть її через $\lambda_{De} = \sqrt{T_e/4\pi n_{\text{sh}} e^2}$.

? **1.13.** ★★☆ Водневий розряд: $n_{\text{sh}} = 10^{11}$ см$^{-3}$, $T_e = 4$ еВ, $T_i \ll T_e$. Знайдіть мінімальну швидкість іонів на межі шару (критерій Бома), їхню енергію та потік на стінку.

? **1.14.** ★★☆ Зонд Ленгмюра площею $S = 0{,}1$ см^2 у водневій плазмі з $T_e = 3$ еВ реєструє струм іонного насичення 1,6 мА. Знайдіть концентрацію n_0 і плаваючий потенціал відносно плазми.

? **1.15.** ★★☆ Подвійний зонд (формула (1.21)) показує струм насичення 0,5 мА, а нахил характеристики в нулі $dI/dV = 0{,}1$ мА/В. Знайдіть T_e.

? **1.16.** ★★☆ Пристінкова воднева плазма токамака: $n = 10^{13}$ см$^{-3}$, $T_e = 30$ еВ, $T_i \ll T_e$. (а) Оцініть λ_{De} і N_D. (б) Знайдіть плаваючий потенціал стінки відносно плазми за формулою (1.20). (в) Оцініть теплове навантаження на стінку $Q \approx \gamma T_e \Gamma_i$, де $\Gamma_i = n_{\text{sh}} c_s$, $n_{\text{sh}} \approx \exp(-1/2)\, n \approx 0{,}6\, n$ (густина на межі шару), $\gamma \approx 2 + e|\varphi_f|/T_e \approx 5{,}3$ за $T_i \ll T_e$ (оцінка — у тексті § 1.8).

Контрольні питання

1. Чим плазма відрізняється від нейтрального газу? Що означає «колективна» поведінка?
2. Чому газ іонізується помітно при температурі, набагато меншій за енергію іонізації? Що виражає формула Саха?
3. Чому в газовому розряді $T_e \gg T_i$ і що таке двотемпературна плазма?
4. Що таке квазінейтральність? Оцініть, наскільки вона порушується на масштабі L.
5. Звідки береться плазмова частота ω_{pe} і який фізичний зміст ма-

ють ω_{pe}^{-1} та $\lambda_{De} = v_{Te}/\omega_{pe}$?

6. Виведіть дебаївське екранування. Чому потрібен множник e^{-r/λ_D} і чому відкидається зростаючий розв'язок?

7. Як змінюється довжина екранування у виродженому електронному газі? Що таке довжина Томаса–Фермі?

8. Чому в слабкозв'язаній плазмі $N_D \gg 1$? Як зв'язані N_D і Г?

9. За яких умов плазма «колективна»? Назвіть три умови, їхній фізичний зміст і співвідношення між N_D та Г.

10. Як змінюється ефективна товщина дебаївського шару при зростанні потенціалу стінки φ_0 і що від λ_D лишається при $e\varphi_0 \gg T$?

11. Чому іони мають увійти в шар біля стінки зі швидкістю $u \geq c_s$? Звідки береться плаваючий потенціал $\approx -3\,T_e/e$ і що вимірює зонд Ленгмюра?

2 Колективні коливання та хвилі в плазмі

Дебаївська довжина λ_D задає просторовий масштаб колективної відповіді плазми, а плазмова частота ω_p — часовий (§ 1.3). Тут розглянемо колективні збурення, що змінюються і в просторі, і в часі: на масштабах $L \gg \lambda_D$ для них можна вводити гладкі макроскопічні поля та густини. При цьому з'являються два різні класи хвиль: поперечні електромагнітні хвилі та поздовжні електростатичні плазмові хвилі. Їх об'єднує спільне джерело — колективний рух заряджених частинок, але фізика поширення в них різна. Обидва класи можна збудити ззовні (антена, пучок, хвиля), але вони виникають і самі, з теплових флуктуацій, як тихий шум (див. кінець розд. 2.3).

§ 2.1. Діелектрична проникність холодної плазми

Нехай на плазму падає електромагнітна хвиля з частотою ω (рис. 2.1). Знайдемо відповідь плазми на змінне поле. Зробимо чотири припущення, які в типових умовах виконуються.

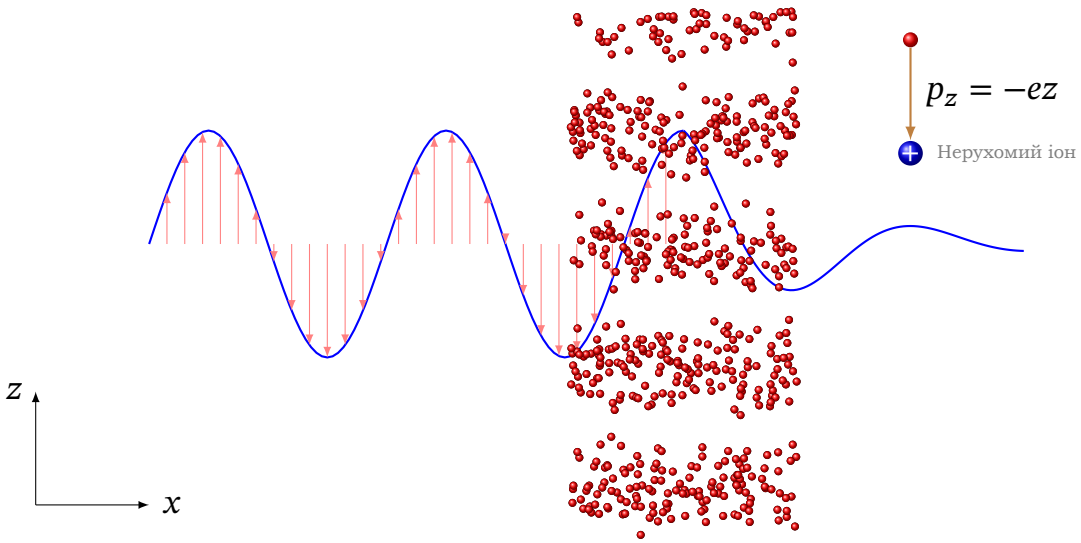


Рис. 2.1. Електромагнітна хвиля, що падає з вакууму на шар плазми

1. Рухаються переважно електрони. Маса іона не менша за $1836\,m_e$, тому струм іонів малий порівняно зі струмом електронів (внесок іонів пропорційний m_e/m_i).
2. Швидкість електронів мала, $v \ll c$, тому силою Лоренца від магнітного поля хвилі ($\sim (v/c)eE$) можна знехтувати.
3. На масштабі руху електронів поле можна вважати однорідним. Для теплового руху це означає $kv_{Te} \ll \omega$: за період коливання електрон проходить відстань v_{Te}/ω, набагато меншу за довжину хвилі, тож він «бачить» однорідне поле й рухається лише під дією $\mathbf{E}$. Амплітуда вимушеного руху також має бути малою, щоб зберігалася лінеаризація.
4. Зіткненнями можна знехтувати на часі одного коливання: $\nu \ll \omega$.

Плазму, для якої ці припущення виконуються, а отже, тепловим рухом частинок можна знехтувати, називають *холодною*. Це не про кельвіни, а про порівняння: плазма з $T \sim 10^6$ К холодна для хвилі, у якої $kv_{Te} \ll \omega$, бо за період електрон не встигає зміститися на помітну частку довжини хвилі (див. також Словник термінів, с. 263).

Рівняння руху електрона $m_e\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}$ має розв'язок

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m_e\omega^2}\mathbf{E},$$

тобто зміщення збігається за напрямом з полем $\mathbf{E}$. Це означає, що воно перебуває в протифазі до сили $-e\mathbf{E}$, яка діє на електрон (так буває при вимушених коливаннях на частоті, вищій за власну; у вільної частинки власна частота нульова). Електрони плазми подібні до зв'язаних зарядів діелектрика, оскільки вони лише коливаються відносно початкового положення. Зміщення створює ефективний дипольний момент електрона $\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = -e^2\mathbf{E}/(m_e\omega^2)$, напрямлений проти поля, а вектор поляризації одиниці об'єму плазми

$$\mathbf{P} = n_e\mathbf{p} = -\frac{n_e e^2}{m_e\omega^2}\mathbf{E} \equiv \chi\mathbf{E}.$$

Оскільки $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E}$, діелектрична проникність $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$:

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi n_e e^2}{m_e\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \tag{2.1}$$

Той самий результат дає опис через струм. Швидкість електрона $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = -i\omega\mathbf{r}$, густина струму $\mathbf{j} = -n_e e\mathbf{v} = i\dfrac{n_e e^2}{m_e\omega}\mathbf{E} \equiv \sigma(\omega)\mathbf{E}$, тому

$$\sigma(\omega) = i\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega}, \qquad \varepsilon = 1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \tag{2.2}$$

Провідність уявна: струм відстає від поля на чверть періоду (дія інерції електронів), тому енергія не поглинається. Формула (2.1) — окремий випадок *моделі Лоренца* — класичної моделі діелектрика, де кожен електрон пружно прив'язаний до свого атома: $m_e\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} - m_e\omega_0^2\mathbf{r}$, а ω_0 — власна частота такого осцилятора. Та сама підстановка $\mathbf{r} \propto e^{-i\omega t}$ дає $\varepsilon = 1 + 4\pi n_e e^2/[m_e(\omega_0^2 - \omega^2)]$. У плазмі електрони *вільні*, повертаючої сили немає, тобто $\omega_0 = 0$, і одержуємо (2.1).

Результат якісно відрізняється від електростатики діелектриків: тут $\varepsilon < 1$, а при $\omega < \omega_p$ взагалі $\varepsilon < 0$. Звернімо увагу ще на одне. Статичне екранування (розд. 1) теж можна записати мовою діелектричної проникності: Фур'є-образ потенціалу (1.8) дорівнює $\varphi_k = 4\pi q/(k^2 + \lambda_D^{-2}) = 4\pi q/(k^2\varepsilon(k))$, де $\varepsilon(0,k) = 1 + 1/(k\lambda_D)^2$. Це не суперечить (2.1): та формула виведена для $\omega \gg kv_{Te}$ (допущення 3), а статичне екранування — протилежна границя $\omega \ll kv_{Te}$, де електрони встигають розподілитися за Больцманом. Тобто статичне поле в плазмі сильно перебудовується через перерозподіл зарядів, а високочастотне поле бачить уже іншу, інерційну відповідь електронів. Це хороший приклад того, що *одне й те саме середовище має різну електричну відповідь на різних часових масштабах*.

§ 2.2. Закон дисперсії. Частота відсікання

Теоретичні відомості Нагадаємо з електродинаміки

З рівнянь Максвелла $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{B}$, $\nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{D}$ (струми вже враховано в $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$) маємо

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2}.$$

Для плоскої хвилі $\mathbf{E} \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}$ оператор $\nabla \to i\mathbf{k}$, $\partial_t \to -i\omega$, тому $\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} \to -\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}) = k^2\mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})$, і

$$(k^2c^2 - \varepsilon\omega^2)\mathbf{E} = c^2\,\mathbf{k}\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}). \tag{2.3}$$

Поперечна хвиля ($\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$): $k^2c^2 = \varepsilon\omega^2$. Поздовжня ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$): ліва частина стає $-\varepsilon\omega^2\mathbf{E}$ після скорочення $k^2c^2\mathbf{E}$ з правою, тобто $\varepsilon\omega^2\mathbf{E} = 0$, а отже $\varepsilon = 0$. Обидва типи хвиль — з однієї формули: поперечна гілка — нуль «знаменника» $k^2c^2 - \varepsilon\omega^2$, поздовжня — $\varepsilon = 0$. Тут *гілка* — окремий розв'язок дисперсійного рівняння, тобто окрема залежність $\omega(k)$ зі своєю поляризацією.

Для плоскої поперечної хвилі $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\exp(ikx - i\omega t)$ ($\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$), отже, $k^2c^2 = \varepsilon\omega^2$. Підставляючи (2.1), одержуємо закон дисперсії

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2} \tag{2.4}$$

(рис. 2.2). Множачи на $\hbar^2$, бачимо, що це релятивістський зв'язок $\mathcal{E}^2 = (\hbar\omega_p)^2 + (\hbar ck)^2$: у плазмі фотон поводиться як частинка з «масою» $\hbar\omega_p/c^2$.

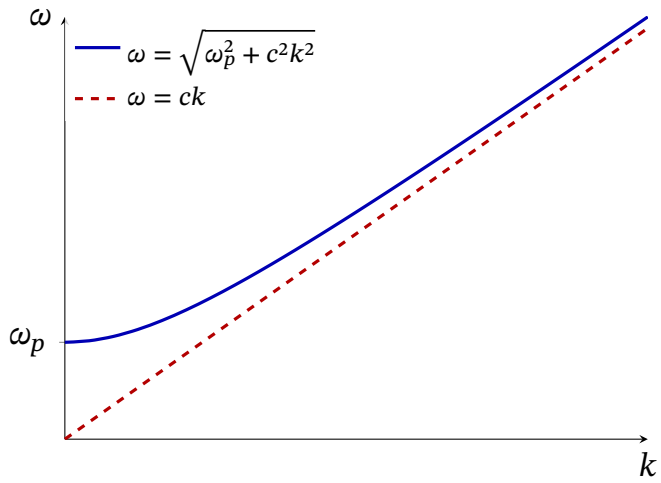


Рис. 2.2. Закон дисперсії поперечної електромагнітної хвилі в холодній плазмі. Частота ω_p — границя поширення в однорідній плазмі

Хвилі з $\omega > \omega_p$ поширюються з довжиною $\lambda = 2\pi c/\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$, а показник заломлення $N = \sqrt{\varepsilon} < 1$ (літеру n лишено для концентрації). Швидкості

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} > c, \qquad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c, \qquad v_{\text{ф}} v_{\text{гр}} = c^2.$$

Фазова швидкість більша за швидкість світла, і це не суперечить теорії відносності, адже переносять енергію й сигнал хвильові пакети з груповою швидкістю $v_{\text{гр}} < c$.

Хвилі з $\omega < \omega_p$. Тоді $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2 < 0$. Покладемо $k = i\varkappa$, $\varkappa = \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}/c$:

$$E = E_0 \exp(-\varkappa x - i\omega t).$$

Поле експоненціально спадає в глибину плазми, а середній потік енергії дорівнює нулю (**E** і **B** зсунуті за фазою на чверть періоду). Глибина проникнення $\delta = 1/\varkappa \approx c/\omega_p$ при $\omega \ll \omega_p$ (*безколізійна скін-довжина*). Для $n_e = 10^{12}$ см$^{-3}$ вона становить $\approx 0{,}5$ см.

Отже, у цій простій моделі однорідної, немагнітної та беззіткнювальної плазми поперечні електромагнітні хвилі поширюються лише за $\omega > \omega_p$. Магнітне поле, градієнти густини та зіткнення змінюють цю картину. Частоту ω_p називають *частотою відсікання* (англ. *cutoff*).

§ 2.3. Поздовжні (ленгмюрівські) хвилі

Те саме рівняння, що дало поперечну гілку, дає й поздовжню (рівняння (2.3)). Запис $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ і рівняння $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ дають $\varepsilon\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$. Є дві можливості: або $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$ (поперечна хвиля, розглянута вище), або $\varepsilon(\omega) = 0$ (поздовжня хвиля, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$). З (2.1) умова $\varepsilon = 0$ дає $\omega = \omega_p$ — це відомі плазмові коливання (§ 1.3). У холодній плазмі їхня частота не залежить від k: кожен електрон повертає лише власне зміщення й сусідів не відчуває. Групова швидкість нульова, і збурення не поширюється.

Ситуація змінюється, якщо врахувати тепловий рух: тиск зв'язує сусідні шари. Розглянемо одновимірні поздовжні хвилі малої амплітуди ($n_e = n_0 + n_1$, $p = p_0 + p_1$, швидкість v, поле E; іони нерухомі). Це *гідродинамічний* опис: електрони розглядаємо як суцільне середовище з густиною, швидкістю й тиском, не стежачи за окремими частинками (систематично — у розд. 5). Потрібні три рівняння: неперервності (електрони не зникають: густина змінюється лише через дивергенцію потоку), руху електронного «флюїду» (сила поля й градієнт тиску прискорюють одиницю об'єму) та Гаусса (поле створює зайвий електронний заряд):

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad m_e n_0\frac{\partial v}{\partial t} = -en_0E - \frac{\partial p_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e n_1.$$

Стискання відбувається вздовж одного напрямку й швидко: за період електрон не встигає вилетіти з області стискання ($kv_{Te} \ll \omega \approx \omega_{pe}$; оскільки $\lambda_{De} = v_{Te}/\omega_{pe}$, це те саме, що $k\lambda_{De} \ll 1$), тому воно адіабатичне. Для одного ступеня свободи показник адіабати $\gamma = (f+2)/f = 3$, тобто $p \propto n^3$, і $p_1 = 3T_e\,n_1$. Виключаючи v і E, одержуємо

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = -\omega_{pe}^2 n_1 + 3v_{Te}^2\frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2v_{Te}^2}. \tag{2.5}$$

Це співвідношення Бома–Гросса. Тепер збурення поширюється з груповою швидкістю $v_{\text{гр}} = 3kv_{Te}^2/\omega \neq 0$. Формула справедлива при $k\lambda_{De} \ll 1$ (ця умова вже використана вище для адіабатичності): ми описували електрони як суцільне середовище з тиском $p_1 = 3T_e n_1$ і не враховували, що швидкості окремих електронів різні. Коли $k\lambda_{De}$ перестає бути малим, таке наближення втрачає точність, і потрібний опис, що враховує розподіл електронів за швидкостями. Зокрема, поблизу резонансу електрони, швидкість яких близька до фазової швидкості хвилі, можуть забирати енергію хвилі навіть за відсутності зіткнень (загасання Ландау, 1946 р.; детально — у розд. 7.8). Сила цього ефекту залежить від форми розподілу та параметра $k\lambda_{De}$; це не просто поріг, після якого будь-яка хвиля миттєво згасає. Цей ефект неможливо

одержати, описуючи електрони як суцільне середовище з тиском: він пов'язаний саме з розподілом електронів за швидкостями. Образ серфінгіста: електрони, трохи повільніші за хвилю, вона підганяє, і вони забирають енергію; трохи швидші — гальмуються й віддають її. У максвеллівському розподілі повільних електронів більше, тому хвиля загасає (резонанс $v_\varphi = \omega/k \sim v_{Te}$ настає при $k\lambda_{De} \sim 1$, коли умова $kv_{Te} \ll \omega$ порушується).

Ці хвилі не обов'язково приходять ззовні. Навіть у плазмі, залишеній саму по собі, густина заряду в кожну мить випадково відхиляється від середнього, бо частинки хаотично переміщуються. Довільне таке відхилення можна розкласти на гармоніки (ряд Фур'є на відрізку довжини L):

$$n_1(x,t) = \sum_k n_k(t)\, e^{ikx}, \qquad k = \frac{2\pi m}{L}, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots,$$

де $n_k = L^{-1}\int n_1 e^{-ikx}\,dx$ — внесок синусоїдної складки густини з періодом $\lambda = 2\pi/k$. Рівняння (2.5) лінійне, тому гармоніки не впливають одна на одну, і кожна коливається зі своєю частотою $\omega(k)$. Довгохвильові складки ($k\lambda_{De} \ll 1$) коливаються на частоті, близькій до ω_{pe}; у коротких ($k\lambda_{De} \gtrsim 1$) електрони розлітаються швидше, ніж поле встигає їх повернути, і колективного коливання нема. Випадковими є лише початкові значення n_k та поштовхи від теплового руху, а не закон $\omega(k)$. Так виникає тихе «дрижання» рівноважної плазми на власних частотах. Приклад такого розкладу — на рис. 2.3: випадкова карта густини заряду в площині й її складові різного масштабу, як карту реліктового випромінювання розкладають на мультиполі.

Це дрижання не є однією лінією на ω_{pe}: частота гармоніки залежить від k (формула Бома–Гросса), а загасання Ландау (розд. 7.8) надає кожному піку скінченну ширину, тож спектр розмитий; у холодній плазмі не було б ні дрижання, ні розмиття. Тепловий рух ці коливання збуджує, а загасання гасить, і вони врівноважують одне одного: рівень шуму стаціонарний, хвилі не наростають (наростання з того самого шуму можливе лише в нерівноважній плазмі, розд. 8.11). Дрижить і електромагнітне поле: випадкові струми електронів збуджують поперечні хвилі, які майже не загасають, бо їхня фазова швидкість перевищує c; це і є теплове випромінювання плазми. Його, як і розсіяння на флуктуаціях густини, використовують для діагностики (розд. 3.8 і 7.10).

§ 2.4. Зіткнення й поглинання електромагнітних хвиль

Досі зіткненнями ми нехтували. Врахуємо їх у найпростішій формі (частоту $\nu \equiv \nu_{ei}$ обчислимо в розд. 4; тут вона — просто параметр):

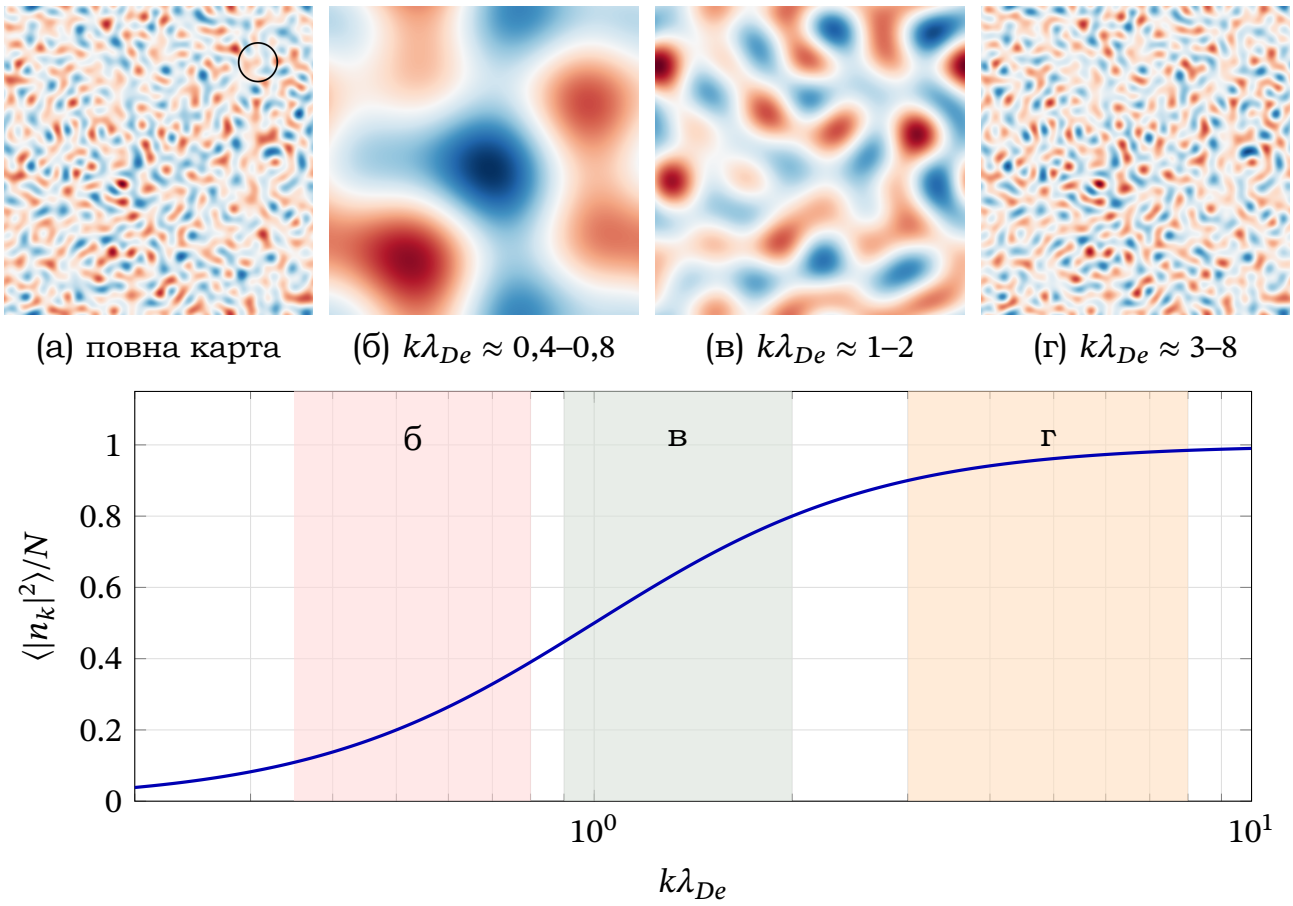


Рис. 2.3. Випадкові флуктуації густини заряду в плазмі без зовнішніх збурень (модель: гауссове поле зі спектром $1/\varepsilon(0,k) = k^2\lambda_{De}^2/(1+k^2\lambda_{De}^2)$; сторона карти $16\lambda_{De}$, коло — радіус λ_{De}; враховано $k\lambda_{De} \le 8$). Карта (а) є сумою всіх гармонік, панелі (б)–(г) — її складові з вибраних діапазонів k (кожну нормовано окремо). Внизу — внесок гармонік у флуктуацію: довгі складки слабші через екранування, а короткі виглядають як білий шум

електрон гальмується силою тертя $-m_e\nu\mathbf{v}$, де ν — ефективна частота зіткнень з іонами та нейтральними атомами. Рівняння руху в полі $\mathbf{E}\,e^{-i\omega t}$

$$m_e\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E} - m_e\nu\mathbf{v} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v} = \frac{-ie\mathbf{E}}{m_e(\omega + i\nu)},$$

звідки провідність $\sigma(\omega) = ie^2 n_e/[m_e(\omega+i\nu)]$ і діелектрична проникність

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+i\nu)}. \tag{2.6}$$

Тепер ε комплексна, отже, і хвильове число $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon}$ має уявну частину: хвиля поглинається. Є дві граничні ситуації.

- $\omega \gg \nu$ (високочастотна границя). Тоді $\operatorname{Im}\varepsilon \approx \omega_p^2\nu/\omega^3$, і амплітуда

спадає як $e^{-\operatorname{Im} k\,x}$ з

$$\operatorname{Im} k \approx \frac{\nu}{2c}\,\frac{\omega_p^2/\omega^2}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}}.$$

Поглинання пропорційне ν і різко зростає поблизу відсікання $\omega \to \omega_p$ (формула годиться, поки $\operatorname{Im}\varepsilon \ll \operatorname{Re}\varepsilon$; там $v_{\text{гр}} \to 0$: хвиля повільна й довше взаємодіє з електронами). Фізично: коливний рух електрона тим сильніше переходить у тепло, чим частіше він зіштовхується (доки $\nu \ll \omega$; при $\nu \gtrsim \omega$ часті зіткнення не дають електрону розігнатися, і поглинання з ростом ν падає — максимум при $\nu \sim \omega$). Цей механізм поглинає радіохвилі в шарі D іоносфери.

- $\omega \ll \nu$ (низькочастотна границя). Електрони рухаються як у постійному полі: $\sigma \to \sigma_0 = \omega_p^2/4\pi\nu$, плазма поводиться як звичайний провідник з товщиною скін-шару $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma_0\omega}$. Оскільки $\nu \propto T^{-3/2}$, провідність $\sigma_0 \propto T^{3/2}$ зростає з нагріванням плазми, а скін-шар, навпаки, стає тоншим: $\delta \propto \sigma_0^{-1/2} \propto T^{-3/4}$.

Отже, *чи є плазма поглинальною, вирішує порівняння ω з ν*, а чи відбивальною — порівняння ω з ω_p. Джоулеве тепло $\langle \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\rangle = \operatorname{Re}\sigma\,|E|^2/2$ використовують для нагрівання плазми НВЧ-полем.

§ 2.5. Відбиття електромагнітних хвиль від плазми

Чому $\varepsilon < 0$ означає відбиття? При $\omega < \omega_p$ електрони встигають зміститися й екранувати зовнішнє поле швидше, ніж воно змінює знак. Струм електронів випромінює хвилю, яка гасить падаючу всередині плазми й утворює відбиту назовні — так само поводиться метал (провідник — «дзеркало» до ω_p). При $\omega > \omega_p$ інерція електронів не дає їм встигнути, і хвиля проходить. Аналогія з механікою: осцилятор, який збуджують нижче резонансу, рухається у фазі з силою, а вище резонансу — у протифазі; для вільних електронів «резонанс» стоїть на нулі, тож відгук завжди в протифазі, а ω_p лише визначає, чи перевищує поляризація за величиною саме поле ($-4\pi\chi > 1$), тобто чи $\varepsilon < 0$.

Нехай на межу плазми ($x > 0$) нормально падає хвиля з вакууму. Амплітудний коефіцієнт відбиття (формули Френеля, $\mu = 1$)

$$r = \frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}.$$

При $\omega < \omega_p$ величина $\sqrt{\varepsilon} = i\varkappa$ чисто уявна, тому

$$R = |r|^2 = \left|\frac{1-i\varkappa}{1+i\varkappa}\right|^2 = 1.$$

При $\omega \gg \omega_p$ показник заломлення наближається до одиниці, $N \to 1$, а коефіцієнт відбиття прямує до нуля, $R \to 0$. Плазма стає прозорою для електромагнітного випромінювання.

Саме тому високочастотне випромінювання, для якого $\omega \gg \omega_p$, може проходити крізь плазму; до такого діапазону, зокрема, належить рентгенівське випромінювання для багатьох плазмових середовищ.

Похиле падіння. При $\omega > \omega_p$ плазма — середовище з дійсним показником заломлення $N = \sqrt{\varepsilon} < 1$, тобто вакуум для хвилі оптично густіший. Тому можливе повне внутрішнє відбиття при $\sin\theta \geq N$. Критичний кут $\sin\theta_{\text{кр}} = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$ прямує до нуля при $\omega \to \omega_p + 0$, і плазма відбиває при будь-якому куті падіння.

Плавна межа. Реальні плазми (іоносфера) мають концентрацію, що повільно зростає з глибиною: $n_e = n_e(x)$ на відстанях порядку довжини хвилі змінюється слабко. Тому можна використати локальне значення хвильового числа

$$k^2(x) = \frac{1}{c^2}\left[\omega^2 - \frac{4\pi e^2}{m_e} n_e(x)\right].$$

При нормальному падінні $k(x)$ перетворюється на нуль, де концентрація досягає *критичного значення*

$$n_{\text{кр}} = \frac{m_e \omega^2}{4\pi e^2} \approx 1{,}24 \times 10^4 \, f^2[\text{МГц}] \ \text{см}^{-3}, \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{2.7}$$

У цій точці («плазмове дзеркало») хвиля повертається назад. Строго кажучи, наближення локального $k(x)$ у самій точці повороту непридатне (потрібне розв'язання рівняння Ейрі), але положення точки воно визначає правильно.

При похилому падінні під кутом θ_0 з вакууму в шарувате середовище зберігається тангенційна складова хвильового вектора, тобто закон Снелліуса $\sqrt{\varepsilon(x)}\sin\theta(x) = \sin\theta_0$. Поворот відбувається там, де $\theta = 90°$:

$$\varepsilon(x_t) = \sin^2\theta_0 \quad \Rightarrow \quad n_e(x_t) = n_{\text{кр}}\cos^2\theta_0.$$

Тому хвилю, що падає похило, плазма відбиває за меншої концентрації: максимальна частота, яку може відбити шар з максимальною концентрацією $n_{\max}$, дорівнює $f_{\max} = f_p(n_{\max})/\cos\theta_0$ («закон секанса»).

§ 2.6. Іоносфера і далекий радіозв'язок

Іоносфера — шар верхньої атмосфери (від висоти ~ 60 км), у якому газ іонізований ультрафіолетовим і рентгенівським випромінюванням Сонця та космічними променями. Ступінь іонізації невелика,

але концентрація електронів (від $\sim 10^4$ см$^{-3}$ в нижніх областях до $\sim 10^6$ см$^{-3}$ у максимумі шару F на висотах 200–400 км вдень) достатня для відбиття радіохвиль. Для $n_e = 10^6$ см$^{-3}$ частота $f_p \approx 9$ МГц, тобто короткі хвилі (декаметрові) відбиваються, а ультракороткі й мікрохвилі проходять крізь іоносферу — тому ними користуються для зв'язку з космічними апаратами.

Відбиття від іоносфери дозволяє приймати радіосигнали за горизонтом (рис. 2.4). Довгі та середні хвилі поводяться інакше: вдень їх поглинає нижній шар D через часті зіткнення електронів з нейтральними молекулами (розд. 4), а вночі шар D зникає, і сигнали відбиваються від вищих шарів. Звідси відомий факт: вночі середньохвильові радіостанції чути значно далі.

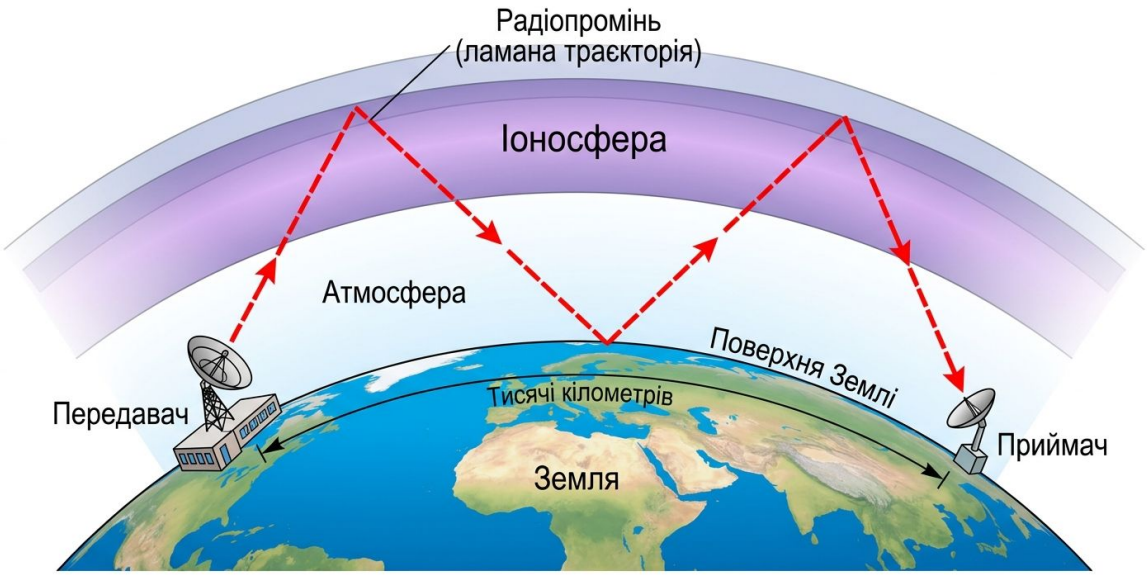


Рис. 2.4. Далекий радіозв'язок завдяки відбиттю від іоносфери

Той самий ефект проявляється в інших ситуаціях. Під час входу космічного апарата в атмосферу навколо нього утворюється плазмова оболонка з концентрацією $n_e \gtrsim 10^{11}$ см$^{-3}$, що за формулою (2.7) відсікає радіозв'язок на частотах нижче кількох гігагерц («радіозатемнення»). Метали мають вільні електрони з $n_e \sim 10^{23}$ см$^{-3}$ і $\hbar\omega_p \sim 10$ еВ (ультрафіолет): вони відбивають видиме світло за тим самим механізмом, що й плазма радіохвилі, а в ультрафіолеті для багатьох металів (наприклад, лужних) стають прозорими.

§ 2.7. Як це вимірюють: інтерферометрія і рефлектометрія

Закон дисперсії $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2$ пов'язує поширення хвилі з концентрацією електронів, тому електромагнітна хвиля сама є зондом

густини плазми. Можливі два режими. Якщо $\omega \gg \omega_p$, хвиля проходить крізь плазму, але набирає додаткову фазу — на цьому працює *інтерферометр*. Якщо частота досягає ω_p, хвиля відбивається від шару відсікання (розд. 2.5) — на цьому працює *рефлектометр*. Обидва методи не вносять у плазму сторонніх тіл (на відміну від зонда Ленгмюра) і тому придатні для гарячої плазми.

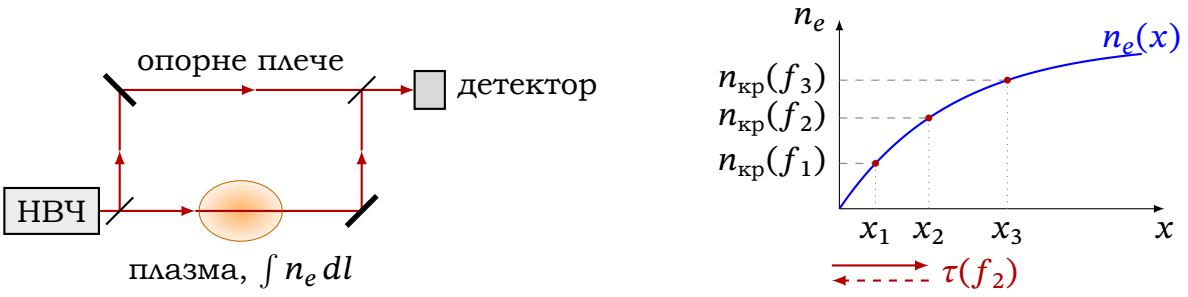
Інтерферометр. Показник заломлення поперечної хвилі $N = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - n_e/n_{\text{кр}}}$, де критична концентрація $n_{\text{кр}}(\omega)$ дається формулою (2.7). Для $n_e \ll n_{\text{кр}}$ маємо $1 - N \approx n_e/2n_{\text{кр}}$, і на хорді крізь плазму хвиля відстає за фазою від хвилі у вакуумі на

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c}\int (1-N)\,dl \approx \frac{\omega}{2cn_{\text{кр}}}\int n_e\,dl = \boxed{r_e\lambda\int n_e\,dl}, \qquad (2.8)$$

де $r_e = e^2/m_ec^2 = 2{,}82\times10^{-13}$ см — класичний радіус електрона. Він з'являється тут природно: $n_{\text{кр}} = \pi/(r_e\lambda^2)$, або в практичних одиницях $n_{\text{кр}} \approx 1{,}1\times10^{15}/\lambda^2[\text{мм}]$ см$^{-3}$.

Набіг фази вимірюють, порівнюючи хвилю, що пройшла плазму, з опорною хвилею, яка йде в обхід (схема Маха–Цендера, рис. 2.5 а). Під час розряду інтенсивність на детекторі проходить через максимуми й мінімуми; кожна «смуга» відповідає $\Delta\varphi = 2\pi$.

Числова оцінка. Для $\lambda = 2$ мм, хорди $L = 1$ м і $n_e = 10^{13}$ см$^{-3}$ маємо $\Delta\varphi = 2{,}82\times10^{-13}\cdot0{,}2\cdot10^{15} \approx 56$ рад, тобто близько 9 смуг. При цьому $n_{\text{кр}}(2\text{ мм}) \approx 2{,}8\times10^{14}$ см$^{-3}$, тож $n_e/n_{\text{кр}} \approx 0{,}04$, і розклад кореня виправданий.



(а) (б)

Рис. 2.5. Мікрохвильова діагностика густини: (а) інтерферометр Маха–Цендера вимірює $\int n_e\,dl$ уздовж хорди; (б) рефлектометр: хвиля частоти f відбивається від шару, де $n_e(x) = n_{\text{кр}}(f)$, і повертається із затримкою $\tau(f)$

Межі застосовності інтерферометра.

- Метод дає не n_e у точці, а *лінійний інтеграл* $\int n_e\,dl$. Щоб відновити профіль $n_e(r)$, вимірюють уздовж кількох хорд і для осесиметричної плазми виконують обернення Абеля.
- Фаза відома з точністю до 2π: смуги треба відстежувати неперервно протягом усього розряду. Швидка зміна густини або втрата сигналу дає «перескок смуги» — похибку на ціле число 2π.
- Вибір λ — компроміс. Корисний сигнал $\Delta\varphi \propto \lambda$, а рефракція (відхилення променя градієнтом густини) зростає як λ^2; поблизу $n_{\text{кр}}$ ще й ламається лінійний зв'язок (2.8). Тому для густої плазми беруть коротші хвилі (субміліметрові й CO_2-лазери, 10,6 мкм). Але тоді вібрації дзеркал на δl дають паразитну фазу $\delta\varphi = 2\pi\,\delta l/\lambda$, і її компенсують другим інтерферометром на іншій довжині хвилі, який «бачить» переважно вібрації.
- У замагніченій плазмі формула (2.8) лишається точною для звичайної хвилі (O-моди, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$), бо її рух уздовж $\mathbf{B}$ не відчуває сили Лоренца (розд. 6.7).

Рефлектометр. Якщо підвищувати частоту зондувальної хвилі, шар відбиття $x_c(f)$, на якому $n_e(x_c) = n_{\text{кр}}(f)$, переміщується вглиб плазми (рис. 2.5 б). Вимірюють фазу відбитої хвилі $\varphi = 2(\omega/c)\int_0^{x_c} N\,dx - \pi/2$ (стрибок $-\pi/2$ дає точка повороту) або, що зручніше, групову затримку

$$\tau(f) = \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{2}{c}\int_0^{x_c} \frac{dx}{N(x)}.$$

Тут використано $d(\omega N)/d\omega = 1/N$ (доданок від залежності межі $x_c(\omega)$ зникає, бо $N(x_c) = 0$), тобто хвильовий пакет рухається з груповою швидкістю $v_g = cN$ і сповільнюється біля шару відбиття. Знаючи $\tau(f)$ на всьому діапазоні частот від нуля до F, положення шару відновлюють оберненням Абеля:

$$\boxed{x_c(F) = \frac{c}{\pi}\int_0^{F} \frac{\tau(f)\,df}{\sqrt{F^2 - f^2}}}.$$

Перевірка: для металевої стінки на відстані d маємо $\tau = 2d/c$ при всіх f, і формула дає $x_c = d$.

Це той самий принцип, за яким працює *іоносонда* (розд. 2.6): вертикальний імпульс у діапазоні 1–20 МГц, а результат — іонограма, залежність «віртуальної висоти» $h' = c\tau/2$ від частоти. Оскільки $N < 1$, віртуальна висота завжди більша за справжню висоту відбиття. У токамаках рефлектометри працюють у діапазоні десятків гігагерц і зондують край плазми.

Межі застосовності рефлектометра:

- профіль має бути монотонним: шар за максимумом густини недосяжний, і область за ним метод не бачить;
- обернення потребує $\tau(f)$ від найнижчих частот, тобто профілю на самому краї, який часто доводиться екстраполювати;
- флуктуації густини розсіюють хвилю біля шару відбиття. Для вимірювання профілю це завада, але її ж використовують, щоб вимірювати турбулентність;
- для незвичайної хвилі (X-моди, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$) частота відсікання залежить ще й від B (розд. 6.7); це ускладнює обробку, зате дозволяє зондувати плазму з боку малої густини.

Отже, обидва методи ґрунтуються на одній формулі $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$: інтерферометр працює далеко від відсікання і вимірює інтеграл густини, рефлектометр працює саме на відсіканні і вимірює положення шарів однакової густини.

Інтерактивна симуляція. Обидва методи можна випробувати у **віртуальній лабораторній**: підібрати довжину хвилі, побачити перескок смуги та вплив вібрацій, зняти $\tau(f)$ і відновити профіль густини невідомої плазми.

Головне в розділі

- Плазмова частота ω_p — частота власних коливань електронів відносно іонів; вона задає часовий масштаб колективного відгуку.
- Діелектрична проникність холодної плазми $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$; поперечні хвилі поширюються лише за $\omega > \omega_p$.
- При $\omega < \omega_p$ хвиля відбивається: так працюють іоносфера й далекий радіозв'язок.
- Поздовжні ленгмюрівські хвилі мають тепловий поправковий член у законі дисперсії; зіткнення призводять до поглинання хвиль.
- Інтерферометр ($\omega \gg \omega_p$) вимірює $\int n_e\, dl$ через набіг фази; рефлектометр використовує відсікання й за груповою затримкою відновлює профіль $n_e(x)$.

Задачі

2.1. ★★☆ Для електронної плазми з температурою T_e оцініть поправку $3k^2 v_{Te}^2$ до квадрата ленгмюрівської частоти. За яких умов ця поправка мала порівняно з ω_{pe}^2?

2.2. ★☆☆ Радіохвиля частоти 1 МГц падає на область плазми з концентрацією $n_e = 10^6$ см$^{-3}$. Чи проникне хвиля в плазму?

? Оцініть глибину проникнення.

? **2.3.** ★★☆ Максимальна концентрація шару F дорівнює 10^6 см$^{-3}$. Яку максимальну частоту хвилі може відбити іоносфера при кутах падіння 0° і 70°? Чому сигнал 100 МГц практично не відбивається?

? **2.4.** ★☆☆ Чи може у вакуумі існувати хвиля $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 e^{i(kx-\omega t)}$? Чому? А в плазмі?

? **2.5.** ★☆☆ Радіохвилі з частотою нижче 400 МГц не проходять крізь шар плазми. Знайдіть його концентрацію.

? **2.6.** ★★☆ Показник заломлення іоносфери для хвилі 10 МГц дорівнює $N = 0{,}90$. Знайдіть n_e, а також фазову й групову швидкості; перевірте, що $v_\varphi v_g = c^2$.

? **2.7.** ★☆☆ Мікрохвильовий інтерферометр працює на довжині хвилі $\lambda = 2$ мм; хорда в плазмі $L = 1$ м, $n = 10^{13}$ см$^{-3}$. Використайте $\Delta\varphi = r_e \lambda \int n\, dl$ ($r_e = 2{,}8 \times 10^{-13}$ см) і знайдіть набіг фази в радіанах і в інтерференційних смугах. Перевірте, що $\omega \gg \omega_p$.

? **2.8.** ★★☆ Для токамака з $n_e = 10^{14}$ см$^{-3}$ і хордою $L = 1$ м порівняйте два інтерферометри: $\lambda = 1$ мм і $\lambda = 10{,}6$ мкм (CO_2-лазер). Для кожного знайдіть $n_{\text{кр}}$, набіг фази $\Delta\varphi$ і паразитну фазу від вібрації дзеркал з амплітудою $\delta l = 10$ мкм. Який із них потребує компенсації вібрацій?

? **2.9.** ★★★ Концентрація лінійно зростає від краю плазми: $n_e = n_0 x/a$. Покажіть, що групова затримка хвилі, яка відбивається від шару x_c, дорівнює $\tau = 4x_c/c$, тобто «віртуальна» глибина вдвічі більша за справжню. Який діапазон концентрацій охоплює рефлектометр із перестроюванням частоти 20–75 ГГц?

Контрольні питання

1. Чому плазма відбиває хвилі з $\omega < \omega_p$ повністю? Що відбувається при $\omega > \omega_p$?
2. Як пояснити далекий радіозв'язок на коротких хвилях? Чому ультракороткі хвилі проходять крізь іоносферу?
3. Чому при поширенні в плазмі з'являється поглинання? Що вирішує: $\omega \gg \nu$ чи $\omega \ll \nu$? Чому поглинання зростає поблизу ω_p?
4. Поясніть фізичну природу плазмових коливань. Чому частота не

залежить від k у холодній плазмі?

5. Як з діелектричної проникності плазми одержати закон дисперсії? Чому $v_\varphi > c$ не порушує теорії відносності?

6. Чому метали блищать, а в вакуумному ультрафіолеті стають прозорими?

7. Що саме вимірює мікрохвильовий інтерферометр: n у точці чи $\int n\,dl$?

8. Чому інтерферометр працює далеко від відсікання, а рефлектометр — саме на ньому?

3 Рух зарядженої частинки в електричному та магнітному полях

Колективний опис не скасовує руху окремих частинок. Щоб зрозуміти магнітне утримання, спочатку треба побачити найпростішу механіку однієї зарядженої частинки. Вона дає природні просторовий і часовий масштаби r_L та ω_c^{-1}, після чого стають зрозумілими дрейфи, магнітне дзеркало і межі застосовності МГД.

§ 3.1. Однорідне магнітне поле

У магнітному полі на частинку з зарядом q діє сила Лоренца $\mathbf{F} = (q/c)\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Вона перпендикулярна швидкості й роботи не виконує, тому v зберігається. Розкладемо швидкість $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$. Складова $v_\parallel$ вздовж поля не змінюється, а перпендикулярна складова обертається по колу (це обертання називають *гірацією*) з *циклотронною частотою* і *ларморівським радіусом*

$$\boxed{\omega_c = \frac{|q|B}{mc}, \qquad r_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{mc\,v_\perp}{|q|B}}. \tag{3.1}$$

Траєкторія — гвинтова лінія (рис. 3.1). Іони й електрони обертаються в протилежні боки: якщо дивитися з кінця вектора $\mathbf{B}$, позитивні частинки обертаються за годинниковою стрілкою, негативні — проти. Частота обертання не залежить від енергії частинки. Для практичних оцінок

$$\omega_{ce} \approx 1{,}76\times10^{7}\,B[\text{Гс}]\ \text{с}^{-1}, \qquad \omega_{ci} \approx 9{,}58\times10^{3}\,\frac{Z}{A}\,B[\text{Гс}]\ \text{с}^{-1},$$

а ларморівські радіуси при $v_\perp = \sqrt{T/m}$: $r_{Le} \approx 2{,}4\sqrt{T_e[\text{еВ}]}/B[\text{Гс}]$ см, $r_{Li} \approx 10^2\sqrt{A\,T_i[\text{еВ}]}/(Z\,B[\text{Гс}])$ см. Через малу масу електрони мають радіус у $\sqrt{m_i/m_e} \sim 40$ разів менший за іонний при однакових температурах.

Числова оцінка. Для токамака ($T = 10$ кеВ, $B = 5\times10^4$ Гс): $r_{Le} \approx 5\times10^{-3}$ см, $r_{Li} \approx 0{,}2$ см (протон), 0,3 см (дейтрон). Для іоносфери ($T \approx 0{,}1$ еВ, $B \approx$

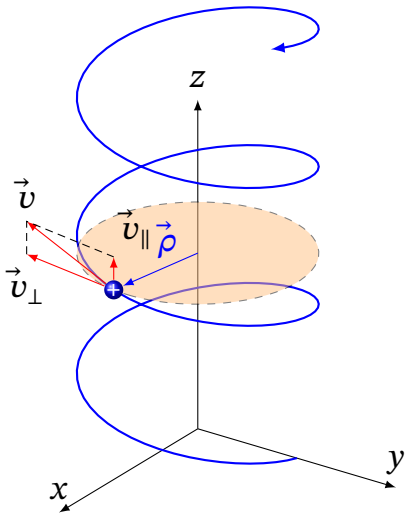


Рис. 3.1. Гвинтовий рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі: уздовж поля — рівномірний, поперек — обертання з частотою ω_c

0,3 Гс): r_{Le} від 2 до 3 см, $r_{Li} \approx 1$ м для протона і ≈ 4 м для O^+ (основний іон F-шару). Тут $r_L = v_T/\omega_c$, $v_T = \sqrt{T/m}$.

Плазму називають *замагніченою*, якщо частинка встигає зробити багато обертів між зіткненнями, $\omega_c \gg \nu$ (частоту зіткнень ν детально розглянуто в розд. 4), і радіус орбіти малий порівняно з розміром неоднорідності поля, $r_L \ll L$. Довжину вільного пробігу означимо як $\lambda_{\text{пр}} = v_T/\nu$. Тоді частинка «прив'язана» до силової лінії, і рух поперек поля пригнічений. Оцінимо перенесення. Вздовж поля частинка блукає з кроком $\lambda_{\text{пр}}$ і $D_\parallel \sim v^2/\nu$; поперек крок дорівнює r_L, а частота кроків — ν, тому $D_\perp \sim r_L^2 \nu$. Звідси

$$\frac{D_\perp}{D_\parallel} \sim \left(\frac{\nu}{\omega_c}\right)^2 \ll 1, \qquad D_\perp \propto \frac{1}{B^2}.$$

Це *класична дифузія* поперек поля. Вона лежить в основі магнітного утримання: сильне поле різко зменшує поперечні втрати.

§ 3.2. Дрейфи в схрещених полях

Дрейфове наближення. Усю тему можна звести до трьох тверджень. (1) Поля зовнішні й сильні, частинки рухаються незалежно. (2) Якщо $r_L \ll L$ і $\omega \ll \omega_c$, рух розпадається на швидке обертання навколо ведучого центру й повільний дрейф самого центру. (3) *Загальне правило*: будь-яка стала сила $\mathbf{F} \perp \mathbf{B}$ викликає дрейф $\mathbf{v}_d = c\,\mathbf{F}\times\mathbf{B}/(qB^2)$. Якщо $\mathbf{F}$ не залежить від заряду (гравітація, відцентрова сила, $-\mu\nabla B$), дрейф має різний знак для електронів та іонів: виникають струм і розділення зарядів. Якщо $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, дрейф однаковий для всіх, і плазма рухається як ціле. Це знімає більшу частину труднощів розділу.

Нехай, окрім $\mathbf{B}$, є однорідне електричне поле $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Шукатимемо рух у вигляді гвинтового руху на фоні дрейфу $\mathbf{v}_d$ із сталою швидкістю. Для швидкості $\mathbf{v}_d$ сила має зникати: $\mathbf{E} + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}/c = 0$. Помножимо векторно на $\mathbf{B}$ і скористаємося $(\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -B^2 \mathbf{v}_{d\perp}$:

$$\boxed{\mathbf{v}_E = c\,\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}}. \tag{3.2}$$

Швидкість дрейфу *не залежить від заряду, маси та енергії частинки*, тому електрони й іони дрейфують в один бік, струму й розділення зарядів нема. Фізичний зміст: у системі відліку, що рухається зі швидкістю $\mathbf{v}_E$, електричного поля немає (нерелятивістське наближення), і частинка просто гвинтом обертається навколо силової лінії.

Чому саме перпендикулярно $\mathbf{E}$. На одному півоберті частинка рухається вздовж $\mathbf{E}$ й прискорюється — радіус орбіти зростає; на іншому — проти $\mathbf{E}$ і гальмується, радіус зменшується. Різниця радіусів зсуває центр орбіти вбік, перпендикулярно $\mathbf{E}$ (траєкторія — трохоїда, а для частинки, що стартує зі спокою, — циклоїда, рис. 3.2). Іон і електрон обертаються в протилежні боки, але й прискорюються полем $\mathbf{E}$ у протилежні боки, тому зсув однаковий: $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ «зносить плазму цілком», без струму.

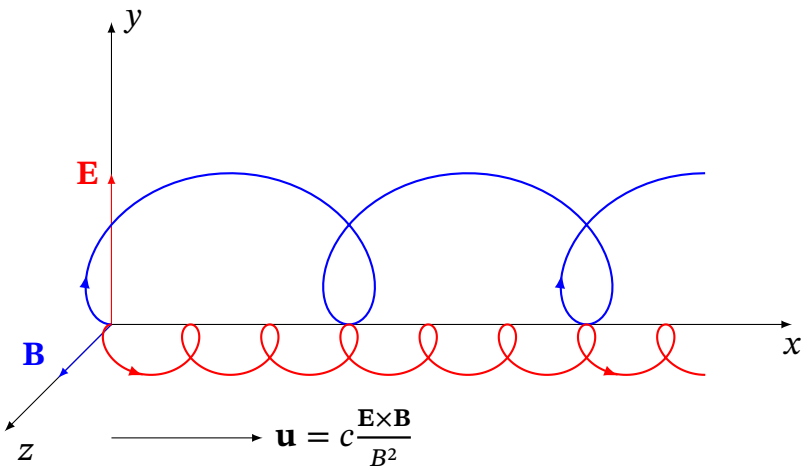


Рис. 3.2. Дрейф зарядженої частинки у схрещених електричному та магнітному полях

Узагальнення: на частинку діє довільна стала сила $\mathbf{F} \perp \mathbf{B}$ (гравітація, відцентрова сила, сила від градієнта тиску). Вона викликає дрейф

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{q}\,\frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{B^2}, \tag{3.3}$$

який уже *залежить від знака заряду*, і призводить до струмів та розділення зарядів. Для $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ маємо (3.2).

У неоднорідному полі діють ефективні сили. Усереднена за обертом сила, що виштовхує частинку в область слабшого поля, дорівнює $-\mu\nabla B$ (див. нижче; μ — магнітний момент орбіти), а при русі вздовж викривленої силової лінії з радіусом кривизни R_c діє відцентрова сила $mv_\parallel^2\mathbf{R}_c/R_c^2$ (вектор $\mathbf{R}_c$ напрямлений від центра кривизни до частинки). За (3.3) вони породжують *градієнтний* та *відцентровий* дрейфи

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{c\mu}{qB^2}\,\mathbf{B}\times\nabla B, \qquad \mathbf{v}_R = \frac{mcv_\parallel^2}{qB^2}\,\frac{\mathbf{R}_c\times\mathbf{B}}{R_c^2}. \tag{3.4}$$

За порядком величини $v_d \sim cT/(|q|BL) = v_T\,r_L/L \ll v_T$. Умова $r_L \ll L$ є умовою застосовності дрейфового наближення, а знак швидкості залежить від знака заряду.

Градієнтний дрейф: чому він виникає. У ділянці сильнішого поля радіус орбіти менший (рис. 3.3). Орбіта складається з двох «півкіл»: у слабшому полі — більшого радіуса r_1, у сильнішому — меншого r_2. Тому вона не замикається: за оберт центр зсувається на $\approx 2(r_1 - r_2)$ у напрямку, перпендикулярному і до ∇B, і до $\mathbf{B}$. Іони й електрони обертаються в протилежні боки, тому зсуваються *в протилежних напрямках*, і виникає струм $\mathbf{j}_{\nabla B} = n\,(q_i\mathbf{v}_{\nabla B,i} + q_e\mathbf{v}_{\nabla B,e}) \neq 0$.

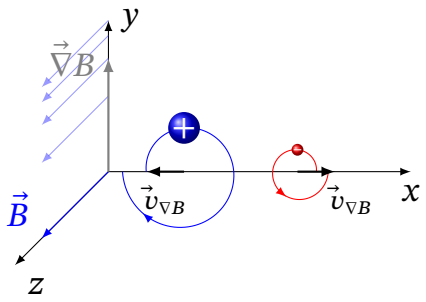


Рис. 3.3. Градієнтний дрейф: радіус орбіти більший там, де поле слабше. Іон (синя траєкторія) і електрон (червона) зсуваються в протилежні боки поперек ∇B

Дрейф кривизни. Частинка, що рухається вздовж викривленої силової лінії, відчуває відцентрову силу $\mathbf{F}_c$ (рис. 3.4), і згідно з (3.3) дрейфує поперек площини кривизни. Знак швидкості залежить від знака заряду.

Сумарний дрейф у вакуумному полі. У вакуумі ($\nabla\times\mathbf{B} = 0$) модуль поля змінюється на масштабі кривизни. Справді, для поля з круговими силовими лініями у циліндричних координатах (R, θ, z) маємо

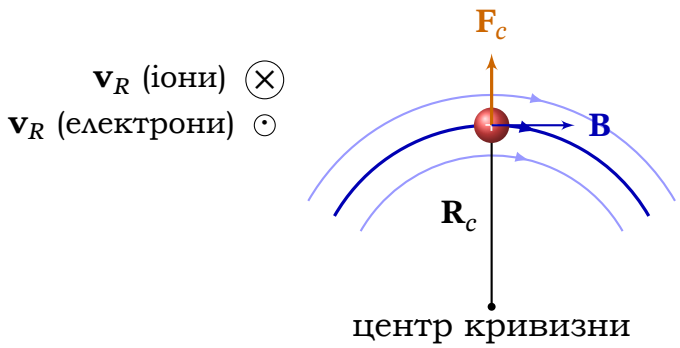


Рис. 3.4. Дрейф кривизни: відцентрова сила $\mathbf{F}_c$ спрямована від центра кривизни, дрейф перпендикулярний і до $\mathbf{B}$, і до $\mathbf{F}_c$; іони й електрони дрейфують у протилежні боки

$(\nabla\times\mathbf{B})_z = \frac{1}{R}\partial_R(RB_\theta) = 0$, тобто $B_\theta = C/R$, і $\nabla B = -\frac{C}{R^2}\hat{\mathbf{R}} = -B\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} = -B\frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2}$ (тут $R_c = R$, а $\mathbf{R}_c$ напрямлений від центра кривизни до частинки). Тоді $\mathbf{B}\times\nabla B = B(\mathbf{R}_c\times\mathbf{B})/R_c^2$, і $\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{mcv_\perp^2}{2qB^2}\frac{\mathbf{R}_c\times\mathbf{B}}{R_c^2}$ має той самий напрям, що й $\mathbf{v}_R$ з (3.4). Обидва дрейфи додаються:

$$\mathbf{v}_d = \frac{mc}{qB^2}\left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2}\right)\frac{\mathbf{R}_c\times\mathbf{B}}{R_c^2}. \tag{3.5}$$

Саме цей вираз визначає дрейф у тороїдальному полі (розд. 9) і в диполі Землі.

Гравітаційний дрейф. Для сили тяжіння $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ з (3.3) одержуємо $\mathbf{v}_g = (mc/qB^2)\,\mathbf{g}\times\mathbf{B}$. Він залежить від знака заряду й маси, а за величиною $v_g = g/\omega_c$, тому в лабораторній плазмі мізерний. В екваторіальній іоносфері (іони O^+, $B\approx 0{,}3$ Гс, $\omega_{ci}\approx 2\times10^2$ с$^{-1}$) $v_g\approx 5$ см/с — цього досить, щоб розвинулась гравітаційна (релей-тейлорівська) нестійкість (розд. 8). У викривленому полі роль $\mathbf{g}$ відіграє відцентрове прискорення $v_\parallel^2/R_c$.

Числова оцінка. Для протона з $T = 10$ кеВ у тороїдальному полі $B = 5\times10^4$ Гс на великому радіусі $R = 6\times10^2$ см середнє значення $v_\parallel^2 + v_\perp^2/2 = 2T/m$, і за (3.5)

$$v_d \approx \frac{2cT}{eBR} \approx 7\times10^4 \text{ см/с}.$$

Це лише 10^{-3} від теплової швидкості ($v_T\sim10^8$ см/с), але в тороїді з малим радіусом $a\sim2\times10^2$ см частинка досягла б стінки менш ніж за 10^{-2} с, якщо б нічого не заважало дрейфу (розд. 9).

Це головна причина, чому чисто тороїдальне поле не утримує плазму. Дрейфи ∇B і кривизни розводять іони вгору, електрони вниз (рис. 3.5); виникає вертикальне електричне поле $\mathbf{E}$, і дрейф $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$

виносить усю плазму *назовні* (у бік більшого R) за час $\sim a/v_E$. Звідси мотивація обертального перетворення: полоїдальне поле (токамак, стеларатор) закорочує розділення зарядів, бо силова лінія переходить від верху до низу (розд. 9).

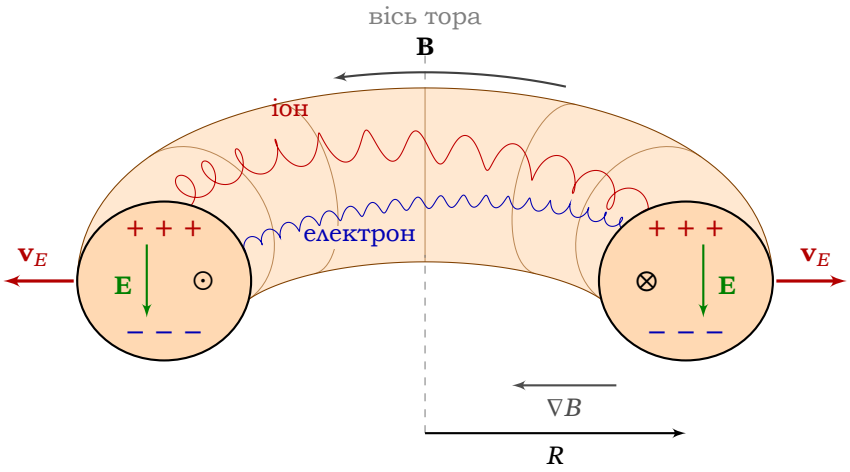


Рис. 3.5. Дрейф у чисто тороїдальному полі (тор розрізано площиною, що проходить через його вісь). Ларморівські гвинти рухаються вздовж $\mathbf{B}$, а ∇B-дрейф і дрейф кривизни зміщують іон вгору, електрон — вниз. На перерізах: розділення зарядів створює поле $\mathbf{E}$, і дрейф $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ виносить плазму назовні

§ 3.3. Поляризаційний дрейф

Дрейф у сталому електричному полі є особливим: електрони та іони рухаються в одному напрямку. Якщо ж електричне поле змінюється з часом, інерція частинки створює додатковий дрейф. Виведемо його ітерацією. У нульовому наближенні $\mathbf{v} = \mathbf{v}_E = c\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$, але $\mathbf{v}_E$ тепер залежить від часу, і прискорення $d\mathbf{v}_E/dt$ вимагає сили. У системі, що рухається з $\mathbf{v}_E$, на частинку діє сила інерції $\mathbf{F} = -m\,d\mathbf{v}_E/dt$; підставляючи її в загальне правило (3.3), отримуємо додатковий дрейф $\mathbf{v}_{\text{pol}} = \dfrac{c}{q}\dfrac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{B^2} = -\dfrac{mc}{qB^2}\dfrac{d\mathbf{v}_E}{dt}\times\mathbf{B}$. Оскільки $d\mathbf{v}_E/dt = c\,(\partial_t\mathbf{E}\times\mathbf{B})/B^2$ і $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} = -B^2\mathbf{A}_\perp$, маємо $\mathbf{v}_{\text{pol}} = \dfrac{mc^2}{qB^2}\,\partial_t\mathbf{E}_\perp$. Для повільно змінного поля $|\partial_t\mathbf{E}| \ll \omega_c E$ (щоб ітерація збігалась) остаточно

$$\boxed{\mathbf{v}_{\text{pol}} = \frac{mc^2}{qB^2}\frac{\partial\mathbf{E}_\perp}{\partial t} = \frac{q}{|q|}\,\frac{c}{\omega_c B}\frac{\partial\mathbf{E}_\perp}{\partial t}.} \tag{3.6}$$

На відміну від $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$-дрейфу, цей дрейф залежить від знака заряду і маси: іони й електрони дрейфують у протилежні боки, тому вини-

кає *поляризаційний струм* $\mathbf{j}_{\text{pol}} = \dfrac{\rho_m c^2}{B^2}\dfrac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t}$ (в ньому домінують іони, бо $\rho_m \approx n m_i$). Фізично: іон «запізнюється» за полем, поки набирає швидкість v_E. Поперек $\mathbf{B}$ плазма поводиться як *діелектрик* з проникністю $\varepsilon_\perp = 1 + 4\pi\rho_m c^2/B^2 \gg 1$; звідси швидкість альфвенівських хвиль $v_A = c/\sqrt{\varepsilon_\perp} \approx B/\sqrt{4\pi\rho_m}$ (розд. 6). Отже, поляризаційний дрейф важливий, коли електричне поле змінюється повільно порівняно з гірообертанням ($\omega \ll \omega_c$), але не є строго сталим.

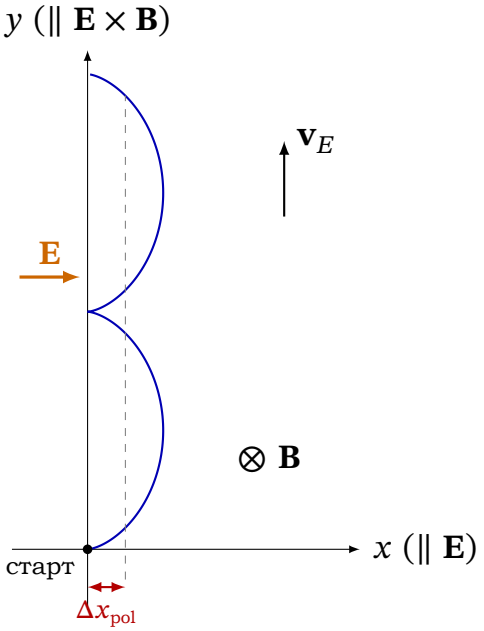


Рис. 3.6. Поляризаційний зсув: іон, що стартує зі спокою в момент вмикання поля $\mathbf{E}$, спершу зміщується вздовж $\mathbf{E}$ на Δx_{pol}, а далі дрейфує зі швидкістю $\mathbf{v}_E$

§ 3.4. Магнітний момент і адіабатичний інваріант

Обертання частинки по колу — це кільцевий струм $I = |q|\omega_c/2\pi$ з площею контуру πr_L^2, тобто магнітний момент (у СГС $\mu = IS/c$)

$$\mu = \frac{|q|\omega_c}{2\pi c}\,\pi r_L^2 = \frac{m v_\perp^2}{2B}. \tag{3.7}$$

Момент орбіти напрямлений *проти* поля для частинок обох знаків (вони обертаються в протилежні боки, але заряди теж протилежні; рис. 3.7). Це джерело діамагнетизму плазми (розд. 9).

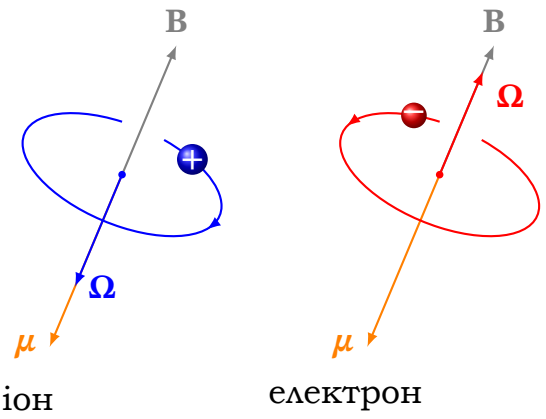


Рис. 3.7. Ларморівське обертання іона й електрона в полі **B**: кутові швидкості $\boldsymbol{\Omega} = -q\mathbf{B}/(mc)$ протилежні, а магнітні моменти $\boldsymbol{\mu}$ обох частинок напрямлені проти **B**

Теоретичні відомості Нагадаємо з теоретичної механіки

Для періодичного руху з повільно змінним параметром $\lambda(t)$ (час зміни $\gg$ період руху) величина $J = \oint p\,dq$ (дія) *адіабатично інваріантна*. Приклад: маятник, нитку якого повільно вкорочують; $J \propto E/\omega = \text{const}$, тож енергія росте разом з частотою. Для ларморівського руху $\oint(m\mathbf{v}+q\mathbf{A}/c)\cdot d\mathbf{l}$ дає $2\pi m v_\perp r_L - \pi r_L^2|q|B/c = \pi m v_\perp r_L = (2\pi mc/|q|)\,\mu$, тому $\mu = \text{const}$. Так само $J_\parallel = \oint p_\parallel\,ds$ зберігається для руху між точками відбиття, а магнітний потік Φ через оболонку дрейфу — для азимутального дрейфу: три інваріанти однієї ідеї.

Якщо поле змінюється повільно (за час обороту $2\pi/\omega_c$ воно змінюється мало; в просторі це означає $r_L \ll L$), величина μ *зберігається*. Це легко побачити, помітивши, що потік поля крізь орбіту $\Phi = \pi r_L^2 B = \pi m^2 c^2 v_\perp^2/(q^2 B) \propto \mu$. При збільшенні B виникає вихрове електричне поле, яке прискорює частинку так, щоб потік крізь орбіту залишився сталим (як у надпровідному кільці; рис. 3.8 б). Інакше кажучи, μ — *адіабатичний інваріант* (строге обґрунтування — збереження дії $\oint p\,dq$, див. вставку вище): його відносна зміна за час повільної зміни поля мала за параметром $\varepsilon \sim r_L/L \sim \omega_c^{-1}/\tau_B$ (де τ_B — час зміни поля), а для аналітичних (гладких) полів вона навіть *експоненціально* мала, $\Delta\mu/\mu \sim e^{-\text{const}/\varepsilon}$ (Крускал). Інваріантність порушується, коли $r_L \sim L$ (наприклад, у нейтральному шарі поля чи біля нульової точки), а також за поля, що змінюється з частотою, близькою до ω_c (циклотронний резонанс).

Статичне магнітне поле не виконує роботи, тому повна кінетична енергія зберігається. З урахуванням $\mu = \text{const}$

$$\frac{mv_\parallel^2}{2} + \mu B = \text{const} \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu\frac{\partial B}{\partial s}, \tag{3.8}$$

де s — координата вздовж силової лінії. У області зростання B поздовжня швидкість зменшується: енергія переходить від поздовжнього руху до поперечного. Результат — сила $-\mu\nabla B$, яка штовхає частинку в бік слабшого поля (рис. 3.8).

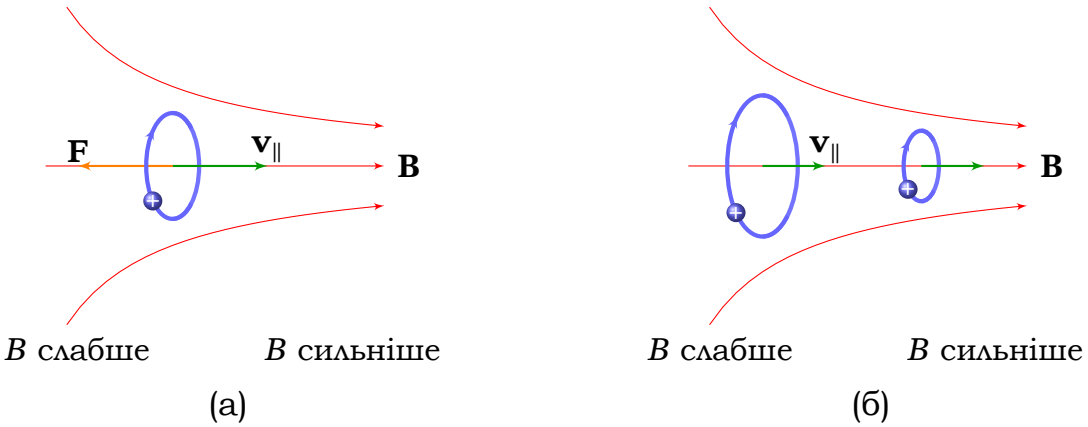


Рис. 3.8. Ларморівське кільце в збіжному магнітному полі: (а) сила $\mathbf{F} = -\mu\nabla B$ напрямлена в бік слабшого поля, проти $\mathbf{v}_\parallel$; (б) потік крізь орбіту зберігається, тому в сильнішому полі кільце менше ($r_L^2 B = \text{const}$)

Вивід сили $-\mu\nabla B$. *Градієнт поперек поля.* Нехай $\mathbf{B} = B(x)\hat{\mathbf{z}}$, $B(x) \approx B_0 + x\,\partial_x B$. Сила Лоренца вздовж x: $F_x = (q/c)\,v_y B(x)$. Для положення відносно ведучого центру $x = x_{gc} + r_L\cos\varphi$ (для $q > 0$ швидкість $v_x = v_\perp \sin\varphi$, $v_y = -v_\perp\cos\varphi$) після усереднення по оберту $\langle v_y\rangle = 0$, $\langle\cos^2\varphi\rangle = \frac{1}{2}$, тому

$$\langle F_x\rangle = \frac{q}{c}\,\partial_x B\,\langle v_y\, r_L\cos\varphi\rangle = -\frac{q\,v_\perp r_L}{2c}\,\partial_x B = -\frac{m v_\perp^2}{2B}\,\partial_x B = -\mu\,\partial_x B$$

(підставлено $r_L = mcv_\perp/qB$; для $q < 0$ одночасно змінюються знак q й напрям обертання, результат той самий).

Градієнт уздовж поля. Вісесиметричне поле з $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$: $\frac{1}{r}\partial_r(rB_r) = -\partial_z B_z \Rightarrow B_r \approx -\frac{r}{2}\,\partial_z B_z$. Поздовжню силу дає азимутальна швидкість $v_\theta = \mp v_\perp$ (для $q \gtrless 0$) на радіусі $r = r_L$: $F_z = -(q/c)\,v_\theta B_r = -\frac{|q|v_\perp r_L}{2c}\,\partial_z B_z = -\mu\,\partial_z B_z$. Разом $\mathbf{F} = -\mu\nabla B$ (збігається з (3.8)).

Діамагнетизм. Ларморівське кільце — це струм, магнітний момент якого напрямлений проти $\mathbf{B}$. Сума моментів кілець дає намагніченість плазми

$$\mathbf{M} = -n\langle\mu\rangle\frac{\mathbf{B}}{B} = -\frac{p_\perp}{B^2}\,\mathbf{B}, \qquad p_\perp = \frac{nm\langle v_\perp^2\rangle}{2},$$

тобто $\chi < 0$: плазма виштовхується з області сильного поля (ідея магнітного утримання Тамма–Сахарова). Застереження: для *однорідної* рівноважної плазми в обмеженому об'ємі макроскопічний струм намагнічення компенсується струмом частинок, що відбиваються від стінки (теорема Бора — ван Левен). Спостережуваний діамагнетизм зумовлений *градієнтом* тиску: струм $\mathbf{j}_M = c\nabla \times \mathbf{M}$ не зникає там, де $p_\perp$ змінюється (розд. 5.8).

§ 3.5. Магнітне дзеркало і конус втрат

Розглянемо магнітне поле, слабше в центрі ($B_{\min}$) та сильніше на кінцях ($B_{\max}$) (рис. 3.10). Нехай у центрі швидкість частинки v утворює з напрямком поля кут θ (*пітч-кут*), $v_\perp = v\sin\theta$. Зі збереження μ та енергії

$$\frac{v_\perp^2}{B} = \text{const}, \qquad v_\parallel^2 + v_\perp^2 = v^2 = \text{const}.$$

Поперечна швидкість росте за законом $v_\perp^2 = v^2 \sin^2\theta\, B/B_{\min}$. Частинка відіб'ється (де $v_\parallel = 0$), якщо $v_\perp^2$ досягне v^2 раніше, ніж частинка досягне області $B_{\max}$, тобто за умови

$$\boxed{\sin^2\theta \geq \frac{B_{\min}}{B_{\max}}}. \tag{3.9}$$

Частинки з малим пітч-кутом ($\sin\theta < \sqrt{B_{\min}/B_{\max}}$) не відбиваються й вилітають з пастки. Область цих кутів у просторі швидкостей називається *конусом втрат*. Для ізотропного розподілу швидкостей частка частинок, що потрапляють в обидва конуси втрат, дорівнює

$$1 - \sqrt{1 - \frac{B_{\min}}{B_{\max}}} \approx \frac{B_{\min}}{2B_{\max}} \quad (B_{\max} \gg B_{\min}),$$

і вона зменшується з ростом пробкового відношення $B_{\max}/B_{\min}$.

Після виходу частинок із конуса в розподілі лишається «порожній» конус: анізотропія стає джерелом кінетичних нестійкостей (розд. 8).

Принципове зауваження: однорідне магнітне поле не «тримає» частинку вздовж силової лінії. Утримання в дзеркалі виникає завдяки неоднорідності поля й збереженню μ. Зіткнення, які розсіюють частинки в конус втрат, і нестійкості призводять до того, що відкриті пастки «протікають» (розд. 9). Природним магнітним дзеркалом є поле Землі (розд. 3.7).

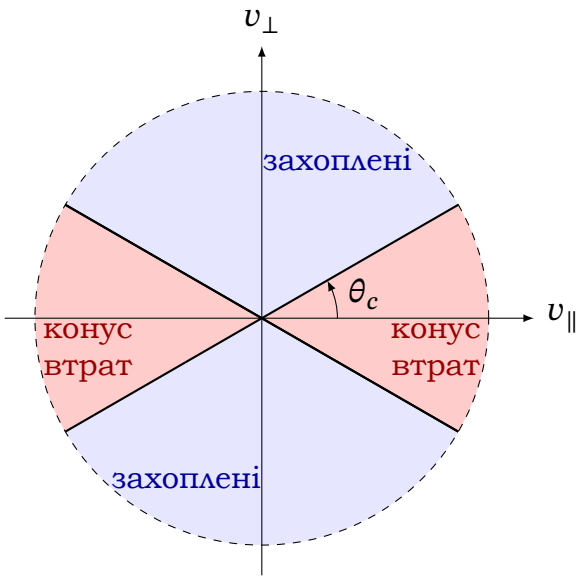


Рис. 3.9. Конус втрат у просторі швидкостей $(v_\parallel, v_\perp)$: частинки в червоних секторах $(\theta < \theta_c)$ залишають пастку

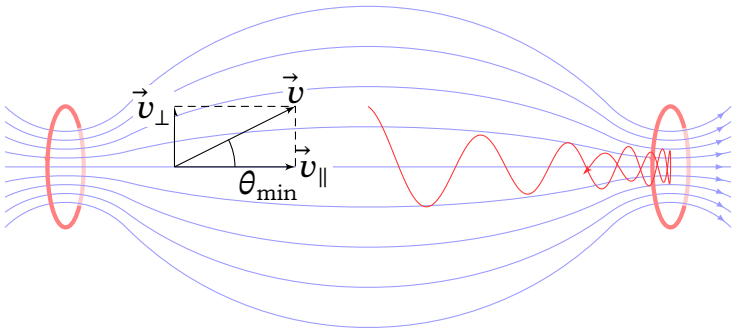


Рис. 3.10. Принцип магнітного дзеркала: у міру зростання B поперечна енергія збільшується за рахунок поздовжньої, і за умови (3.9) частинка відбивається

§ 3.6. Подовжній інваріант

Якщо частинка захоплена між двома точками відбиття s_1 і s_2, вона здійснює періодичні коливання вздовж силової лінії з *частотою відбиття* $\omega_b \sim v_\parallel/L$. Для такого руху існує ще один адіабатичний інваріант — *подовжній*

$$J = \oint m v_\parallel \, ds = 2m \int_{s_1}^{s_2} v_\parallel \, ds = \text{const}, \tag{3.10}$$

який зберігається, якщо поле змінюється за час, значно більший за період відбиття $\tau_b = 2\pi/\omega_b$. Якщо μ пов'язаний з гірацією, то J — з поздовжніми коливаннями. У статичному осесиметричному полі J визначає, які силові лінії (*дрейфова оболонка*) частинка «відвідує» під

час дрейфу: частинка завжди повертається на ту саму оболонку. Інакше кажучи, дрейф навколо осі відбувається по замкненій поверхні сталого J.

Фермі-прискорення. Якщо дзеркала зближуються, довжина L зменшується, і з $J = \oint v_\parallel\, ds \approx 2v_\parallel L = \text{const}$ маємо $v_\parallel \propto 1/L$: частинка прискорюється, поки не потрапить у конус втрат. Це один із механізмів прискорення космічних променів (задача 3.5).

Коли поле змінюється з часом, кожен інваріант зберігається, лише поки частота змін ω мала порівняно з частотою «свого» періодичного руху. Тому першим (уже за $\omega \sim \omega_d$, наприклад під час магнітних бур) порушується третій інваріант — магнітний потік Φ через оболонку дрейфу; за $\omega \gtrsim \omega_b$ порушується J; і лише за $\omega \gtrsim \omega_c$ — найстійкіший інваріант μ.

§ 3.7. Диполь Землі та радіаційні пояси

Поле Землі в першому наближенні — диполь:

$$B = B_0 \left(\frac{R_E}{r}\right)^3 \sqrt{1 + 3\sin^2\lambda},$$

де λ — магнітна широта, $B_0 \approx 0{,}31$ Гс — поле на екваторі біля поверхні. Силова лінія задається рівнянням $r = L R_E \cos^2\lambda$, де параметр L (*оболонка Мак-Ілвайна*) дорівнює відстані до екватора в радіусах Землі. Поле на екваторі силової лінії $B_{\text{eq}} = B_0/L^3$. На силовій лінії воно зростає до полюсів, тому в диполі працює пастка-дзеркало (рис. 3.11).

Рух захоплених частинок складається з трьох рухів з різними часовими масштабами, з якими пов'язано три адіабатичні інваріанти: Ієрархія $\omega_c \gg \omega_b \gg \omega_d$ дозволяє розглядати кожний рух окремо, а отже, визначає глибину адіабатичного наближення. Азимутальний дрейф обумовлений сумою градієнтного й відцентрового дрейфів (3.5); для

Таблиця 3.1. Три рухи захоплених у диполі частинок і відповідні адіабатичні інваріанти.

Рух	**Частота**	**Інваріант**	**Масштаб ($E \sim 1$ МеВ, $L = 4$)**
Гірація	ω_c	μ	$\sim 10^{-4}$ с
Відбиття між полюсами	ω_b	J	$\sim 0{,}3$ с
Азимутальний дрейф	ω_d	потік Φ	$\sim 10^3$ с

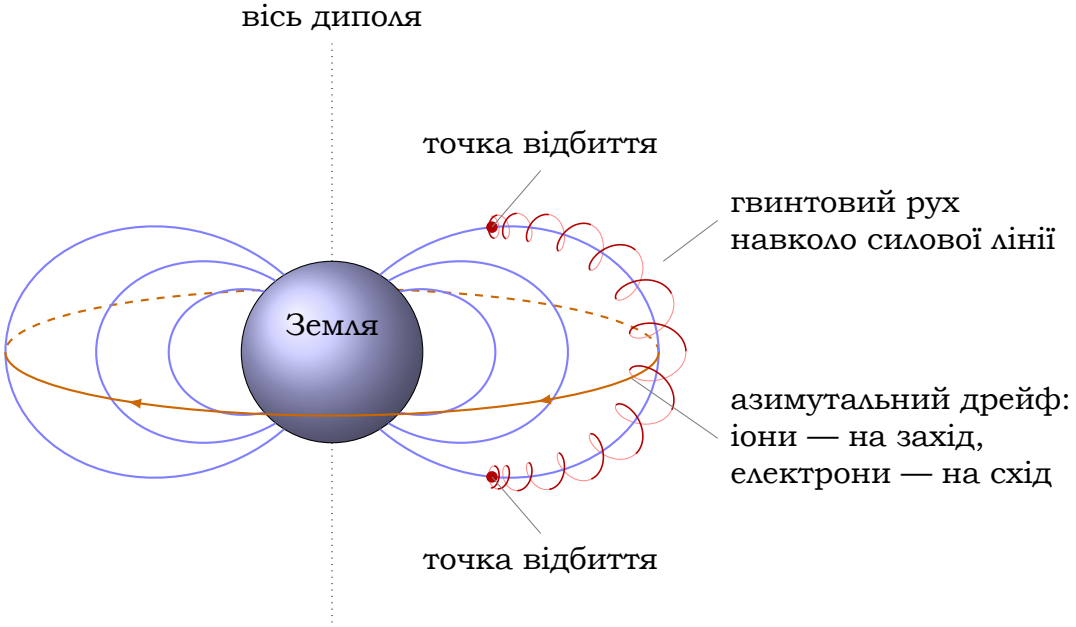


Рис. 3.11. Захоплена частинка в магнітному диполі: гвинтовий рух навколо силової лінії, відбиття між дзеркальними точками й азимутальний дрейф навколо Землі. Ларморівський радіус і крок гвинта зменшуються до точок відбиття; помаранчевий еліпс — дрейфова оболонка в екваторіальній площині (штрихова частина — за Землею)

електрона з поперечною енергією $W_\perp$ на екваторі $v_d \simeq 3cW_\perp/(eB_{\rm eq}r)$ (в диполі $\nabla B/B = 3/r$); електрони дрейфують на схід, а іони — на захід, що створює кільцевий струм навколо Землі. Ця формула справедлива для частинок із пітч-кутом 90° (відбиваються на екваторі); для інших є множник порядку одиниці (усереднення по баунсу).

Числова оцінка. Електрон 30 кеВ на $L = 5$ ($B_{\rm eq} \approx 2{,}5\times10^{-3}$ Гс, $r \approx 3\times10^9$ см): $v_d \approx 1\times10^6$ см/с, період обходу Землі $2\pi r/v_d \sim 2\times10^4$ с (кілька годин). Для протона з енергією 1 еВ $v_d \sim 40$ см/с — дрейфу фактично нема.

Пастка не ідеальна. Частинка, що відбивається в точці з широтою λ_m, має на екваторі пітч-кут, що задовольняє

$$\sin^2\alpha_{\rm eq} = \frac{\cos^6\lambda_m}{\sqrt{1+3\sin^2\lambda_m}}.$$

Якщо точка відбиття лежить нижче $\sim$ 100 км над поверхнею, частинка втрачається в щільній атмосфері. Силова лінія $r = LR_E\cos^2\lambda$ перетинає поверхню при $\cos^2\lambda = 1/L$; точка відбиття лежить під поверхнею, якщо $L\cos^2\lambda_m \le 1$, тобто $\cos^2\lambda_m \le 1/L$ (широта точки відбиття вища за широту виходу лінії з атмосфери). Звідси кут конуса втрат

$$\sin^2\alpha_c = \frac{L^{-3}}{\sqrt{4-3/L}}, \qquad \alpha_c \approx 5^\circ \ (L=4).$$

Існування двох поясів (внутрішнього, протонного, і зовнішнього, електронного), відкритих Дж. Ван Алленом у 1958 р., пов'язано з балансом між захопленням (інжекція під час магнітних бур) і втратами (зіткнення з атмосферою, розсіювання хвилями).

§ 3.8. Як це вимірюють: аналізатор енергій і ECE

Гвинтовий рух у магнітному полі дає два прості способи виміряти розподіл частинок.

Аналізатор із гальмівним потенціалом. Сітка під потенціалом φ пропускає лише іони, для яких $\tfrac{1}{2}Mv_\parallel^2 > Ze\varphi$; колектор за сіткою вимірює струм $I(\varphi) \propto \int_{v_{\min}}^{\infty} v_\parallel f_\parallel \, dv_\parallel$. Для максвеллівського розподілу $I \propto \exp(-Ze\varphi/T_i)$, тож T_i дорівнює оберненому нахилу $\ln I(\varphi)$, а похідна $dI/d\varphi$ відтворює саму $f(v_\parallel)$. Аналізатор вимірює лише швидкості вздовж осі, тому його ставлять уздовж $\mathbf{B}$, щоб відсікти ларморівське обертання.

Електронно-циклотронне випромінювання (англ. *electron cyclotron emission*; далі скорочено *ECE*, латинськими літерами, як у літературі).

Електрон обертається з частотою

$$\boxed{\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e c} \approx 1{,}76 \times 10^7 \, B[\text{Гс}] \ \text{с}^{-1}} \tag{3.11}$$

і випромінює на гармоніках $n\omega_{ce}$. У токамаку $B \propto 1/R$, тож кожна частота виходить з певного радіуса: $R = R_0 \, \omega_{ce}(R_0)/\omega$ (для $n = 1$). Якщо плазма оптично товста на другій гармоніці, інтенсивність дорівнює рівноважній (релеївсько-джинсівській) $I_\omega = \omega^2 T_e/(8\pi^3 c^2)$ (для однієї поляризації), тобто вимір I_ω дає $T_e(R)$ без зовнішнього джерела.

Числова оцінка. При $B = 5$ Тл $= 5 \times 10^4$ Гс: $\omega_{ce} \approx 8{,}8 \times 10^{11}$ с$^{-1}$, $f_{ce} \approx 140$ ГГц, друга гармоніка — 280 ГГц (мм-діапазон).

Межі застосовності: потрібна оптична товщина (високі $n_e T_e$) і відсутність відсічки, $\omega_{pe} < \omega_{ce}$ (пор. розд. 2.7); релятивістський зсув частоти змішує сигнали сусідніх радіусів.

Головне в розділі

- Заряджена частинка в однорідному полі гвинтово рухається: ларморівський радіус r_L і циклотронна частота ω_c залежать від знака заряду лише напрямком обертання.
- Дрейф у схрещених **E** і **B** не залежить від заряду та маси, а градієнтний дрейф і дрейф кривизни залежать від них і розділяють заряди.
- Магнітний момент μ — адіабатичний інваріант: у повільно змінному полі $v_\perp^2/B = \text{const}$.
- Магнітне дзеркало відбиває частинки з великим пітч-кутом; решта потрапляє в конус втрат, тож відкрита пастка «протікає».
- У диполі Землі діють три інваріанти (μ, J, Φ) з ієрархією частот $\omega_c \gg \omega_b \gg \omega_d$.
- Гальмівний аналізатор дає T_i з нахилу $\ln I(\varphi)$, а ECE на частотах $n\omega_{ce}(R)$ ставить у відповідність частоту й радіус і дає $T_e(R)$ (розд. 3.8).

Задачі

3.1. ★☆☆ Електрон з енергією 100 еВ рухається перпендикулярно полю $B = 10^4$ Гс. Знайдіть ларморівський радіус і порівняйте його з λ_{De} для $n_e = 10^{12}$ см$^{-3}$, $T_e = 100$ еВ.

3.2. ★☆☆ У схрещених полях $E = 1$ В/см і $B = 10^3$ Гс (в СГС 1 В/см = 1/300 СГС) знайдіть швидкість дрейфу. Чи залежить вона від того, чи рухається електрон, чи протон?

3.3. ★★★ Електрон з енергією 1 МеВ перебуває на силовій лінії $L = 4$ земного диполя ($B_{\text{eq}} \approx 5 \times 10^{-3}$ Гс на екваторі), пітч-кут на екваторі $\alpha_{\text{eq}} = 30°$. Оцініть: ларморівський радіус, період обертання навколо силової лінії, час відбиття між дзеркальними точками і період дрейфу навколо Землі. Перевірте ієрархію $\omega_c \gg \omega_b \gg \omega_d$.

3.4. ★★★ Плазма з тисками $p_\perp$, $p_\parallel$ перебуває в слабко неоднорідному полі, $\beta \ll 1$ (так що поле близьке до вакуумного). (а) Знайдіть густину струму ∇B- і кривизного дрейфів. (б) Додайте струм намагнічення: густина магнітного моменту $\mathbf{M} = -p_\perp \mathbf{B}/B^2$, $\mathbf{j}_M = c\,\nabla \times \mathbf{M}$. (в) Покажіть, що для ізотропного тиску $p_\perp = p_\parallel = p$ повний поперечний струм дорівнює $\mathbf{j}_\perp = c\,\mathbf{B} \times \nabla p / B^2$ (діамагнітний). *Вказівка:* струм дрейфів сам по собі діамагнітного не дає.

3.5. ★★★ Протон з енергією 1 кеВ і пітч-кутом 45° (у центрі пастки) захоплено між двома магнітними дзеркалами з пробковим відношенням $R_m = 5$, що наближаються одне до одного зі швидкістю 10 км/с кожне (початкова відстань $L = 10^{10}$ км). Використайте інваріантність $J = \oint v_\parallel\, ds$ і пружне відбиття від рухомої стінки: за який час частинка потрапить у конус втрат і якою буде її енергія?

3.6. ★★☆ У магнітній пастці $B_{\min} = 2 \times 10^4$ Гс, $B_{\max} = 8 \times 10^4$ Гс. Знайдіть критичний пітч-кут конуса втрат і частку частинок ізотропного розподілу, що потрапляють у конуси втрат.

3.7. ★☆☆ Для іонного двигуна потрібен дрейф $v_E = 1000$ км/с у полі $B = 1$ Тл. Яке електричне поле для цього потрібне? Виразіть відповідь у СГС (де $B = 10^4$ Гс) і у В/см. Чи залежить результат від сорту іонів?

3.8. ★★☆ Плазмовий стовп радіуса $a = 10$ см у полі $B = 1$ кГс має параболічний потенціал $\varphi(r) = \varphi_0\, r^2/a^2$ відносно осі, $\varphi_0 = 1$ кВ. Знайдіть кутову швидкість E × B-обертання $\omega = cE_r/(Br)$. Чому стовп обертається як тверде тіло?

3.9. ★★☆ Електрон з енергією 1 кеВ у токамаку з $R = 1$ м, $B = 1$ Тл. Оцініть швидкість тороїдального дрейфу $v_d \simeq v^2/(\omega_c R)$ і час, за який електрон без обертального перетворення досяг би стінки на відстані 0,3 м. Як цей результат пояснює необхідність полоїдальної складової поля?

3.10. ★★☆ У токамаку $R_0 = 1{,}65$ м, $B(R_0) = 5$ Тл. На якому радіусі ECE-приймач, налаштований на другу гармоніку 252 ГГц, бачить плазму? Куди зсунеться ця точка, якщо $B(R_0)$ зросте на 10 %?

3.11. ★★☆ Струм колектора гальмівного аналізатора спадає в e разів при зростанні потенціалу сітки на 20 В. Знайдіть T_i однозарядних іонів.

3.12. ★★★ *Комп'ютерне завдання.* Проінтегруйте чисельно рівняння руху частинки в полях **E** і **B** методом Бориса (на кроці $\Delta t \ll \omega_c^{-1}$ половинне прискорення від **E**, поворот у **B**, друге половинне прискорення). Перевірте чисельно: (а) **E** × **B**-дрейф $v_E = cE/B$ для електрона й протона; (б) градієнтний дрейф у полі $B(x) = B_0(1 + x/L)$ і його знак залежно від заряду; (в) збереження $\mu = mv_\perp^2/2B$ у пробкотроні.

Контрольні питання

1. Які фізичні величини визначають ларморівський радіус і циклотронну частоту? Чому іони й електрони обертаються в протилежні боки?
2. Чому дрейф у схрещених **E** і **B** не залежить від заряду та маси, а градієнтний дрейф залежить?
3. Що таке магнітний момент частинки? Чому він є адіабатичним інваріантом? Коли порушується?
4. Як працює магнітне дзеркало? Що таке конус втрат? Чому зіткнення призводять до «протікання» відкритих пасток?
5. Чому градієнтний дрейф і дрейф кривизни в вакуумному полі додаються? Від чого залежить напрям дрейфу?
6. Які три адіабатичні інваріанти характеризують рух у диполі Землі? Як вони співвідносяться за частотами?
7. Чому за ECE можна локалізувати вимір T_e у токамаку? Що обмежує метод?
8. Чому чисто тороїдальне магнітне поле не утримує плазму? Яку роль відіграє полоїдальна складова?

4 Зіткнення, провідність та перенос у плазмі

Досі ми розглядали колективне екранування (розд. 1) та рух окремих частинок у заданих полях (розд. 3), де окремі акти розсіяння були неважливі. Тепер додамо зіткнення. Це дасть три нові явища: опір електричному струму, теплоперенос і дифузію. Важливо відрізняти два рівні опису: *колективність* пояснює реакцію плазми як цілого, а *зіткнення* визначають дисипацію імпульсу та енергії.

§4.1. Кулонівські зіткнення

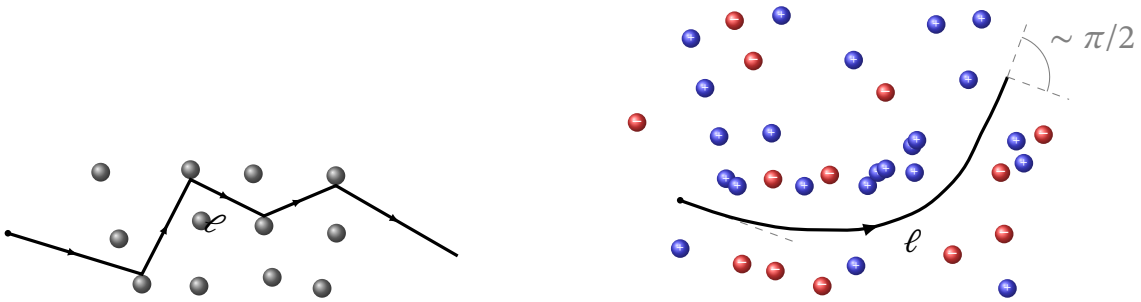
Теоретичні відомості Нагадаємо з молекулярної фізики

У газі частинка швидкості v_T із перерізом зіткнення $\sigma_{\text{зіт}}$ (літеру σ далі зарезервовано для провідності) у середовищі концентрації n має час між зіткненнями $\tau = 1/(n v_T \sigma_{\text{зіт}})$ і довжину вільного пробігу $\ell = v_T \tau$. Рух між зіткненнями — випадкове блукання: після $N = t/\tau$ кроків довжиною ℓ маємо $\langle x^2 \rangle = N\ell^2 = (\ell^2/\tau)\, t$, тобто дифузію з коефіцієнтом $D \sim \ell^2/\tau \sim v_T^2 \tau$ (точніше, $D = \frac{1}{3}\ell v_T$). За тією самою логікою за порядком величини в'язкість $\eta \sim nT\tau$, а теплопровідність $\kappa \sim nT\tau/m$ (з числовим множником порядку одиниці). Далі всі оцінки виду «$D \sim v_T^2/\nu$, $\kappa \sim n v_T^2 \tau$» ґрунтуються саме на цих співвідношеннях, де $\nu = 1/\tau$ і $\lambda_{\text{пр}} = \ell = v_T/\nu$.

Хоча колективні взаємодії в плазмі домінують, зіткнення все ж відбуваються, і саме вони визначають опір плазми електричному струму, вирівнювання температур і загасання хвиль. Зіткнення заряджених частинок мають суттєву особливість порівняно зі зіткненнями нейтральних атомів: сила далекодійна, тому повний імпульс частинка втрачає не в одному лобовому зіткненні, а у вигляді *багатьох малих відхилень* від далеких партнерів (рис. 4.1).

Електрон зі швидкістю v, що пролітає повз іон із прицільною відстанню b (рис. 4.2), відхиляється (формула Резерфорда) на кут θ, де $\operatorname{tg}(\theta/2) = b_{90}/b$, а

$$b_{90} = \frac{e^2}{m_e v^2} \sim \frac{e^2}{T}$$



(а) нейтральний газ (б) плазма

Рис. 4.1. Чому зіткнення в плазмі інші, ніж у газі. (а) Нейтральний газ: частинка змінює напрям у рідкісних різких зіткненнях, ℓ — відстань між ними. (б) Плазма: електрон (жирна лінія) не має лобових зіткнень, а набирає поворот із багатьох малих відхилень від далеких іонів (притягання) і електронів (відштовхування). Тому тут ℓ — шлях, на якому напрям швидкості повертається на $\sim \pi/2$, а внесок усіх далеких прольотів дає кулонівський логарифм

(для $v \sim v_{Te}$) — відстань, при якій відхилення порівнянне з прямим кутом. Для $b \gg b_{90}$ відхилення мале, $\theta \approx 2b_{90}/b$. Число проходжень з прицільною відстанню в інтервалі db пропорційне $b\,db$, а внесок у середній квадрат кута — $\theta^2 \propto b^{-2}$, отже сумарний ефект усіх інтервалів пропорційний $\int db/b$: кожна декада прицільних відстаней дає однаковий внесок. Інтегрування йде від b_{90} (при менших b вже велике відхилення) до λ_D (далі іон екранований). Звідси *кулонівський логарифм*

$$\ln\Lambda = \ln\frac{\lambda_D}{b_{90}} \sim \ln N_D \approx 10\text{–}20.$$

Він слабко залежить від параметрів плазми, і для оцінок його вважають сталим.

! *Формула $\ln\Lambda \approx \ln N_D$ має сенс лише при $N_D = n\lambda_D^3 \gg 1$. Для сильнозв'язаної плазми $\ln\Lambda \lesssim 1$, і всі результати цього розділу втрачають точність.*

Значення $\ln\Lambda$ для типових плазм (формула NRL: $\ln\Lambda = 23 - \ln(n^{1/2}T^{-3/2})$ при $T < 10$ еВ, $24 - \ln(n^{1/2}T^{-1})$ при $T > 10$ еВ; n у см$^{-3}$, T в еВ) наведено в табл. 4.1: для дуже різних плазм $\ln\Lambda$ лежить у межах 10–20.

Оцінимо частоту зіткнень «на пальцях». Одне далеке прольотне зіткнення з прицільною відстанню b повертає швидкість на кут $\theta \approx 2b_{90}/b$. Кути від різних зіткнень випадкові, тому додаються *квадрати*; на шляху dx електрон зустрічає $2\pi b\,n\,db\,dx$ розсіювачів, тож

$$\frac{d\langle\theta^2\rangle}{dx} = \int 2\pi b\,n\,db\left(\frac{2b_{90}}{b}\right)^2 = 8\pi n b_{90}^2 \ln\frac{b_{\max}}{b_{\min}} = 8\pi n b_{90}^2 \ln\Lambda.$$

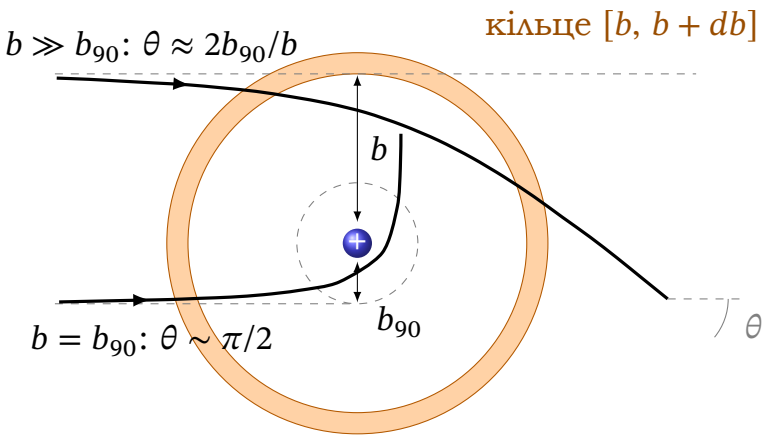


Рис. 4.2. Розсіяння електрона на іоні (формула Резерфорда). Прицільна відстань b — відстань від іона до початкової прямої руху. Для $b = b_{90}$ електрон відхиляється на $\sim \pi/2$; далекі прольоти ($b \gg b_{90}$) дають малі кути. Площа кільця $[b, b+db]$ дорівнює $2\pi b\,db$, тож число прольотів у ньому $\propto b\,db$

Таблиця 4.1. Кулонівський логарифм для типових плазм.

Плазма	n, см$^{-3}$	T, **еВ**	$\ln\Lambda$
Лабораторний розряд	10^{11}	1	10,3
Іоносфера	10^{5}	0,1	13,8
Токамак (край)	10^{13}	10^{2}	13,6
Сонячна корона	10^{8}	10^{2}	19,4
Токамак (серцевина)	10^{14}	10^{4}	17,1

Умова $\langle\theta^2\rangle \sim 1$, тобто повороту приблизно на $\pi/2$ (рис. 4.1 б), визначає довжину пробігу $\ell \sim 1/(8\pi n b_{90}^2 \ln\Lambda)$, звідки

$$\nu = \frac{v}{\ell} \approx \frac{8\pi n e^4 \ln\Lambda}{m^2 v^3}.$$

Звідси одразу видно: (1) *логарифм* з'являється тому, що кожна декада b дає однаковий внесок; (2) далекі зіткнення домінують над близькими в $\ln\Lambda$ разів; (3) $\nu \propto v^{-3}$, тобто $\nu \propto T^{-3/2}$ (звідси ефект Драйсера, див. нижче). Точний кінетичний розрахунок з усередненням за максвеллівським розподілом і іншим означенням v замінює 8π на $4\sqrt{2\pi}/3$ (множник порядку одиниці) і дає частоту електрон-іонних зіткнень (для $Z = 1$)

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\,\frac{n_e e^4 \ln\Lambda}{m_e^{1/2}(T_e)^{3/2}} \approx 2{,}9\times 10^{-6}\, n_e[\text{см}^{-3}]\,\ln\Lambda\, T_e^{-3/2}[\text{еВ}]\ \text{с}^{-1}. \qquad (4.1)$$

Залежність $\nu \propto T^{-3/2}$ має просте пояснення: переріз кулонівського розсіяння $\propto v^{-4}$, тому швидкі частинки «не помічають» партнерів.

Для іонів із зарядом Ze ($n_i = n_e/Z$) переріз розсіяння пропорційний Z^2, а концентрація розсіювачів — $1/Z$, тому $\nu_{ei} \propto Z$, а провідність приблизно $\propto 1/Z$.

Порівняємо частоту зіткнень із плазмовою. Підстановка (4.1), (1.5) з урахуванням (1.14) дає

$$\boxed{\frac{\nu_{ei}}{\omega_{pe}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ln\Lambda\,\Gamma^{3/2} \approx 0{,}09\,\frac{\ln\Lambda}{N_D}}. \tag{4.2}$$

Це важливий, але тонкий результат: умова $N_D \gg 1$ означає слабкий кулонівський зв'язок і велику кількість частинок у дебаївській сфері, але сама по собі ще не визначає, чи є конкретний процес беззіткнювальним. Довжина вільного пробігу $\lambda_{\text{пр}} \sim v_{Te}/\nu_{ei}$ справді набагато більша за λ_D для типових слабкозв'язаних плазм, але порівнювати її треба насамперед із розміром системи L або з іншим характерним масштабом задачі.

Числова оцінка. Для $n_e = 10^{12}$ см$^{-3}$, $T_e = 10$ еВ, $\ln\Lambda = 15$ маємо $\nu_{ei} \approx 1{,}4\times10^{6}$ с$^{-1}$, $\omega_{pe} \approx 5{,}6\times10^{10}$ с$^{-1}$, $\nu_{ei}/\omega_{pe} \approx 2{,}4\times10^{-5}$.

Для електрон-електронних зіткнень $\nu_{ee} \sim \nu_{ei}$, а для іонів $\nu_{ii} \sim (m_e/m_i)^{1/2}\nu_{ee}$ (іони важчі й повільніші). Обмін енергією між електронами та іонами ще повільніший, $\sim (m_e/m_i)\nu_{ei}$. Порівнюючи часи, для водню маємо $\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei}^{\varepsilon} \sim 1 : 43 : 1836$. Тому кожен компонент спершу встановлює власний максвеллівський розподіл і лише потім вирівнюється температура між ними — це й пояснює можливість $T_e \neq T_i$. Фізично: за одне зіткнення електрона з іоном передається частка енергії $\sim m/M$, тож для вирівнювання температур потрібно $\sim M/m$ зіткнень. Двотемпературна плазма $T_e \neq T_i$ — звичайний стан. Контрінтуїтивний факт: довжина вільного пробігу $\ell = v_T/\nu \propto T^2/(ne^4\ln\Lambda)$ *не залежить від маси*, тому $\ell_e = \ell_i$ при $T_e = T_i$.

§4.2. Провідність плазми

Опір плазми — це «тертя» електронів об іони. У кожному зіткненні електрон втрачає частину імпульсу впорядкованого руху вздовж поля й передає його важчим іонам, а усереднення за багатьма зіткненнями дає силу, спрямовану проти швидкості. Урахуємо це в найпростішому наближенні, ввівши силу тертя об іони. Рівняння руху електрона в полі $\mathbf{E}$

$$m_e\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - m_e\nu\mathbf{v},$$

де $\nu \equiv \nu_{ei} = 1/\tau_e$. У сталому полі швидкість встановлюється $\mathbf{v}_d = -e\mathbf{E}/(m_e\nu)$, густина струму $\mathbf{j} = -n_e e\mathbf{v}_d = \sigma_0\mathbf{E}$ з провідністю

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu} = \frac{n_e e^2 \tau_e}{m_e}}. \tag{4.3}$$

У ν входять електрон-іонні зіткнення. Зіткнення електронів між собою не змінюють їхній сумарний імпульс, тому прямого тертя не створюють (вони лише впливають на форму розподілу, тобто на числовий коефіцієнт). Для гармонічного поля $\mathbf{E} \propto e^{-i\omega t}$ отримуємо $\sigma(\omega) = \sigma_0/(1 - i\omega/\nu)$, а діелектрична проникність $\varepsilon = 1 + 4\pi i\sigma/\omega$ набуває вигляду

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}. \tag{4.4}$$

Дві граничні ситуації: при $\omega \gg \nu$ повертаємося до (2.1), а при $\omega \ll \nu$ плазма поводиться як звичайний провідник ($\varepsilon \approx 4\pi i\sigma_0/\omega$). Уявна частина ε описує поглинання. Середня за період питома потужність джоулевих втрат $q = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\sigma\, E_0^2$, $\operatorname{Re}\sigma = \sigma_0/(1+\omega^2/\nu^2)$. Саме так зіткнення в нижній іоносфері поглинають радіохвилі (розд. 2), і саме джоулеві втрати спричиняють $R < 1$ при відбитті від реальної плазми.

Повністю іонізована плазма. Підставимо (4.1) у (4.3): концентрація *скорочується*, і

$$\sigma \propto \frac{T_e^{3/2}}{\ln\Lambda}. \tag{4.5}$$

Точний кінетичний розрахунок (Спітцер) змінює числовий коефіцієнт приблизно вдвічі (для струму вздовж поля $\sigma_\parallel \approx 1{,}96\, n_e e^2/m_e\nu_{ei}$), і для водневої плазми

$$\sigma_\parallel \approx 1{,}7\times 10^{14}\,\frac{T_e^{3/2}[\text{eB}]}{\ln\Lambda}\ \text{c}^{-1}.$$

У магнітному полі провідність стає анізотропною, але слід розрізняти два випадки. *Повністю іонізована плазма:* у системі відліку плазми (з урахуванням руху іонів) спітцерівський опір поперек поля лише приблизно вдвічі більший, $\eta_\perp \approx 2\eta_\parallel$, тобто магнітне поле *не* пригнічує поперечну провідність на порядки: електрон-іонне тертя зберігає сумарний імпульс, а дрейф $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ однаковий для обох сортів і струму не створює. *Слабко іонізований газ* (іоносфера) або нерухомі іони: струм поперек поля підтримується лише зіткненнями, і педерсенівська провідність пригнічується фактором $1/[1 + (\omega_c/\nu)^2]$, так що за $\omega_c \gg \nu$ маємо $\sigma_\perp/\sigma_\parallel \sim (\nu/\omega_c)^2 \ll 1$.

Висновок (4.5) контрінтуїтивний: чим *гарячіша* плазма, тим *краще* вона проводить. Причина в тому, що зі зростанням температури

електрони рухаються швидше, але ефективність кулонівського розсіяння спадає ще швидше.

Числова оцінка. Для $T_e = 1$ кеВ і $\ln\Lambda = 15$ маємо $\sigma \approx 3{,}6\times10^{17}$ с$^{-1}$, що вже порівнянно з провідністю міді при кімнатній температурі ($\sim 5\times10^{17}$ с$^{-1}$).

Практичний наслідок: питома потужність омічного нагрівання $j^2/\sigma \propto T^{-3/2}$ падає з температурою, і самим лише омічним нагріванням плазму не можна довести до термоядерних температур (потрібне додаткове нагрівання).

У слабко іонізованому газі частоту зіткнень ν визначають зіткнення з нейтральними атомами, $\nu_{en} = n_n\sigma_{en}v_{Te}$, і провідність (4.3) залежить передусім від концентрації електронів n_e, яка (через формулу Саха) швидко зростає з температурою.

Поле Драйсера та «втікаючі» електрони. Оскільки $\nu_{ei} \propto v^{-3}$ (переріз $\sigma_{\text{зіт}} \propto v^{-4}$), сила тертя на швидкий електрон $F_{\text{fr}} \sim m_e\nu_{ei}(v)\,v \propto v^{-2}$ *спадає* зі швидкістю. Тому у сталому полі E електрон, який випадково набрав достатньої швидкості, вже не гальмується тертям, а безперервно прискорюється — стає *втікаючим* (runaway). Критичне поле, за якого сила eE зрівнюється з тертям на тепловий електрон ($v \sim v_{Te}$), називають *полем Драйсера*:

$$E_D = \frac{4\pi e^3 n\ln\Lambda}{T_e} \approx 2{,}6\times10^{-13}\,\frac{n\ln\Lambda}{T_e[\text{еВ}]}\ \text{В/см}. \tag{4.6}$$

При $E < E_D$ електрони з $v > v_c = v_{Te}\sqrt{E_D/E}$ все ж втікають, але їхня частка експоненційно мала $\sim \exp(-v_c^2/2v_{Te}^2) = \exp(-E_D/2E)$.

Числова оцінка. Для токамака ($n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T_e = 10$ кеВ, $\ln\Lambda = 15$): $E_D \approx 4$ В/м, тоді як електричне поле в розряді $E \sim 0{,}1$ В/м, і втікаючих електронів практично немає.

Але під час швидкого зриву струму T_e падає, а E зростає на порядки, виникають пучки електронів з енергіями в десятки МеВ, небезпечні для стінок установки.

§4.3. Теплопровідність плазми

Ті самі електрони переносять і тепло. За порядком величини (кінетика газу) $\kappa_e \sim n_e v_{Te}\lambda_{\text{пр}} = n_e v_{Te}^2\tau_e$, де $\tau_e = 1/\nu_{ei}$. Оскільки $\tau_e \propto T_e^{3/2}/n_e$,

$$\kappa_e \sim \frac{n_e T_e\tau_e}{m_e} \propto T_e^{5/2},$$

і вона, як і провідність, не залежить від концентрації. Порівняння з (4.3) дає масштабне співвідношення $\kappa_e/\sigma \sim T_e/e^2$. Це аналог співвідношення Відемана–Франца за температурною залежністю, але числовий коефіцієнт визначається кінетичною моделлю і не збігається з металевим. Отже, гаряча плазма має дуже високу теплопровідність: при нагріванні від 10 до 100 еВ вона зростає у $10^{5/2} \approx 300$ разів. Теплопровідність іонів приблизно в $\sqrt{m_e/m_i}$ разів менша: $\kappa \propto \tau/m$, а $\tau_i/\tau_e \sim \sqrt{m_i/m_e}$.

Це стосується переносу вздовж поля. У замагніченій плазмі довжина кроку дорівнює не $\lambda_{\text{пр}}$, а r_L, тому $\kappa_\perp \sim n r_L^2 \nu \sim \kappa_\parallel (\nu/\omega_c)^2$ — на багато порядків менше. Поперек поля, до речі, за класичною оцінкою домінують іони (їхній r_L більший), а не електрони. Тому магнітне поле є ефективною *термоізоляцією* поперек силових ліній. Реальні втрати тепла в установках, однак, значно перевищують класичні (див. розд. 9).

§ 4.4. Дифузія в плазмі. Амбіполярна дифузія

Нехай у плазмі є градієнт концентрації. Електрони рухливіші за іони, тому природно було б очікувати, що вони дифундують швидше. Але тоді виникло б розділення зарядів і електричне поле, яке гальмує електрони й прискорює іони: *завдяки квазінейтральності електрони та іони дифундують разом* з однією швидкістю. Таку дифузію називають *амбіполярною*.

Знайдемо коефіцієнт. Для $n_e = n_i = n$ потоки частинок

$$\Gamma_e = -D_e \nabla n - \mu_e n \mathbf{E}, \qquad \Gamma_i = -D_i \nabla n + \mu_i n \mathbf{E},$$

де D_s — коефіцієнти дифузії, $\mu_s > 0$ — рухливості, пов'язані співвідношенням Ейнштейна $D_s = \mu_s T_s/e$. Вимога $\Gamma_e = \Gamma_i \equiv \Gamma$ визначає поле

$$\mathbf{E} = -\frac{D_e - D_i}{\mu_e + \mu_i} \frac{\nabla n}{n},$$

а після підстановки $\Gamma = -D_a \nabla n$ з *амбіполярним коефіцієнтом дифузії*

$$\boxed{D_a = \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_e + \mu_i} = \frac{\mu_e \mu_i (T_e + T_i)}{e(\mu_e + \mu_i)} \approx D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)}. \tag{4.7}$$

Останнє наближення справедливе при $\mu_e \gg \mu_i$. Отже, дифузію визначають *повільні* частинки (іони), але з поправкою на температуру електронів: електрони «тягнуть» іони за собою, і D_a у $1 + T_e/T_i$ разів більший за D_i.

Поле $\mathbf{E} \approx -(T_e/e)\,\nabla \ln n$ (при $D_e \gg D_i$) означає, що електрони розподілені за Больцманом $n \propto \exp(e\varphi/T_e)$ в потенціалі φ цього поля. Для його

створення досить мізерного розділення зарядів: $\delta n/n \sim (\lambda_D/L)^2 \ll 1$ (розд. 1). Амбіполярна дифузія визначає, наприклад, загасання розрядної плазми в посудині після вимкнення розряду. Формула (4.7) відповідає відсутності магнітного поля.

Дифузія поперек магнітного поля. У замагніченій плазмі крок поперек поля дорівнює r_L (кожне зіткнення зсуває ведучий центр на $\sim r_L$), а не довжині вільного пробігу, тому $D_\perp \sim r_L^2\nu$ (розд. 3), $D_\perp/D_\parallel \sim (\nu/\omega_c)^2$. Запам'ятайте: *у магнітному полі зіткнення допомагають дифузії поперек* $\mathbf{B}$ *($D_\perp \propto \nu$) і заважають уздовж ($D_\parallel \propto 1/\nu$).* У *повністю іонізованій* плазмі електрон-іонні зіткнення зберігають сумарний імпульс, і потоки електронів та іонів поперек поля автоматично рівні: $\nu_{ie} r_{Li}^2 \sim \nu_{ei} r_{Le}^2$ (бо $\nu_{ie} = \nu_{ei}\, m_e/m_i$, а $r_{Li}^2 \sim (m_i/m_e) r_{Le}^2$ за однакових T). Класична поперечна дифузія є *власне амбіполярною*: додаткове електричне поле не потрібне, а коефіцієнт $D_\perp \sim \nu_{ei} r_{Le}^2 \propto n\,T^{-1/2}/B^2$ дуже малий.

Числова оцінка. Для $n \approx 10^{14}$ см$^{-3}$, $T = 10$ кеВ й $B = 5$ Тл маємо $D_\perp \sim 0{,}1$ см^2/с. Для порівняння, бомівська дифузія $D_B = cT/16eB \approx 1{,}3 \times 10^6$ см^2/с більша в $\sim 10^7$ разів (розд. 9).

У слабко іонізованому газі, де магнітяться лише електрони, повільнішими стають саме вони, і амбіполярна дифузія поперек поля визначається ними: $D_{a\perp} \approx D_{e\perp}(1 + T_i/T_e)$, $D_{e\perp} = D_e/(1 + \omega_{ce}^2/\nu^2)$.

§4.5. Як це вимірюють: температура з опору і з ширини ліній

Зіткнення залишають у плазмі два «відбитки», з яких можна прочитати температуру без зонда.

Температура електронів з опору. Оскільки $\sigma \propto T_e^{3/2}$ (4.5), а густина струму j і поле E в омічному розряді вимірюються електрично (за струмом плазми й напругою на обході, розд. 5.12), то

$$T_e[\text{еВ}] \approx \left(\frac{\sigma \ln\Lambda}{1{,}7 \times 10^{14}}\right)^{2/3}, \qquad \sigma = \frac{j}{E}. \tag{4.8}$$

Числова оцінка. Для $I = 1$ МА, $a = 0{,}5$ м ($j \approx 1{,}3 \times 10^6$ А/м^2) і $E = 0{,}1$ В/м маємо $\sigma \approx 1{,}3 \times 10^7$ См/м $\approx 1{,}2 \times 10^{17}$ с$^{-1}$, і за $\ln\Lambda = 15$ отримуємо $T_e \approx 0{,}5$ кеВ.

Метод дає усереднену по перерізу температуру й чутливий до домішок: ефективний заряд $Z_{\text{eff}} > 1$ збільшує опір, тому T_e без поправки виходить заниженою.

Температура іонів з допплерівського розширення. Іон з масою M випромінює на довжині хвилі λ_0; через тепловий рух лінія має максвеллівський профіль із повною шириною на половині висоти

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{8\ln 2\, T_i}{Mc^2}}. \tag{4.9}$$

Числова оцінка. Для лінії H_α ($\lambda_0 = 656{,}3$ нм) за $T_i = 100$ еВ маємо $\Delta\lambda/\lambda_0 \approx 7{,}7\times10^{-4}$, тобто $\Delta\lambda \approx 0{,}5$ нм — легко вимірюється спектрометром.

Важчі домішки (C, O) дають вужчі лінії, але ті самі T_i за умови, що іони встигли вирівняти температуру з основними (зіткнення, розд. 4).

Густина з штарківського розширення. Мікрополя заряджених частинок розщеплюють рівні водню, і ширина лінії зростає як $n_e^{2/3}$: для H_β вона сягає ≈ 1 нм за $n_e \sim 10^{16}$ см$^{-3}$, тож метод підходить для щільної холодної плазми (розряди, дуги), а в гарячій термоядерній плазмі штарківська ширина мала на тлі допплерівської.

Обмеження: спектральна лінія несе сигнал із усієї хорди, тому для локальних вимірів потрібне томсонівське розсіяння (розд. 7.10).

Головне в розділі

- Кулонівські зіткнення — накопичення багатьох малих відхилень на далеких відстанях, а не рідкісні лобові удари.
- Вони визначають опір плазми: провідність Спітцера $\sigma \propto T^{3/2}$, від густини вона залежить лише через $\ln\Lambda$.
- Теплопровідність плазми переносять переважно електрони, бо вони легші й швидші за іони.
- Дифузія плазми амбіполярна: електричне поле зв'язує електрони та іони, вирівнюючи їхні потоки.
- Зіткнення дають діагностику: T_e з опору (розд. 4.5), T_i з допплерівської ширини лінії, n_e зі штарківської.

Задачі

4.1. ★★☆ Як змінюється провідність водневої плазми при зростанні температури від 10 до 100 еВ (вважайте $\ln\Lambda$ сталим)? Знайдіть σ при $T_e = 1$ кеВ, $\ln\Lambda = 15$ і порівняйте з провідністю міді. Як змінюється з температурою питома потужність омічного нагрівання при заданій густині струму?

4.2. ★★☆ У скільки разів змінюються електронна теплопровідність і провідність при нагріванні від 10 до 100 еВ? Як змінюється

відношення $\kappa_e/\sigma T_e$?

4.3. ★★☆ Знайдіть поле Драйсера для $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T_e = 10$ кеВ і для $n = 10^{13}$ см$^{-3}$, $T_e = 1$ кеВ ($\ln\Lambda = 15$). Для $E = 0{,}1$ В/м оцініть критичну швидкість v_c/v_{Te} і частку втікаючих електронів.

4.4. ★★☆ Знайдіть D_a/D_i для $T_e = T_i$ та $T_e = 10T_i$. Покажіть, що при $D_e \gg D_i$ амбіполярне поле $\mathbf{E} = -(T_e/e)\nabla \ln n$, тобто електрони розподілені за Больцманом.

4.5. ★★☆ Використовуючи табл. 4.1 і формулу (4.1), оцініть $\ln\Lambda$ та частоту ν_{ei} для трьох плазм: іоносфери ($n \sim 10^6$ см$^{-3}$, $T \sim 0{,}1$ еВ), сонячної корони ($n \sim 10^8$ см$^{-3}$, $T \sim 100$ еВ) і лабораторної плазми ($n \sim 10^{13}$ см$^{-3}$, $T \sim 10$ еВ). Яка з них найбільш зіткненнєва щодо ω_p?

4.6. ★★☆ У токамаку $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T_e = T_i = 10$ кеВ, $\ln\Lambda \approx 17$, $R = 3$ м. (а) Оцініть $\tau_e \approx 3{,}4\times10^5\, T_e^{3/2}[\text{еВ}]/(n\ln\Lambda)$ с, довжину вільного пробігу $\ell_e = v_{Te}\tau_e$ і порівняйте її з довжиною обходу тора $2\pi R$. (б) За який час вирівнюються T_e та T_i? Оцініть $\tau_{eq} \sim (m_i/2m_e)\,\tau_e$ і порівняйте з часом утримання енергії ~ 1 с.

4.7. ★★☆ Порівняйте класичну дифузію $D_\perp \sim r_{Le}^2\nu_{ei}$ з бомівською $D_B = cT/(16eB)$ для параметрів із задачі 4.6 при $B = 5$ Тл. У скільки разів вони відрізняються і що це означає для утримання?

4.8. ★★☆ У омічному розряді $j = 2\times10^6$ А/м^2, $E = 0{,}2$ В/м, $\ln\Lambda = 15$. Оцініть T_e за формулою (4.8). Лінія H_α має ширину $\Delta\lambda = 0{,}8$ нм; оцініть T_i.

Контрольні питання

1. Чому провідність повністю іонізованої плазми зростає з температурою й не залежить від концентрації?
2. Чому в слабкозв'язаній плазмі ($N_D \gg 1$) $\nu_{ei} \ll \omega_p$, і чому це ще не означає, що довільний процес беззіткнювальний? Яку роль грає кулонівський логарифм?
3. Що таке амбіполярна дифузія? Чому $D_a \approx D_i(1 + T_e/T_i)$ і яка роль квазінейтральності?
4. Що таке поле Драйсера? Чому сила тертя на швидкий електрон спадає зі швидкістю?
5. Чому класична дифузія поперек поля у повністю іонізованій пла-

змі автоматично амбіполярна?

6. Чому теплопровідність плазми $\propto T^{5/2}$ і не залежить від концентрації? Чому вона різна вздовж і поперек поля?

7. Чому зі зростанням температури плазма стає кращим провідником, а метал — гіршим?

8. Чому зіткнення сприяють дифузії поперек поля, але гальмують дифузію вздовж нього?

9. Як за напругою на обході та струмом оцінити T_e омічної плазми? Чому результат залежить від Z_{eff}?

5 Гідродинамічний та магнітогідродинамічний опис

До цього моменту ми розглядали переважно окремі частинки. Але в багатьох задачах не потрібно знати траєкторію кожної з них: достатньо знати усереднені поля густини, швидкості, тиску та електромагнітного поля. У цьому розділі ми піднімаємося від двох рідин до однорідинної МГД, розбираємо альвенівську швидкість, рівновагу, діамагнетизм, вмороженість і пересполучення поля, зв'язуємо рідинну мову з частинковою й завершуємо магнітними вимірами.

§ 5.1. Гідродинамічний опис не є синонімом частих зіткнень

З загальної фізики відомо, що газ чи рідину описують не окремими молекулами, а полями густини ρ, швидкості $\mathbf{v}$ і тиску p та рівняннями гідродинаміки (їх нагадує врізка нижче). Це працює тому, що часті зіткнення швидко вирівнюють розподіл молекул за швидкостями, і тоді стан газу в кожній точці цілком задають саме ці три величини. У плазмі зіткнень може бути мало, проте для повільних і великомасштабних рухів рідинні рівняння все одно можуть годитися: плазму як ціле визначають усереднені величини, а подробиці розподілу частинок за швидкостями (скажімо, невелика група швидких частинок) на неї майже не впливають. Тому в плазмі співіснують кінетичний опис (стежимо за розподілом частинок за швидкостями) та рідинний (стежимо лише за усередненими полями).

Рідинний опис, у свою чергу, буває двох видів. У *дворідинному* електрони й іони описують окремо, кожні своєю густиною, швидкістю й тиском; в *однорідинному* — він і є *магнітною гідродинамікою* (МГД) — плазму розглядають як одну провідну рідину. Обидва виведемо нижче. Але коли рідинний опис взагалі припустимий? У магнітному полі частинка обертається навколо силової лінії по колу з ларморівським радіусом r_L і циклотронною частотою ω_c (розд. 3). Якщо поле й густина змінюються на відстанях L, значно більших за радіус іонного кола, і повільно порівняно з частотою його обертання,

$$L \gg r_{Li}, \qquad \omega \ll \omega_{ci},$$

то частинка за час зміни поля багато разів обертається й лишається прив'язаною до своєї силової лінії. Тоді поперек поля плазма поводиться як суцільне середовище навіть без зіткнень; чому саме, пояснено в § 5.11. Однак цих умов недостатньо: рівняння рідини треба ще замкнути (про це — у врізці нижче й в підрозділі «Замикання системи та межі застосовності»), а найпростіша модель зі скалярним тиском вимагає, щоб тиск встигав вирівнятися за напрямками. Якщо умови порушуються, треба повертатися до дворідинного або кінетичного опису.

§ 5.2. Дворідинний опис

Теоретичні відомості | **Нагадаємо з гідродинаміки**

Для звичайної рідини з густиною ρ і швидкістю $\mathbf{v}$ маємо рівняння неперервності $\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$ та рівняння Ейлера

$$\rho\Big(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\Big) = -\nabla p + \mathbf{f},$$

де $\mathbf{f}$ — об'ємна сила, а в'язкість додає член Нав'є–Стокса $\mu\nabla^2\mathbf{v}$ (μ — динамічна в'язкість). Ліва частина — густина, помножена на прискорення елемента рідини, яке записують як $D\mathbf{v}/Dt$. Тут

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)$$

називають *субстанціальною* (повною) похідною: це швидкість зміни величини в точці, що рухається разом із рідиною. Перший доданок дає зміну в нерухомій точці, а $(\mathbf{v}\cdot\nabla)$ враховує, що течія переносить елемент у місце з іншим значенням цієї величини. Сила тиску на елемент $dV = dx\,dy\,dz$ (рис. 5.1) виникає через перепад тиску на протилежних гранях: $df_x = [p(x) - p(x+dx)]\,dy\,dz = -(\partial p/\partial x)\,dV$, а разом по трьох осях $d\mathbf{f}_p = -\nabla p\,dV$ — вона напрямлена від більшого тиску до меншого. Зверніть увагу на *проблему замикання*: рівняння для ρ містить $\mathbf{v}$, рівняння для $\mathbf{v}$ — тиск p, рівняння для p — потік тепла і т. д. Ланцюжок обривають моделлю стану (наприклад, $p \propto \rho^{\gamma}$). Нижче рівняння для електронної та іонної «рідин» читаються як «Ейлер + сила Лоренца + тертя $\mathbf{R}$».

Найприродніший гідродинамічний крок — не відразу зливати електрони та іони в одну рідину, а описувати їх окремо. Для кожного компонента вводимо концентрацію n_s і середню швидкість $\mathbf{v}_s$. Рівняння неперервності мають вигляд

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla\cdot(n_s\mathbf{v}_s) = 0.$$

Рівняння руху — це рівняння Ейлера для кожного компонента, із си-

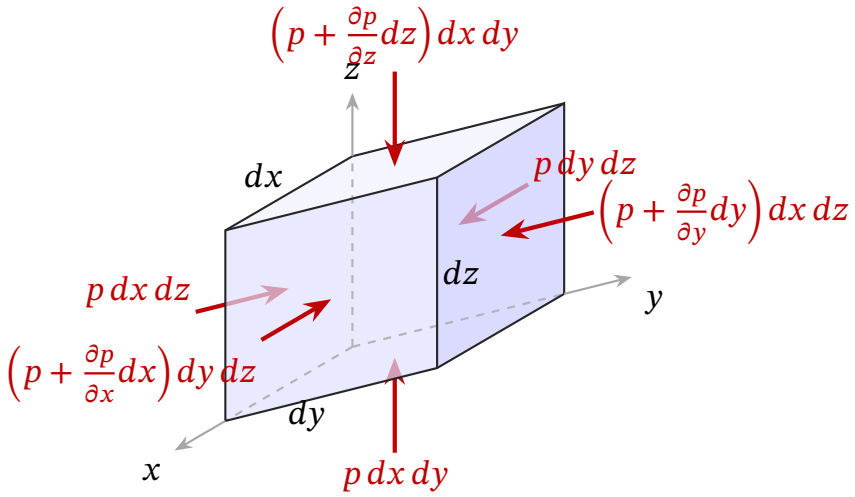


Рис. 5.1. Елемент об'єму, на який діють сили газокінетичного тиску

лою Лоренца, градієнтом тиску та силою зіткнень ($D_s/Dt = \partial_t + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla)$ — похідна вздовж руху компонента s):

$$m_s n_s \frac{D_s \mathbf{v}_s}{Dt} = q_s n_s \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}\right) - \nabla p_s + \mathbf{R}_s.$$

Вираз $\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}/c$ (для $v_s \ll c$) — це електричне поле в системі відліку, що рухається разом із компонентом s: у ній магнітна сила, яку відчуває частинка, виглядає як чисто електрична. Сума $\sum_s \mathbf{R}_s = 0$: зіткнення передають імпульс між компонентами, але не створюють його. Тут ці рівняння записано за аналогією з гідродинамікою; їхній систематичний вивід як моментів кінетичного рівняння (і звідки береться тензор тиску замість скалярного p_s) наведено в § 7.5.

Для квазінейтральної водневої плазми $n_e \simeq n_i = n$ та $m_e \ll m_i$. Важливо побачити, що однорідинна МГД не вводиться незалежно від дворідинної моделі: її основні рівняння можна отримати безпосередньо, додаючи рівняння руху електронів та іонів і окремо використовуючи рівняння для електронів.

§ 5.3. Від дворідинної моделі до однорідинної МГД

Для однозарядної плазми ($q_i = e$, $q_e = -e$) ті самі рівняння руху для іонів та електронів мають вигляд

$$m_i n_i \frac{D_i \mathbf{v}_i}{Dt} = e n_i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}\right) - \nabla p_i + \mathbf{R}_{ie},$$

$$m_e n_e \frac{D_e \mathbf{v}_e}{Dt} = -e n_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}\right) - \nabla p_e + \mathbf{R}_{ei},$$

де $\mathbf{R}_{ei} = -\mathbf{R}_{ie}$ виражає взаємну передачу імпульсу під час зіткнень.

Сума рівнянь: рівняння руху плазми як цілого. Введемо масову густину та масову швидкість плазми:

$$\rho_m = m_i n_i + m_e n_e, \qquad \mathbf{v} = \frac{m_i n_i \mathbf{v}_i + m_e n_e \mathbf{v}_e}{\rho_m}.$$

Для $m_e \ll m_i$ маємо $\rho_m \simeq m_i n_i$ і $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_i$. Додаючи рівняння руху електронів та іонів, внутрішні сили зіткнень взаємно скорочуються. У квазінейтральній плазмі $n_e \simeq n_i$ скорочується також сумарна електрична сила:

$$en_i\mathbf{E} - en_e\mathbf{E} \simeq 0.$$

Магнітні сили, навпаки, не скорочуються, оскільки електрони та іони рухаються з різними швидкостями. Використовуючи

$$\mathbf{j} = en_i\mathbf{v}_i - en_e\mathbf{v}_e,$$

їхня сума набуває вигляду

$$\frac{en_i}{c}\mathbf{v}_i \times \mathbf{B} - \frac{en_e}{c}\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Якщо нехтувати різницею $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i = -\mathbf{j}/en$ у конвективних членах $(\mathbf{v}_s \cdot \nabla)\mathbf{v}_s$ (для звичайної низькочастотної МГД це мала поправка), дістаємо

$$\boxed{\rho_m \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla(p_i + p_e) + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}.} \tag{5.1}$$

Тут $D/Dt = \partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ — та сама похідна вздовж руху, але вже за швидкістю $\mathbf{v}$ плазми як цілого. Позначивши $p = p_i + p_e$, одержуємо рівняння руху плазми як однієї (однорідинної) рідини.

Точно так само, додаючи рівняння неперервності двох компонент, помножені на m_s, отримуємо рівняння неперервності для єдиної рідини:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0.} \tag{5.2}$$

Електронне рівняння: закон Ома. Тепер скористаємося рівнянням для електронів. Для квазінейтральної плазми покладемо $n_e \simeq n_i = n$ та, для простоти, $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_i$. Тоді

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{j}}{en}.$$

Підставимо це у рівняння руху електронів і покладемо $m_e \to 0$ (інерція електронів нехтовна):

$$0 = -en\Big(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}}{c}\Big) - \nabla p_e + \mathbf{R}_{ei}, \qquad \mathbf{R}_{ei} = \frac{en}{\sigma}\mathbf{j}.$$

Зіткнення електронів з іонами дають силу тертя $\mathbf{R}_{ei} = en\mathbf{j}/\sigma$ (знак відповідає гальмуванню відносного руху). Підстановка $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \mathbf{j}/en$ дає $-en\big(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}/c\big) + \mathbf{j}\times\mathbf{B}/c - \nabla p_e + en\mathbf{j}/\sigma = 0$, і після ділення на en:

$$\boxed{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \frac{\mathbf{j}\times\mathbf{B}}{enc} - \frac{\nabla p_e}{en}.} \tag{5.3}$$

Ліва частина — електричне поле в системі відліку, що рухається разом із плазмою, тобто (оскільки $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_i$) з іонами. Перший доданок праворуч описує опір зіткненням, другий є *холлівським* доданком, а третій виникає через градієнт електронного тиску. Холлівський доданок важливий на масштабах порядку іонної інерційної довжини c/ω_{pi}: на менших масштабах іони «відклеюються» від поля, а електрони ще ні (токамак, $n = 10^{14}$ см$^{-3}$: c/ω_{pi} від 2 до 3 см; магнітосфера, $n \sim 1$ см$^{-3}$: $\approx$ 230 км). Поки права частина мала, поле «вморожене» в плазму; що це означає, пояснено нижче. Опір та інерція електронів (яку ми відкинули) вмороженість порушують, але лише в тонких шарах, де вони стають помітними; там силові лінії можуть пересполучатися (§ 5.10). Холлівський доданок цього сам не дає: на масштабах менших за c/ω_{pi} він лише означає, що поле вморожене в електрони, а не в іони. Нехтуючи всіма цими поправками, отримуємо закон ідеальної МГД: у системі відліку, що рухається разом із плазмою, електричного поля немає:

$$\boxed{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0.} \tag{5.4}$$

Таким чином, перехід має чітку фізичну структуру (рис. 5.2).

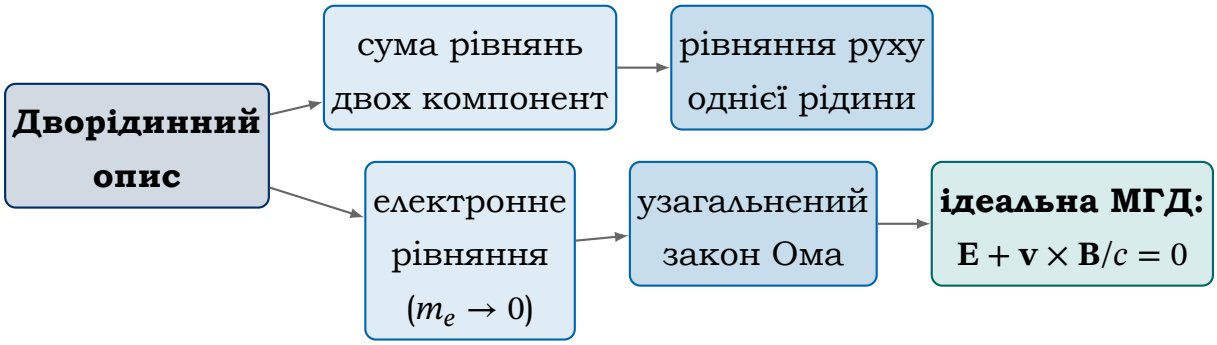


Рис. 5.2. Від двох рідин до ідеальної МГД: сума рівнянь руху дає рівняння руху однієї рідини, а електронне рівняння — узагальнений закон Ома; з нього ідеальна МГД виходить, якщо відкинути опір, холлівський доданок і градієнт електронного тиску

Саме тому МГД слід розглядати як довгохвильову низькочастотну границю (за $L \gg r_{Li}$ і $\omega \ll \omega_{ci}$, коли відкинуті в законі Ома члени

малі) більш повного дворідинного опису, а не як незалежну систему рівнянь.

§ 5.4. Основне рівняння магнітної гідродинаміки

Перейдемо до макроскопічного опису плазми, розглядаючи її як суцільне провідне середовище з масовою густиною $\rho_m(\mathbf{r},t)$, гідродинамічною швидкістю $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ та газокінетичним тиском $p(\mathbf{r},t)$.

Рівняння руху такого середовища (5.1) вже виведено з двох рідин. Тут розберемо зміст його доданків. Перший — сила газокінетичного тиску $-\nabla p\,dV$ на елемент об'єму dV (рис. 5.1, див. врізку «Нагадаємо з гідродинаміки»).

Другий доданок — магнітна складова сили Лоренца, $d\mathbf{f}_{\text{em}} = \mathbf{j}\times\mathbf{B}\,dV/c$. Електрична сила $\rho_q\mathbf{E}$ тут відсутня: у квазінейтральній плазмі густина нескомпенсованого заряду ρ_q мала, і сумарна електрична сила скорочується (вона скорочується в сумі рівнянь, а малість $\rho_q\mathbf{E}$ оцінено нижче, у підрозділі «Чому можна нехтувати електричною силою»). За другим законом Ньютона для маси $dm = \rho_m\,dV$ маємо $\rho_m\,D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \mathbf{j}\times\mathbf{B}/c$. Отже, рух плазми визначається градієнтом газокінетичного тиску та магнітною силою Лоренца.

Виключення густини струму за законом Ампера. Розглянемо повільні ($v \ll c$) макроскопічні процеси, для яких струмом зміщення в законі Ампера можна знехтувати. Тоді

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}.$$

Це зручно, бо в плазмі струми зазвичай невідомі, а поле — те, що ми задаємо котушками. Підставляючи цей вираз у рівняння руху, отримуємо *основне рівняння магнітної гідродинаміки* (МГД):

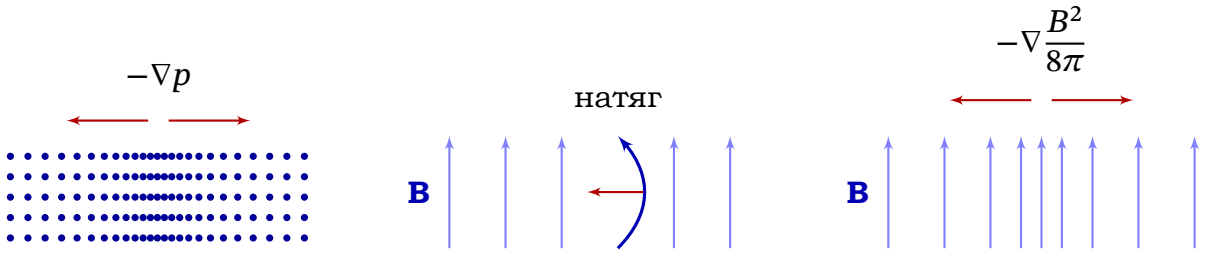
$$\boxed{\rho_m\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}.} \tag{5.5}$$

Отже, на відміну від звичайної гідродинаміки, на рух плазми безпосередньо діє магнітне поле — через силу Лоренца. Це повне поле: воно складається з поля котушок і поля струмів у самій плазмі.

Скориставшись векторною тотожністю $(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \nabla(B^2/2)$, перепишемо це рівняння. (Тотожність випливає з $\nabla(B^2/2) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})$, або в компонентах ($\varepsilon_{ijk}$ — символ Леві-Чивіти): $[(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\partial_l B_m B_k = B_k\partial_k B_i - B_k\partial_i B_k$.)

$$\rho_m\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \underbrace{-\nabla\left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right)}_{\substack{\text{тиск: газовий } p \text{ і магнітний } B^2/8\pi}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}}_{\text{натяг силових ліній}}. \tag{5.6}$$

Тут два фізично різні доданки (рис. 5.3). Перший — *магнітний тиск* $B^2/8\pi$, що додається до газового. Другий — *натяг силових ліній*: вздовж викривленої лінії з радіусом кривизни R_c діє сила на одиницю об'єму $B^2/(4\pi R_c)$, напрямлена до центра кривизни, ніби лінії — розтягнуті гумові шнури.



(а) газовий тиск (б) натяг ліній (в) магнітний тиск

Рис. 5.3. Три сили в рівнянні руху МГД: (а) градієнт газового тиску, (б) натяг силових ліній, (в) градієнт магнітного тиску. Стрілки на лініях — напрям **B**, червоні — напрям сили

Замикання системи та межі застосовності. Рівняння (5.5) саме по собі не утворює замкненої системи. Для визначення густини, швидкості, тиску та магнітного поля необхідні додаткові рівняння.

Зокрема, до рівняння руху додають:

1. рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0;$$

2. рівняння стану, наприклад адіабатичне

$$\frac{D}{Dt}\left(p\rho_m^{-\gamma}\right) = 0 \quad \text{(тобто } p\rho_m^{-\gamma} = \text{const вздовж руху елемента плазми);}$$

Тут показник адіабати $\gamma = 5/3$ для одноатомного ізотропного газу, якщо теплопровідність повільна порівняно з динамікою. Уздовж **B** умова повільної теплопровідності зазвичай порушена (довга довжина пробігу, розд. 6 і нижче), тому електрони там ближчі до ізотермічних ($\gamma_e \to 1$).

3. закон Ома, який пов'язує **E**, **B**, **v** та **j**. У простій резистивній МГД електричне поле в системі відліку, що рухається разом із плазмою, $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$, задає омічну складову струму:

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right). \tag{5.7}$$

Це *резистивний* закон Ома для однорідинної МГД; σ тут — скаляр, тобто $\sigma_\parallel$ (провідність уздовж поля). Поперек поля питомий

опір повністю іонізованої плазми лише приблизно вдвічі більший, $\eta_\perp \approx 2\eta_\parallel$, а не в $(\omega_{ce}/\nu)^2$ разів (ν — частота зіткнень електронів з нейтралами), як було б у слабоіонізованому газі. Значення $\eta_\parallel = 5{,}2\times10^{-5}\,\ln\Lambda/T^{3/2}$ Ом·м (де T в еВ) і множник 2 обчислив Λ. Спітцер, урахувавши віддачу іонів у кожному зіткненні й усереднення за розподілом електронів [7]. Причина малості поперечного опору: сила тертя між електронами та іонами залежить лише від їхньої *відносної* швидкості, тобто від струму $\mathbf{j}$, а спільний дрейф $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$, у якому рухається вся плазма, тертя не створює. Нейтральний газ, навпаки, нерухомий, і він гальмує поперечний рух електронів. Точніший дворідинний закон Ома (5.3) містить також холлівський доданок $\mathbf{j}\times\mathbf{B}/enc$ і градієнт електронного тиску $-\nabla p_e/en$, а якщо не нехтувати інерцією електронів — ще й $-(m_e/e)\,d\mathbf{v}_e/dt$. У простій резистивній МГД всі ці поправки вважаються малими.

4. рівняння Максвелла, зокрема

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-c\,\nabla\times\mathbf{E}.$$

Електричне поле в цій системі знаходять із закону Ома, а не з рівняння Пуассона: за квазінейтральності $\rho_q=\nabla\cdot\mathbf{E}/4\pi$ є наслідком, а не незалежною змінною. Зате струм мусить замикатися, $\nabla\cdot\mathbf{j}=0$ (без струму зміщення це випливає з закону Ампера); якщо замкнутися йому нікуди, заряд накопичується, доки створене ним поле не зупинить рух зарядів.

МГД-наближення призначене для великомасштабних ($L\gg r_{Li}$) та повільних ($\omega\ll\omega_{ci}$) процесів, у яких індивідуальний рух частинок майже не впливає на плазму як ціле. Чому ця умова працює навіть без зіткнень, пояснено нижче, у підрозділі «Що насправді дозволяє перейти до середовища».

§ 5.5. Альвенівська швидкість і число Альвена

Рівняння МГД показує, що магнітне поле має не лише тиск, а й натяг. Це означає, що викривлення силових ліній може породжувати хвилю: магнітний натяг $B^2/4\pi$ відіграє роль натягу струни, а ρ_m — роль густини маси струни. Така *альвенівська хвиля* біжить уздовж однорідного поля $\mathbf{B}_0$ зі швидкістю

$$\boxed{\,v_A=\frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_m}}\,}\tag{5.8}$$

(повне виведення з лінеаризованих рівнянь МГД та інші моди — у розд. 6).

Альвенівська швидкість v_A — один із головних масштабів швидкості в МГД: з нею порівнюють швидкість течії плазми, а час L/v_A є характерним часом магнітних процесів на масштабі L. Значення v_A для токамака, сонячної корони та сонячного вітру наведено в табл. 6.1 розд. 6. Відношення

$$M_A = \frac{v}{v_A}$$

називають числом Альвена. За $M_A \ll 1$ магнітні сили здатні істотно впливати на рух, тоді як за $M_A \gg 1$ інерційний рух домінує над альвенівським відновлювальним механізмом. Це порівняння (v і v_A беруть в одній точці) є локальним і не є самостійним критерієм застосовності МГД.

Альвенівська хвиля — лише одна з хвиль замагніченої плазми. Зовнішнє поле $\mathbf{B}_0$ робить реакцію плазми анізотропною: рух уздовж поля та поперек нього фізично різний. У низькочастотній границі $\omega \ll \omega_{ci}$ це дає МГД-хвилі (альвенівську, швидку й повільну магнітозвукові), а при вищих частотах потрібен тензорний опис холодної замагніченої плазми. Обидва випадки систематично розглянуто в розд. 6.

§ 5.6. МГД-рівновага та магнітні поверхні

Розглянемо тепер стаціонарну плазму, в якій $\mathbf{v} = 0$. Рівняння руху перетворюється на умову рівноваги:

$$\nabla p = \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}. \tag{5.9}$$

Це рівняння показує, що в рівновазі градієнт тиску компенсується магнітною силою Лоренца.

Корисно мати ще один еквівалентний опис магнітної сили. Використовуючи закон Ампера та $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, можна записати

$$f_i = \partial_j T_{ij}, \qquad T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(B_i B_j - \frac{B^2}{2}\delta_{ij}\right). \tag{5.10}$$

Тут f_i — i-та компонента магнітної сили $\mathbf{j} \times \mathbf{B}/c$ на одиницю об'єму, T_{ij} — тензор натягів Максвелла. У цьому тензорі перший доданок відповідає натягу вздовж поля, а другий — магнітному тиску. Такий запис особливо зручний для задач про сили на плазмові шнури та магнітні поверхні.

Скалярно помножимо (5.9) на $\mathbf{B}$. Оскільки $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = 0$, маємо

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0.$$

Отже, магнітні силові лінії лежать на поверхнях сталого тиску:

$$p = \text{const}.$$

Аналогічно, скалярний добуток (5.9) на $\mathbf{j}$ дає

$$\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0,$$

тобто густина струму також лежить у дотичній площині до поверхонь сталого тиску.

Це зображено на рис. 5.4: і силові лінії, і лінії струму намотуються на вкладені поверхні $p = \text{const}$, а градієнт тиску ∇p напрямлений по нормалі до них, до осі.

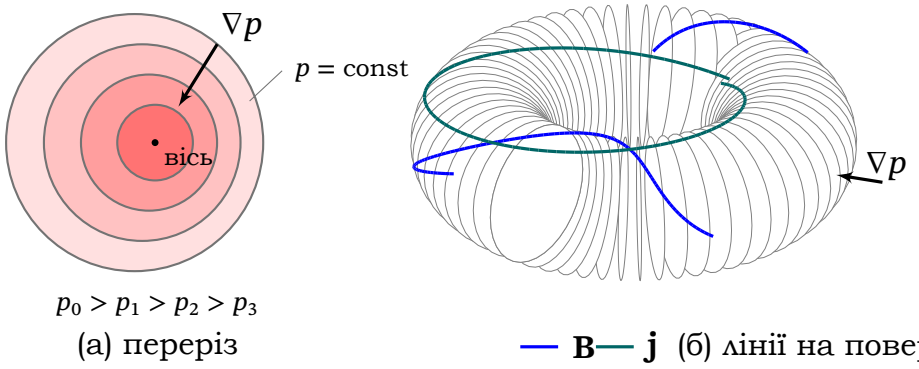


Рис. 5.4. Рівновага плазми: (а) вкладені поверхні сталого тиску в перерізі, тиск зростає до осі; (б) лінії поля $\mathbf{B}$ і струму $\mathbf{j}$ лежать на одній такій поверхні, бо $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ і $\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$

У тороїдальних магнітних системах такі поверхні утворюють вкладені одна в одну *магнітні поверхні*. Їхня геометрія є основою опису рівноваги плазми в токамаках і стелараторах.

З (5.9) можна також знайти поперечну складову густини струму. Векторно помноживши це рівняння на $\mathbf{B}$, дістаємо

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{c}{B^2}\, \mathbf{B} \times \nabla p.$$

Це саме діамагнітний струм (5.14), який детальніше розглянуто в § 5.8.

Параметр плазми β. Важливим безрозмірним параметром плазми є відношення газокінетичного тиску до магнітного:

$$\boxed{\beta = \frac{p}{B^2/(8\pi)} = \frac{8\pi p}{B^2}.} \qquad (5.11)$$

Параметр β показує, що в рівновазі сильніше: тиск плазми чи тиск магнітного поля. Він *не* є критерієм застосовності МГД: ідеальна МГД справедлива за будь-якого β (за умов $L \gg r_{Li}$, $\omega \ll \omega_{ci}$), тоді як β лише вказує, наскільки сильно плазма деформує поле.

- За $\beta \ll 1$ магнітний тиск значно перевищує газокінетичний, тому плазма відносно слабо впливає на конфігурацію магнітного поля.
- За $\beta \sim 1$ газокінетичний та магнітний тиски порівнянні, тому взаємний вплив плазми та магнітного поля стає істотним.

Таким чином (рис. 5.5), β характеризує співвідношення двох основних механізмів, що визначають рівновагу плазми — її внутрішнього тиску та магнітного утримання. Для заданого магнітного поля велике значення β відповідає великому тиску плазми, однак досягнення такого стану визначається також умовами магнітного утримання та стійкістю плазми. Для порівняння: токамак $\beta \sim 3\,\%$, сферичний токамак до $\sim 40\,\%$ [7], магнітосфера Землі $\beta \ll 1$, сонячна корона від 10^{-3} до 10^{-2}, фотосфера $\gtrsim 1$ [24], сонячний вітер ~ 1.

За $\beta \ll 1$ тиск плазми не здатен врівноважити силу Лоренца, тож рівновага вимагає $\mathbf{j} \times \mathbf{B} \approx 0$, тобто $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$ (*безсилове* поле); так влаштовані сонячна корона та поздовжній струм токамака.

Тиск p визначається термодинамічним станом плазми; для класичної ідеальної плазми він задається формулою (1.15).

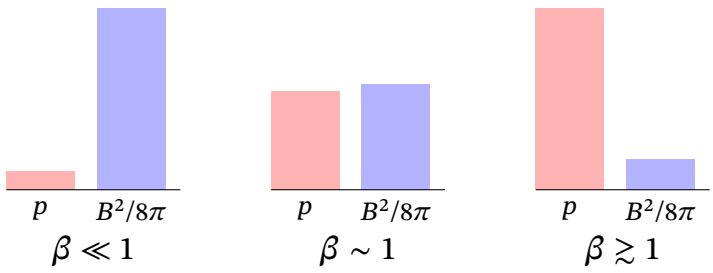


Рис. 5.5. Фізичний зміст параметра β: порівняння газокінетичного та магнітного тисків. Баланс тисків вимагає, щоб β, обчислене за зовнішнім (вакуумним) полем, не перевищувало 1; локально β може бути й більшим (напр., у конфігурації з оберненим полем). Практичну межу задає стійкість: у токамаках β становить кілька відсотків

§ 5.7. Енергія електромагнітного поля та плазми

Теорема Пойнтінга в системі СГС має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \tag{5.12}$$

Ліва частина описує зміну густини енергії поля та її потік, права — локальну передачу енергії від поля до заряджених частинок. Якщо

$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} > 0$, поле віддає плазмі енергію.

У МГД енергетичний баланс пов'язує рух середовища, магнітне поле та нагрів. Для ідеальної МГД (без дисипації) з адіабатичним замиканням повна густина енергії $\mathcal{E} = \rho_m v^2/2 + p/(\gamma-1) + B^2/8\pi$ (кінетична, теплова й магнітна) зберігається:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla\cdot\left[\left(\frac{\rho_m v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma-1}\right)\mathbf{v} + \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right] = 0, \qquad \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{B^2\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}}{4\pi}, \tag{5.13}$$

де останній вираз — потік Пойнтінга в ідеальній МГД ($c\mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B}$). З урахуванням скінченної провідності в балансі магнітної й кінетичної енергій з'являється дисипативний член $-j^2/\sigma$ (джоулеве тепло); якщо врахувати й теплову енергію, повна енергія знову зберігається: джоулеве тепло лише переводить магнітну та кінетичну енергії в теплову. Кожен доданок має чітке значення: робота $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{B})/c$ перекачує енергію між рухом і магнітним полем; поле вморожене, тому розтягування силових ліній збільшує $B^2/8\pi$ коштом кінетичної енергії, а обмін між кінетичною й тепловою енергіями відбувається через роботу стиснення $p\,\nabla\cdot\mathbf{v}$ (у рівнянні для теплової енергії) та $-\mathbf{v}\cdot\nabla p$ (у рівнянні для кінетичної); у сумі вони дають потік $\nabla\cdot(p\mathbf{v})$. Тому енергія — зручна перевірка наближень: якщо після відкидання якогось члена рівнянь повна енергія перестає зберігатися (для ідеальної МГД), цей член відкинуто безпідставно.

§ 5.8. Діамагнетизм плазми

Кожна заряджена частинка плазми у магнітному полі має орбітальний магнітний момент (3.7), напрямлений проти поля. Якщо в одиниці об'єму є n_s частинок сорту s, то намагніченість

$$\mathbf{M} = -\sum_s n_s \mu_s \frac{\mathbf{B}}{B} = -\sum_s n_s \frac{T_s}{B}\frac{\mathbf{B}}{B} = -\frac{p}{B^2}\,\mathbf{B},$$

де враховано $\langle m v_\perp^2/2\rangle = T$ (два ступені вільності поперек поля) і $p = \sum_s n_s T_s$. Намагніченість напрямлена проти поля, тобто плазма *діамагнітна*: її магнітна сприйнятливість ($M = \kappa H$, $H \approx B$) від'ємна, $\kappa = -p/B^2 < 0$, тому вона виштовхується з області сильного поля.

Діамагнетизм виявляється через струми. У неоднорідній плазмі (p змінюється в просторі) вони дорівнюють $\mathbf{j} = c\,\nabla\times\mathbf{M}$, що при $B = \text{const}$ дає

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{c}{B^2}\,\mathbf{B}\times\nabla p. \tag{5.14}$$

Той самий результат одержується з умови рівноваги $\nabla p = \mathbf{j}\times\mathbf{B}/c$ (див. (5.9)). Щоб побачити наслідок, розглянемо плоский шар, у якому

$p = p(x)$ і поле $\mathbf{B} = B(x)\mathbf{e}_z$. Тоді $j_y = -(c/4\pi)\,dB/dx$, і умова рівноваги $dp/dx = j_y B/c$ дає

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const}. \tag{5.15}$$

Де тиск плазми більший, поле послаблене, а де менший — сильніше: плазма «виштовхує» поле, а поле стискає плазму. Рівняння (5.15) формулює баланс *газокінетичного* (p) і *магнітного* ($B^2/8\pi$) тисків [7].[1]

§ 5.9. Вмороженість магнітного поля

З закону Ома (5.7)

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c + c\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}/(4\pi\sigma).$$

Підставляючи в закон індукції $\partial_t\mathbf{B} = -c\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}$ і враховуючи $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, одержуємо *рівняння індукції*

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{B}. \tag{5.16}$$

Перший доданок описує перенесення поля течією, другий — дифузію поля. Їхнє відношення визначає *магнітне число Рейнольдса*

$$R_m \sim \frac{4\pi\sigma L v}{c^2}.$$

Для рідких металів у лабораторії (ртуть, галій) R_m від 10^{-2} до 1; для токамака $R_m \sim 10^8$; для сонячної корони $\sim 10^{14}$. Отже, у космосі вмороженість — майже точний закон, а в лабораторних рідких металах — ні.

Ідеальна провідність ($R_m \gg 1$). Нехай у плазмі існує магнітне поле — створене зовнішніми котушками, струмом самої плазми або успадковане від джерела разом із плазмою. Якщо провідність дуже велика, дифузійним доданком у (5.16) можна знехтувати, і рівняння індукції зводиться до

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).$$

З нього випливає теорема Альвена: магнітний потік крізь будь-який контур, що рухається разом із плазмою, зберігається [1]. Кажуть, що

[1] Строго кажучи, у класичній системі в термодинамічній рівновазі повна намагніченість дорівнює нулю (теорема Бора — ван Левен): діамагнетизм орбіт компенсується струмами частинок, що ковзають поблизу стінок. Але в неоднорідній плазмі об'ємні струми $c\,\nabla\times\mathbf{M}$ не компенсуються — саме вони й визначають рівновагу.

силові лінії «вморожені» в плазму — плазма не перетинає їх, а поле рухається разом із нею. Саме ця властивість лежить в основі магнітного утримання: рухаючи плазму, ми переносимо разом із нею і поле.

Доведення «на пальцях». Потік Φ крізь контур, що рухається з плазмою, змінюється з двох причин: (а) через $\partial\mathbf{B}/\partial t$ і (б) через те, що бічна поверхня, яку описує контур за час dt, перетинає силові лінії. Другий внесок дорівнює $-\oint(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}$. З $\partial_t\mathbf{B} = -c\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}$ і теореми Стокса

$$\frac{d\Phi}{dt} = -c\oint\Big(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\Big)\cdot d\mathbf{l} = 0,$$

бо $\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c = 0$ (ідеальний закон Ома). Наслідок (з рівняння індукції та неперервності): $d(\mathbf{B}/\rho_m)/dt = (\mathbf{B}/\rho_m\cdot\nabla)\mathbf{v}$; він знадобиться для стискання плазми й для динамо.

Звідси прості закони стискання, які випливають зі збереження потоку $\Phi = BS = \text{const}$. При стисненні лише поперек поля площа перерізу $S\propto 1/\rho_m$, тому $B\propto\rho_m$, тобто $B/\rho_m = \text{const}$ ($B^2\propto\rho_m^2$, ефективний показник адіабати $\gamma_\perp = 2$). Уздовж поля площа S не змінюється, тому $B = \text{const}$. При ізотропному стисненні всі розміри змінюються однаково: довжина ℓ, $S\propto\ell^2$, $\rho_m\propto\ell^{-3}$, звідки $B\propto 1/S\propto\ell^{-2}\propto\rho_m^{2/3}$. Тоді тиск поля $B^2/8\pi\propto\rho_m^{4/3}$, тобто $\gamma = 4/3$.

Теорема Альвена не каже, звідки взялося поле: вона описує лише його рух, коли поле вже є. На практиці порядок зазвичай зворотний до того, що описує теорема — *спершу поле, потім плазма*. У токамаку чи стелараторі котушки вмикають до пуску (вакуум і нейтральний газ поле не екранують), а потім газ іонізують у готовому полі. У космосі плазма народжується з газу, де вже є слабке поле, а стискання зберігає потік, і поле зростає ($B\propto\rho_m^{2/3}$ при ізотропному стисненні). Так, імовірно, виникає поле радіопульсарів ($\sim 10^{12}$ Гс); для магнетарів (від 10^{14} до 10^{15} Гс [25]) самого стиснення, найпевніше, замало, і вважають, що додатково діє динамо (про нього — нижче).

Скінченна провідність: дифузія поля. У реальній плазмі провідність скінченна, тому другий доданок у (5.16) уже не можна відкинути. Нехай для простоти плазма нерухома ($\mathbf{v} = 0$). Тоді рівняння індукції набирає вигляду рівняння дифузії

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\,\Delta\mathbf{B},$$

тобто наявне неоднорідне поле з часом *розмивається*: струми, що підтримують неоднорідність, загасають через джоулеві втрати. Характерний час цього розмиття на масштабі L [1]

$$\tau_d = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}.$$

Числова оцінка. Лабораторна плазма ($T_e = 1$ кеВ, $L = 1$ м): $\tau_d \approx 50$ с, тому поле треба весь час підтримувати зовнішніми джерелами. Сонячна корона ($T \sim 100$ еВ, $L \sim 10^{10}$ см): $\tau_d \sim 10^{16}$ с $\approx 3 \times 10^8$ років, що набагато більше за часи коронних процесів (від хвилин до діб). Тому там дифузією можна знехтувати й користуватися наближенням вмороженості.

Дифузія діє в обидва боки: поле розтікається від місця, де його більше, до місця, де менше. Поле, яке було в плазмі, повільно виходить назовні; зовнішнє поле так само повільно проникає в плазму, що його не мала, за час τ_d. Тому «вморожене» й «не проникає» зовні — дві сторони однієї властивості: за $R_m \gg 1$ поле не заходить у плазму й не залишає її, а лише рухається разом із нею. Наприклад, магнітне поле сонячного вітру не проникає в магнітосферу Землі, а потрапляє туди лише через пересполучення (§ 5.10).

Динамо: як поле підтримується самим рухом. *Динамо* — самопідсилення магнітного поля рухом електропровідного середовища без зовнішнього джерела. Воно потрібне, бо дифузія розпускає поле за час τ_d: у рідкому залізному ядрі Землі це від 10^4 до 10^5 років [26], набагато менше за її вік (4,5 млрд років), тож поле має постійно відновлюватися. Механізм — перший доданок рівняння індукції (5.16): течія розтягує, скручує й складає силові лінії, а розтягнута трубка потоку за збереження потоку має сильніше поле, як випливає з $d(\mathbf{B}/\rho_m)/dt = (\mathbf{B}/\rho_m \cdot \nabla)\mathbf{v}$ вище (рис. 5.6). Потрібні $R_m \gg 1$ та несиметрична течія: осесиметричне поле не можна підтримати осесиметричною течією (теорема Каулінга), тому діють обертання й конвекція; на Сонці диференціальне обертання витягує полоїдальне поле в тороїдальне (Ω-ефект), а закручена конвекція знову породжує полоїдальне (α-ефект). Енергію поле бере з кінетичної енергії течії, і воно росте, доки сила Лоренца не починає гальмувати рух; так діють земне й сонячне (11-річний цикл) динамо, і так, імовірно, посилюється поле магнетарів.

§ 5.10. Пересполучення силових ліній

В ідеальній МГД силові лінії вморожені в плазму, тож топологія поля не змінюється. Але в тонкому струмовому шарі, де поле різко змінює знак, градієнт B великий, і дифузійний доданок у (5.16) уже не можна відкинути (або стають важливими опір та інерція електронів). Там вмороженість порушується, і лінії *пересполучаються*.

На пальцях. Уявіть дві натягнуті гумки, спрямовані в протилежні боки; плазма тримає їх на місці. Їх зближують, і у вузькій зоні конта-

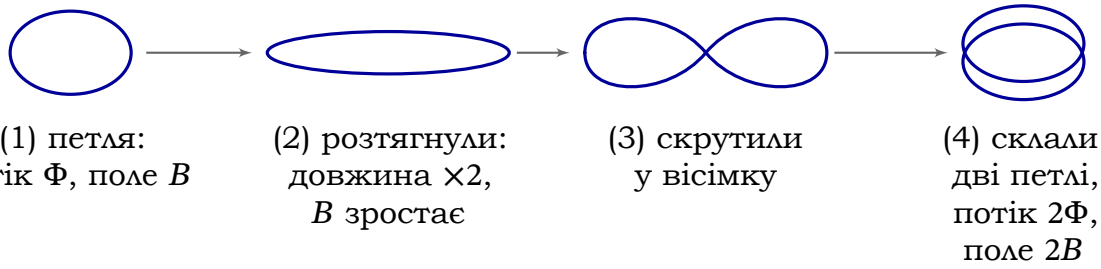


Рис. 5.6. Схема «розтягни — скрути — склади»: петля вмороженого потоку розтягується, скручується у вісімку й складається у дві петлі. Потік Ф зберігається, тому після складання поле зростає вдвічі; повторення циклу підсилює поле експоненційно.

кту вмороженість «вимикається»: замість двох ліній, що минали одна одну, утворюються дві нові, повернуті на кут (рис. 5.7). Нові лінії різко зігнуті, а натяг $B^2/4\pi$ вздовж лінії випрямляє їх, як відпущену тятиву, і викидає плазму вздовж шару зі швидкістю порядку альвенівської. Магнітна енергія перетворюється на теплову, кінетичну енергію потоків і енергію прискорених частинок.

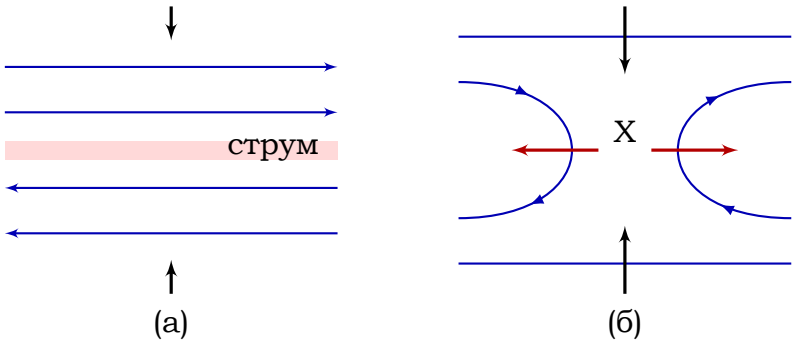


Рис. 5.7. Пересполучення: (а) протилежно спрямовані лінії стискають струмовий шар; (б) після пересполучення виникає X-точка, а плазма викидається вздовж шару

Оцінка швидкості. У моделі Світа–Паркера [27, 17, 7] шар довжиною L і товщиною δ: вхідний потік $v_{\rm in}$ і вихідний $\sim v_A$ зв'язані збереженням маси, $v_{\rm in}L \sim v_A\delta$, а товщина визначається дифузією, $\delta \sim \sqrt{(c^2/4\pi\sigma)\,L/v_A}$. Звідси

$$\boxed{\frac{v_{\rm in}}{v_A} \sim R_m^{-1/2}, \qquad R_m = \frac{4\pi\sigma L v_A}{c^2}.} \tag{5.17}$$

Числова оцінка. Для сонячної корони $R_m \sim 10^{14}$, тож $v_{\rm in}/v_A \sim 10^{-7}$, а час пересполучення $\tau \sim (L/v_A)\sqrt{R_m}$ за $L = 10^{10}$ см, $v_A = 7\times10^7$ см/с сягає $\sim 10^9$ с (десятки років), тоді як спалахи тривають хвилини.

Реальне пересполучення швидше: шар за великого R_m розпадається на острівці (плазмоїдна нестійкість [28]), а у беззіткнювальних шарах працюють холлівські ефекти (на масштабі c/ω_{pi}, див. (5.3)); швидкість виходить на v_{in} від 0,01 до 0,1 v_A, незалежно від R_m [17, 29].

> **!** *Силові лінії не є матеріальними об'єктами. Мова «розриву й зшивання» лише образно описує зміну зв'язності поля: насправді змінюється те, які елементи плазми пов'язані однією лінією.*

Де спостерігається. Сонячні спалахи, суббурі в магнітосфері Землі, розривні нестійкості в токамаках (розд. 8, 9).

Проблема нагріву корони. Корона має $T \sim 10^6$ К, у сотні разів більше за фотосферу ($\sim 6\times10^3$ К), хоча тепло тече від холоднішої поверхні. Потрібне джерело від 10^5 до 10^7 ерг/(см^2·с) [30]. Єдиної відповіді досі немає, але картина така. Енергію несе рух фотосфери, який скручує й заплітає силові лінії. Є два шляхи її розсіяння: (1) *нанофлеєри* — безліч малих пересполучень у тонких струмових шарах, на які розпадається заплетене поле (модель Паркера); (2) *хвилі* — альвенівська турбулентність, яку запускають рухи вузлів поля у фотосфері. Огляд Клімчука [20] обґрунтовує, що нагрів корони імпульсний, а корона заповнена тонкими струмовими шарами, що мають пересполучатися; моделювання альвенівської турбулентності [31] дає температуру $\approx 2{,}5$ МК у петлі активної області, але не відтворює всіх спостережних обмежень. Нині вважають, що обидва механізми пов'язані: турбулентність створює струмові шари, у яких і відбувається пересполучення.

§ 5.11. Дві мови опису: окремі частинки й суцільне середовище

Ми описали плазму двічі. В розд. 3 вона — набір частинок, кожна з яких крутиться навколо своєї силової лінії. Вище — суцільне провідне середовище з тиском, густиною й швидкістю течії. Чи не суперечать ці картини одна одній? Здавалося б, суперечать. Візьмемо установку керованого синтезу.

Числова оцінка. Для $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T = 10$ кеВ маємо $\nu_{ei} \approx 4{,}4\times10^3$ с$^{-1}$ і довжину вільного пробігу

$$\lambda_{\text{пр}} \sim \frac{v_{Te}}{\nu_{ei}} \approx \frac{4\times10^9 \text{ см/с}}{4{,}4\times10^3 \text{ с}^{-1}} \approx 10 \text{ км},$$

у десять тисяч разів більшу за розмір установки (~ 1 м).

Зіткнень практично немає, а ми користуємося рівняннями рідини. Але ж рідина, як ми звикли, тримається саме на зіткненнях.

Що насправді дозволяє перейти до середовища. У зіткнювальному газі локальна рівновага підтримується зіткненнями. У замагніченій плазмі поперек поля частинка за один оберт повертається до тієї самої силової лінії, тому всі частинки в точці мають спільну швидкість дрейфу $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$, а розкид швидкостей на колах усереднюється: зіткнення для цього не потрібні. Уздовж $\mathbf{B}$ нічого подібного нема, тому однорідинна МГД має обмеження.

! *Звідси ключове правило. Якщо $L \gg r_{Li}$ та $\omega \ll \omega_{ci}$, макроскопічну динаміку часто можна описувати МГД, але лише за наявності відповідного замикання. Уздовж $\mathbf{B}$, при анізотропному тиску та в явищах, чутливих до розподілу частинок за швидкостями (загасання Ландау, захоплені частинки в торі, конус втрат дзеркала), однорідинної МГД вже недостатньо й потрібна кінетика (розд. 7).*

Словник: що в частинковій мові відповідає величині рідини. Словник підсумовано в табл. 5.1; наступні підрозділи показують, як «наживо» пов'язані ці описи.

Таблиця 5.1. Словник між частинковим і гідродинамічним описом.

Частинки	Середовище	Зв'язок
Дрейф $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ однаковий для всіх частинок	швидкість течії $\mathbf{v}$	$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c=0$
$\sum_s n_s m_s$	масова густина ρ_m	$\rho_m = m_i n_i + m_e n_e$
$\sum_s n_s T_s$	тиск p	$p = p_i + p_e$
Гірація й градієнт густини	діамагнітний струм $\mathbf{j}_\perp$	$\mathbf{j}_\perp = c\,\mathbf{B}\times\nabla p/B^2$
Сума рівнянь руху електронів та іонів	рівняння МГД	$\rho_m\, D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \mathbf{j}\times\mathbf{B}/c$

Вмороженість як наслідок дрейфу. Закон Ома ідеальної МГД, $\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c=0$, не є окремим постулатом. Дрейф (3.2) однаковий для електронів і іонів, тож уся плазма поперек поля (коли діамагнітним дрейфом можна знехтувати, див. нижче) тече зі швидкістю $\mathbf{v}_E = c\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$. Підставимо $\mathbf{v}=\mathbf{v}_E$: $\mathbf{v}_E\times\mathbf{B}/c = -\mathbf{E}_\perp$, тобто $\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v}\times\mathbf{B}/c = 0$. Вздовж ліній $E_\parallel \approx 0$, бо електрони, які вільно рухаються вздовж них, миттєво замикають будь-яке поздовжнє поле. Отже, «лінії рухаються разом з плазмою» означає лише, що частинки прив'язані до ліній, а самі лінії дрейфують зі швидкістю $\mathbf{v}_E$.

Діамагнітний струм «на пальцях». Тут легко помилитися: центри ларморівських кіл не рухаються, а струм є. Звідки він? Нехай $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ і концентрація залежить від x. Розглянемо позитивні частинки у вертикальній площині $x = x_0$. З рівнянь руху $x_g = x + v_y/\omega_c$, де x_g — координата центра кола. Тобто частинки, що проходять через площину *вгору* ($v_y > 0$), мають центри *праворуч*, а частинки, що рухаються *вниз*, — ліворуч. Якщо справа концентрація більша, вгору летить більше частинок, ніж вниз, і потоки не компенсуються (рис. 5.8):

$$\Gamma_y = \int v_y\, n\!\left(x_0 + \frac{v_y}{\omega_c}\right) f_M\, d^3v \simeq \frac{n'}{\omega_c}\langle v_y^2\rangle = \frac{n'\,T}{m\,\omega_c} = \frac{c\,T}{qB}\,n'.$$

Тут f_M — нормований максвеллівський розподіл за швидкостями, $n' = dn/dx$, а нульовий доданок розкладу зникає через симетрію. Густина струму $j_y = q\Gamma_y = c\,T\,n'/B$. Для електронів і напрям обертання, і знак заряду протилежні, тож струми *додаються*: $j_y = c\,p'/B$, де $p = n(T_e + T_i)$. У векторному вигляді $\mathbf{j}_\perp = c\,\mathbf{B}\times\nabla p/B^2$ — рівно (5.14).

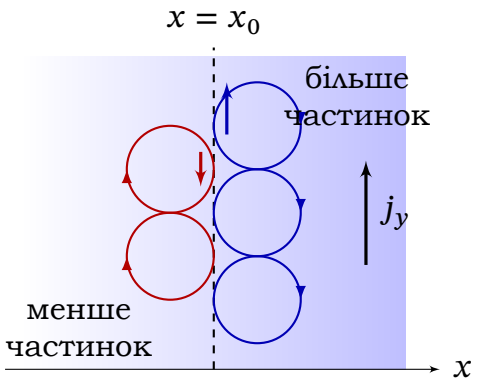


Рис. 5.8. Походження діамагнітного струму: центри орбіт нерухомі, але потоки вгору й вниз не компенсуються

Той самий струм ми отримали ще двічі: з намагніченості $M = -p/B$ (§ 5.8) та з МГД-рівноваги (5.9). Три різних шляхи — частинковий, «магнітний» і рідинний — дали один результат. Саме так ми й впевнюємося, що два описи сумісні.

Діамагнітні дрейфи в плазмовому циліндрі. Для утримання важливо бачити, як цей струм виглядає для кожного сорту окремо. Візьмемо довгий циліндр із полем $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ і тиском $p_s(r)$, максимальним на осі. У рівновазі сила тиску, електрична й магнітна сили в рідині сорту s (заряд q_s) компенсуються: $q_s n(\mathbf{E} + \mathbf{v}_s\times\mathbf{B}/c) = \nabla p_s$. Векторно множачи на $\mathbf{B}$, дістаємо

$$\mathbf{v}_{\perp s} = \underbrace{c\,\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}}_{\mathbf{v}_E} + \underbrace{\frac{c}{q_s n B^2}\,\mathbf{B}\times\nabla p_s}_{\mathbf{v}_{*s}}. \tag{5.18}$$

Перший доданок — дрейф (3.2), однаковий для всіх сортів. Другий називають *діамагнітним дрейфом*: у нього q_s стоїть у знаменнику, тому він *протилежний* для іонів і електронів. Це не дрейф ведучих центрів (вони нерухомі, див. вище), а швидкість рідини, зумовлена тим, що через площину проходить різна кількість частинок. У циліндрі $\nabla p_s = p_s' \mathbf{e}_r$ і $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$, тому

$$v_{*i\theta} = \frac{c\,p_i'}{enB}, \qquad v_{*e\theta} = -\frac{c\,p_e'}{enB}, \qquad j_\theta = en\,(v_{*i\theta} - v_{*e\theta}) = \frac{c\,p'}{B},$$

де $p = p_i + p_e$, а вираз для j_θ збігається з (5.14). Оскільки $p' < 0$, іони обертаються навколо осі за годинниковою стрілкою (якщо дивитися назустріч $\mathbf{B}$), електрони — проти, а струм тече так, що його поле *послаблює* B всередині (рис. 5.9).

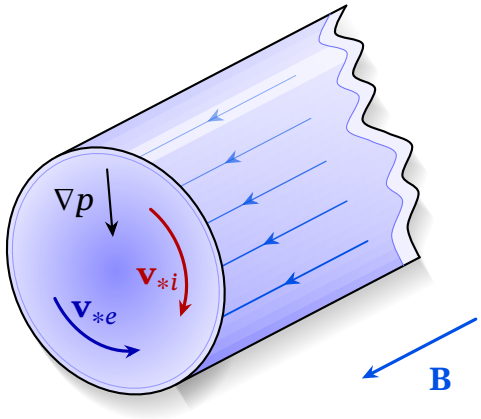


Рис. 5.9. Діамагнітні дрейфи в циліндрі з тиском, що спадає від осі. Іони й електрони обертаються в протилежні боки; сумарний струм послаблює B всередині шнура

Для утримання з цього випливають три речі.

- *Утримання є балансом сил.* Підставивши в $\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}/c$ струм із закону Ампера, $j_\theta = -(c/4\pi)\,dB/dr$, повертаємося до (5.15): діамагнітний струм створює саме ту силу $\mathbf{j} \times \mathbf{B}/c$, яка радіально тримає тиск. Чим крутіший профіль, тим тонший і густіший струмовий шар; саме ж послаблення поля на осі задає лише тиск: $\Delta(B^2/8\pi) \approx p(0)$.
- *Дрейф замкнений.* У циліндрі $\mathbf{v}_*$ напрямлений уздовж θ, тобто нікуди не веде: жодна частинка не покидає шнур, кожен сорт лише обертається навколо осі. У торі ж до цього додається вертикальний дрейф (∇B і кривизна, розд. 3), що розділяє заряди — звідси потреба в закрутці ліній поля.
- *Радіальне поле задає обертання.* Сумарна швидкість іонів $v_{i\theta} = v_E + v_{*i}$: радіальне поле E_r може вповні скомпенсувати діамагнітний дрейф іонів, і тоді вони спокійні, а електрони (за $T_e \approx T_i$)

обертаються з подвоєною швидкістю. Зсув $v_E(r)$ гасить турбулентні вихори, тому на ньому ґрунтується утворення бар'єрів перенесення (режим покращеного утримання, H-мода [7]).

Числова оцінка. Для $T_i = 10$ кеВ, $B = 5 \times 10^4$ Гс і характерної довжини профілю $L_p = |p/p'| = 50$ см діамагнітна швидкість іонів $v_{*i} = cT_i/(eBL_p) \approx 4{\times}10^5$ см/с $= 4$ км/с. Вона менша за теплову $v_{Ti} \sim 7{\times}10^7$ см/с (дейтерій) у $\sim L_p/r_{Li} \sim 10^2$ разів, тому плазма «тече» повільно, хоча кожна частинка рухається швидко. Таку саму за модулем (за $T_e = T_i$), але протилежну за напрямом фазову швидкість v_{*e} має дрейфова хвиля (§ 8.13).

Чому можна нехтувати електричною силою. У рівнянні руху плазми як цілого (5.1) електрична сила $\rho_q \mathbf{E}$ відсутня: спершу її скоротила квазінейтральність, а тепер перевіримо, що й за точнішого розгляду вона мала. За Гауссом $\rho_q = \nabla \cdot \mathbf{E}/4\pi \sim E/4\pi L$, тому $\rho_q E \sim E^2/4\pi L$. Натомість $j \times B/c \sim B^2/4\pi L$. Відношення $E^2/B^2 \sim v^2/c^2 \ll 1$ (бо $E \sim vB/c$): електричною силою можна знехтувати для повільних ($v \ll c$) рухів — тієї ж умови, що й для струму зміщення.

Де МГД чесно спрощує. У рівнянні руху простої МГД тиск задається скаляром. Це природне наближення для достатньо частих зіткнень, коли вони встигають вирівняти тиск за напрямками (ізотропізувати розподіл). У сильно замагніченій беззіткнювальній плазмі збереження першого адіабатичного інваріанта приводить до анізотропії: $p_\perp$ і $p_\parallel$ можуть відрізнятися. Тоді потрібен двотисковий (окремі $p_\perp$ та $p_\parallel$) або кінетичний опис (розд. 7). Водночас для довгохвильових мод із майже ізотропним розподілом МГД може залишатися корисним навіть за слабких зіткнень — її застосовність визначається не самим фактом $\lambda_{\text{пр}} > L$, а замиканням, частотами та відношенням характерних масштабів до r_L і λ_D.

Що це змінює для керованого синтезу. Кожен із описів «відповідає» за свою частину проблеми (табл. 5.2).

Таблиця 5.2. Які ефекти й моделі що дають для керованого синтезу.

Ефект	Модель	Наслідок для керованого синтезу
Дебаївський шар біля стінки й дивертора	шар Бома (§ 1.8): $u \geq c_s$, $\varphi_f \approx -3T_e/e$	усе падіння потенціалу зосереджене у шарі завтовшки $\sim \lambda_D$; він визначає потік тепла $\sim nc_s(\ldots)T_e$ на матеріал

Продовження на наступній сторінці

Таблиця 5.2. Які ефекти й моделі що дають для керованого синтезу. (Продовження)

Ефект	**Модель**	**Наслідок для керованого синтезу**
Відсікання при $\omega < \omega_p$	$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$	хвиля з $f_{ce} = \omega_{ce}/(2\pi) \approx 1{,}4 \times 10^{11}$ Гц для $B = 5$ Тл має $n_{\text{кр}} \approx 2{,}5 \times 10^{14} > 10^{14}$, тобто O-мода проходить у плазму (розд. 6) й нагріває її на циклотронному резонансі
Провідність Спітцера $\sigma \propto T^{3/2}$	кулонівські зіткнення	омічний нагрів слабшає з температурою, потрібен додатковий нагрів: пучки нейтралів, ВЧ-хвилі й α-частинки
Дрейфи та збереження μ	рух окремої частинки	чисто тороїдальне поле не утримує, потрібна закрутка ліній (токамак, стеларатор); дзеркало має конус втрат
$\beta = 8\pi p/B^2$	МГД-рівновага	потужність синтезу $P_f \propto \beta^2 B^4$ (див. нижче), потрібні сильні надпровідні магніти, а β обмежене стійкістю
Класичний і аномальний перенос	кінетика, турбулентність	класична оцінка дає $\tau \sim 10^3$ с, реально лише секунди; через це установки доводиться робити великими

Два рядки таблиці варто виписати. По-перше, чому «$P_f \propto \beta^2 B^4$». Повна концентрація частинок $2n$, тому $p = 2nT$, і потужність синтезу

$$P_f = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle E_f = \frac{p^2}{16\, T^2} \langle \sigma v \rangle E_f .$$

У вузькому інтервалі від 10 до 20 кеВ відомі значення $\langle \sigma v \rangle$ приблизно зростають як T^2. Лише як локальну оцінку в цьому інтервалі можна тому писати $P_f \propto p^2 = (\beta B^2/8\pi)^2 \propto \beta^2 B^4$. Це не є універсальним законом реакції для всіх температур. Подвоєння поля при тому самому β дає у 16 разів більшу потужність, і це головна причина прагнення до сильних полів. Для плазми з $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T_e = T_i = 10$ кеВ маємо $p = 3{,}2 \times 10^6$ дин/см^2 (3,2 бар), магнітний тиск за 5×10^4 Гс дорівнює ≈ 100 бар, тож $\beta \approx 3\,\%$.

По-друге, *класичний* перенос. Поперечну теплопровідність іонів оцінюємо як $\chi_\perp \sim r_{Li}^2 \nu_{ii}$ (крок r_L, частота кроків ν_{ii}). Для $r_{Li} \approx 0{,}3$ см

і $\nu_{ii} \approx \nu_{ei}/80 \approx 10^2$ с$^{-1}$ маємо $\chi_\perp \sim 10$ см^2/с, а час витоку тепла з шнура розміру $L \sim 1$ м $\tau \sim L^2/\chi_\perp \sim 10^3$ с. Тобто за класичною оцінкою плазма трималась би близько тисячі секунд (десятки хвилин). Насправді τ_E становить секунди — на три порядки менше. Різницю дає *аномальний* перенос, спричинений турбулентністю [7], і її не можна отримати ні з одно-, ні з дворідинної МГД: потрібен кінетичний (турбулентний) опис. Це оцінка за порядком величини: точні коефіцієнти змінюють результат не більш ніж у десять разів, але не на три порядки.

§ 5.12. Як це вимірюють: магнітні виміри

У рідинній картині плазма — провідне середовище зі струмом і тиском, а магнітне поле є її відгуком: струм створює поле за законом Ампера $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = 4\pi I/c$, а тиск послаблює поле всередині за (5.15). Поза плазмою поле можна виміряти звичайною котушкою. За законом Фарадея, котушка з N витків площі S у полі $B(t)$ дає ЕРС $\mathcal{V} = -(NS/c)\,dB/dt$; сигнал інтегрують, і $\int \mathcal{V}\,dt \propto B$. Різні геометрії котушок дають різні величини: струм, енергію, положення шнура.

Пояс Роговського: повний струм. Гнучку котушку з рівномірним намотуванням (n_c витків на одиницю довжини, переріз S) [1] замикають навколо плазмового шнура (рис. 5.10 а). Потік крізь неї $\Phi = n_c S \oint B_\theta\,dl = (4\pi n_c S/c)\,I$ за законом Ампера, тому

$$\boxed{\int \mathcal{V}\,dt = -\frac{4\pi n_c S}{c^2}\,I.} \tag{5.19}$$

Результат не залежить ні від розподілу струму по перерізу, ні від форми контуру. Це робить пояс основним датчиком струму плазми.

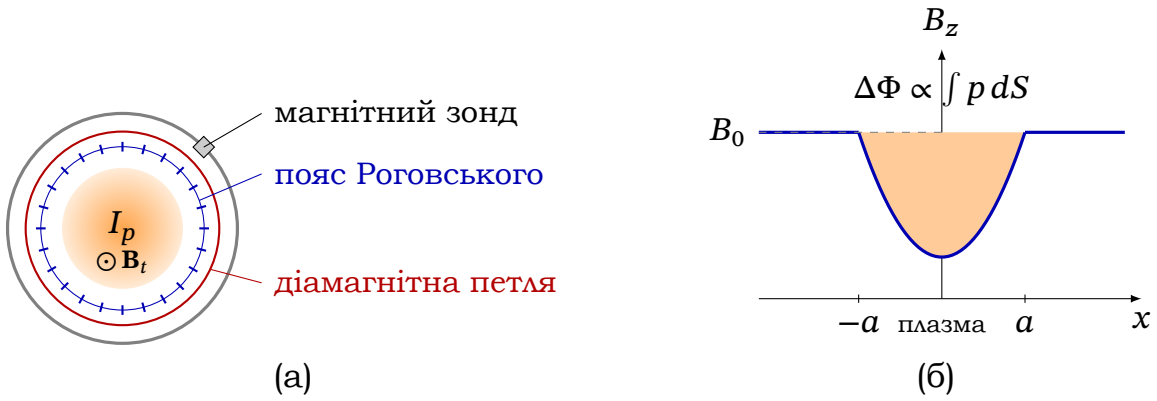
Числова оцінка. Для $n_c = 10$ см$^{-1}$, $S = 1$ см^2 і наростання струму 1 МА за 0,1 с ЕРС дорівнює $4\pi n_c S\,\dot I/c^2 \approx 4\times10^{-3}$ статВ $\approx 1{,}3$ В (1 статВ ≈ 300 В).

Діамагнітна петля: енергія плазми. Петля, що охоплює плазмовий шнур у площині, перпендикулярній до $\mathbf{B}_0$ (там же, де і пояс), вимірює потік поздовжнього поля [7]. З балансу тисків (5.15) при $\beta \ll 1$ поле всередині плазми $B_z \approx B_0 - 4\pi p/B_0$ (рис. 5.10 б), тобто потік зменшується на

$$\boxed{\Delta\Phi = -\frac{4\pi}{B_0}\int p_\perp\,dS.} \tag{5.20}$$

Для ізотропної плазми у тороїдальній системі з великим радіусом R повна теплова енергія $W = \frac{3}{2}\int p\,dV \approx \frac{3}{2}(2\pi R)\int p\,dS = \frac{3}{4}RB_0|\Delta\Phi|$.

Числова оцінка. Для $R = 150$ см, $a = 50$ см, $B_0 = 5 \times 10^4$ Гс і $p = 3{,}2 \times 10^6$ дин/см^2 (задача 5.2) маємо $\int p\,dS = p\pi a^2$ і $|\Delta\Phi| = 4\pi p\,\pi a^2/B_0 \approx 6 \times 10^6$ Мкс (0,06 Вб), тобто лише $\beta/2 \approx 1{,}6\,\%$ повного тороїдального потоку $B_0\pi a^2$. Звідси $W \approx 3{,}5$ МДж.



(а) (б)

Рис. 5.10. Магнітні виміри: (а) переріз плазмового шнура з поясом Роговського (струм I), діамагнітною петлею (потік поля B_z) і магнітним зондом на стінці; (б) плазма послаблює поле B_z всередині ($\Delta\Phi \propto \int p\,dS$; ефект перебільшено, вертикальну вісь обрізано)

Магнітні зонди. Невелика котушка біля стінки вимірює локальну похідну $\dot{B}$. Для збурення $\widetilde{B}\,e^{-i\omega t}$ сигнал $|\mathcal{V}| = (NS/c)\,\omega\widetilde{B}$ зростає з частотою, тому зонди чутливі до швидких збурень. Приклад: $N = 100$, $S = 1$ см^2, $\widetilde{B} = 1$ Гс і $f = 10$ кГц дають ≈ 60 мВ. За масивом зондів уздовж обходу шнура визначають також його положення й форму (§ 9.9).

Межі застосовності.

- Усі котушки вимірюють лише *зміни* потоку: інтегратор дрейфує, тому тривалі розряди (хвилини) потребують особливої точності. Крім того, котушка вимірює все, що створює потік: пояс Роговського дає повний струм, включно з вихровими струмами в камері.
- Сигнал діамагнітної петлі становить лише 1–2 % потоку тороїдального поля. Його треба відокремити від зміни B_0 другою, компенсаційною петлею, і точність результату обмежена точністю цього віднімання.
- Петля вимірює $p_\perp$, а не повний тиск; у токамаку на нього накладається парамагнітний внесок полоїдального поля струму, який віднімають за незалежними вимірами I.

- Формула (5.20) виведена при $\beta \ll 1$ й у наближенні балансу тисків; для сильно деформованого поля потрібна повна МГД-рівновага.
- Металева камера екранує швидкі збурення: час проникнення поля крізь стінку обмежує смугу частот, тому датчики розташовують усередині камери або враховують стінку.

Отже, магнітні виміри безпосередньо застосовують закон Ампера, баланс тисків і закон Фарадея: перший дає струм, другий — енергію, а третій перетворює змінне поле на електричний сигнал. Це найпростіші діагностики плазми: вони не потребують лазера, не збурюють плазму й працюють на кожній установці.

Головне в розділі

- Рідинний опис оперує усередненими полями n, $\mathbf{v}$, p і не є синонімом частих зіткнень, але потребує замикання.
- Сума рівнянь руху електронів та іонів дає однорідинну МГД; ідеальна МГД визначається рівнянням $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c = 0$.
- Магнітне поле «вморожене» в плазму (вмороженість порушується при $R_m \lesssim 1$ і в тонких струмових шарах, §5.10); параметр $\beta = 8\pi p/B^2$ порівнює газокінетичний і магнітний тиски.
- Рівновага плазми — баланс $\nabla p = \mathbf{j}\times\mathbf{B}/c$, тобто $p+B^2/8\pi = \text{const}$ поперек поля (у плоскому шарі й циліндрі); у тонких струмових шарах лінії пересполучаються.
- Діамагнітний струм виникає завдяки градієнту тиску й гірації, хоча центри орбіт нерухомі.
- Альвенівська хвиля з швидкістю $v_A = B/\sqrt{4\pi\rho_m}$ — перша колективна мода замагніченої плазми.
- Магнітні виміри ґрунтуються на законах Ампера й Фарадея та балансі тисків: пояс Роговського дає струм, діамагнітна петля — енергію, зонди — швидкі збурення (§5.12).

Задачі

5.1. ★★☆ Довгим соленоїдом з n витками на одиницю довжини тече струм I. Знайдіть тиск на бічну поверхню соленоїда.

5.2. ★☆☆ Плазма з $n_e = n_i = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T_e = T_i = 10$ кеВ. Знайдіть тиск і поле, при якому $\beta = 1$. Яким буде β при $B = 5 \times 10^4$ Гс?

5.3. ★★☆ Оцініть час дифузії магнітного поля для плазми з $T_e = 1$ кеВ, $\ln\Lambda = 15$, $L = 1$ м. Знайдіть магнітне число Рейнольдса при швидкості руху плазми 10^5 см/с.

5.4. ★☆☆ Знайдіть швидкість Альвена для водневої плазми з $n_i = 10^{14}$ см$^{-3}$ у полі $B = 10^4$ Гс і порівняйте її з тепловою швидкістю іонів v_{Ti} при $T_i = 10$ кеВ.

5.5. ★★★ Покажіть, що сила на одиницю об'єму $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}/c$ записується як $f_i = \partial_j T_{ij}$ з тензором (5.10). Знайдіть магнітний тиск при $B = 5{,}3$ Тл (у барах) і порівняйте з газовим тиском плазми в задачі 5.2. Чому дорівнює β?

5.6. ★★☆ Виведіть швидкість альвенівської хвилі, розглядаючи силову лінію як струну з натягом $B^2/4\pi$. Знайдіть v_A для дейтерієвої плазми $n_i = 10^{14}$ см$^{-3}$, $B = 5 \times 10^4$ Гс і час, за який хвиля проходить $L = 1$ м.

5.7. ★★☆ Для дейтерієвої плазми з $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T = 10$ кеВ, $B = 5\times10^4$ Гс оцініть $\lambda_{\text{пр}} = v_{Te}/\nu_{ei}$, r_{Li}, відношення $D_\perp/D_\parallel$. Поясніть, чому МГД застосовна поперек поля, хоча довжина пробігу набагато більша за розмір установки.

5.8. ★★★ Для позитивних частинок у полі $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ з концентрацією $n(x)$ покажіть, що центр кола має координату $x_g = x + v_y/\omega_c$. Знайдіть потік Γ_y через площину $x = x_0$ і густину струму j_y. Перевірте збіг із (5.14).

5.9. ★★★ Покажіть, що при поперечному стисненні вмороженої силової трубки $B/\rho = \text{const}$ (довжина трубки не змінюється), а при ізотропному стисненні $B \propto \rho^{2/3}$. У скільки разів зросте B хмари, що колапсує в зорю з ростом густини в 10^6 разів?

5.10. ★★★ Сонце обертається з $\Omega \approx 2{,}7 \times 10^{-6}$ рад/с, сонячний вітер має швидкість 400 км/с. З умови вмороженості знайдіть кут між $\mathbf{B}$ і радіальним напрямом на орбіті Землі ($r = 1{,}5 \times 10^8$ км): $\tan\psi = \Omega r/v$.

5.11. ★★☆ Діамагнітна петля зареєструвала зменшення потоку тороїдального поля $|\Delta\Phi| = 3 \times 10^6$ Мкс у токамаку з $R = 150$ см, $B_0 = 5 \times 10^4$ Гс. Знайдіть теплову енергію плазми W, вважаючи тиск ізотропним. Чи можна за цим сигналом визначити окремо n і T?

5.12. ★★☆ Пояс Роговського має $n_c = 20$ см$^{-1}$ і $S = 0{,}5$ см^2. Яким буде інтеграл $\int \mathcal{V}\,dt$ (в В·с) при $I = 1$ МА? Чи залежить результат

? від положення шнура всередині пояса?

? **5.13.** ★★☆ Плазма має $T_e = 1$ кеВ, $\ln\Lambda = 15$, $n = 10^{14}$ см$^{-3}$ і перебуває в полі $B = 5$ Тл. (а) Оцініть питомий опір уздовж і поперек поля за Спітцером: $\eta_\parallel = 5{,}2\times10^{-5}\,\ln\Lambda/T^{3/2}$ Ом·м (T в еВ), $\eta_\perp = 2\eta_\parallel$. (б) Яким був би $\eta_\perp$, якби опір поперек поля зростав у $(\omega_{ce}/\nu_{ei})^2$ разів за аналогією зі слабоіонізованим газом? (в) Чому в повністю іонізованій плазмі цього не відбувається? Частоту зіткнень візьміть $\nu_{ei} = 2{,}91\times10^{-6}\,n\ln\Lambda\,T^{-3/2}$ с$^{-1}$.

Контрольні питання

1. Чому плазма діамагнітна? Який зв'язок між діамагнетизмом і рівнянням (5.15)?
2. Що таке магнітний тиск і натяг силових ліній? Як вони входять в рівняння МГД?
3. Що означає вмороженість поля? Від якого параметра залежить, чи вона виконується?
4. Як із закону Ампера й сили Лоренца отримати тензор натягів і розкласти силу на тиск і натяг? Чому магнітна сила ніколи не діє вздовж поля?
5. Чому плазма майже без зіткнень описується рівняннями рідини поперек поля, але не вздовж? Яку роль виконує гірація?
6. Чому вмороженість поля є наслідком дрейфу $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$? Звідки береться діамагнітний струм, якщо центри орбіт нерухомі?
7. Чому джоулеве тепло не порушує збереження повної енергії?
8. Коли МГД непридатна (анізотропія тиску, беззіткнювальна плазма вздовж $\mathbf{B}$)?
9. Чому силові лінії поводяться як натягнуті гумові нитки, що відштовхуються одна від одної?
10. Чому діамагнітна петля вимірює енергію плазми, а пояс Роговського — струм? Які закони лежать в основі кожного з них?

6 Хвилі в замагніченій плазмі

У найпростішому розумінні хвиля є поширенням збурення: завдяки внутрішнім силам середовища воно передається від однієї області простору до сусідньої.

Для плазми це твердження має особливо багатий зміст. Плазма одночасно має тиск, електричні заряди, струми та магнітне поле. Тому після малого збурення відновлювальну дію можуть створювати зовсім різні фізичні механізми. У розд. 2 це було електричне поле розділених зарядів (ленгмюрівські коливання) і взаємна індукція **E** та **B** (електромагнітні хвилі, де «відновлює» саме поле, а плазма лише змінює ε). У цьому розділі додаються градієнт тиску і, у замагніченій плазмі, натяг силових ліній та тиск магнітного поля.

Через таке розмаїття механізмів плазма має не одну хвилю з єдиною «швидкістю звуку», а цілу систему хвильових мод, кожна зі своєю швидкістю й поляризацією. У розд. 2 ми вивчали хвилі в незамагніченій холодній плазмі: ленгмюрівські коливання ($\omega \approx \omega_p$) і поперечні електромагнітні хвилі ($\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2$). Тепер з'являється магнітне поле, а разом із ним «нові» хвилі — альвенівська, магнітозвукові, циклотронні. Що ж тоді з попередніми? Вони не зникають, але магнітне поле їх *видозмінює*: розщеплює поперечну хвилю на дві (R і L), змішує поздовжні й поперечні коливання, додає нові низькочастотні гілки. Незмінними лишаються лише окремі випадки: ленгмюрівська хвиля вздовж $\mathbf{B}_0$ ($\omega = \omega_p$) та O-мода впоперек поля ($\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2$). При $B_0 \to 0$ усе повертається до розд. 2, а при $\omega \ll \omega_{ci}$ (частота обертання іонів навколо $\mathbf{B}_0$, розд. 3) і великих масштабах гілки переходять у МГД-хвилі. Докладніше про це — у § 6.7 і в табл. 6.3 наприкінці розділу. Розглянемо спершу низькочастотні хвилі (звукову, іонно-звукову та МГД), потім високочастотні моди холодної замагніченої плазми.

§ 6.1. Що в плазмі може бути відновлювальною силою?

Корисно почати не з дисперсійного рівняння, а з фізичної картини. Уявімо, що деяку ділянку плазми трохи змістили від положення

рівноваги. Щоб виникла хвиля, це зміщення повинно породити силу, яка намагається повернути систему назад.

У звичайному газі такою силою є градієнт тиску. Якщо невеликий об'єм газу стиснути, його тиск зростає і виникає сила, спрямована назовні. Якщо ж цей об'єм розрідити, тиск падає, і сусідні області штовхають його назад.

У плазмі до цього додається магнітне поле. Викривлення силових ліній породжує магнітний натяг, а зміна величини поля — зміну магнітного тиску

$$p_B = \frac{B^2}{8\pi}. \tag{6.1}$$

Тому вже на якісному рівні можна передбачити три важливі типи відновлювальної дії (рис. 5.3 у розд. 5):

1. газодинамічний тиск;
2. натяг магнітних силових ліній;
3. зміна магнітного тиску.

Перший механізм дає звукову хвилю, другий — альвенівську, а поєднання тиску плазми та магнітного поля породжує магнітозвукові хвилі.

§ 6.2. Звукова й іонно-звукова хвилі

Почнемо з найпростішого випадку — плазми без магнітного поля. Якщо зіткнення встигають підтримувати в кожному малому об'ємі максвеллівський розподіл з однаковою температурою всіх сортів (довжина вільного пробігу набагато менша за довжину хвилі), плазму можна розглядати як звичайне стисливе середовище (рис. 6.1). Рівняння неперервності, руху та адіабатичний зв'язок $\delta p = c_s^2 \delta\rho$ після лінеаризації над однорідною рівновагою ($\rho_m = \rho_0 + \delta\rho$) дають

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla\cdot\delta\mathbf{v} = 0, \qquad \rho_0 \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \delta p, \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta\rho = 0, \qquad c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_m}\right)_S = \frac{\gamma (p_e + p_i)}{\rho_m}. \tag{6.3}$$

Тут $p_e + p_i$ — повний тиск плазми, γ — показник адіабати ($\gamma = 5/3$, бо зіткнення підтримують ізотропний тиск). Отже, звук виникає тому, що локальне стискання породжує зміну тиску, а зміна тиску породжує рух, який передає збурення сусіднім ділянкам.

Звук без зіткнень: іонно-звукова хвиля. Формула з одним γ працює, поки зіткнень достатньо. У розрідженій гарячій плазмі довжина вільного пробігу більша за довжину хвилі, температури сортів не вирівнюються, і для кожного сорту потрібен свій γ. Звук у такій плазмі

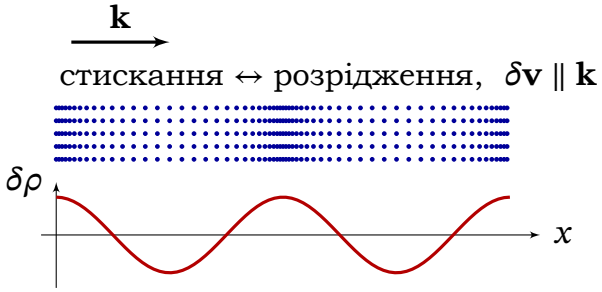


Рис. 6.1. Звукова хвиля як поширення чергувань стискання та розрідження: частинки коливаються вздовж напрямку поширення, а не «їдуть» разом із хвилею.

лишається поздовжньою хвилею стискання й розрідження, але вже беззіткнювальною; її називають *іонно-звуковою*. Виведемо її швидкість. Інерція належить іонам, а електрони встигають встановити больцманівський розподіл. Це можливо, коли хвиля *повільна* порівняно з електронами: її фазова швидкість набагато менша за теплову швидкість електронів, $\omega/k \ll v_{Te}$, тобто $\omega \ll kv_{Te}$. Тоді за період хвилі електрон багато разів пробігає її довжину, встигає перерозподілитися в потенціалі φ і має густину $n_0 e^{e\varphi/T_e}$ (рівновага в полі). Навпаки, у ленгмюрівській хвилі $\omega \gg kv_{Te}$: електрони «не встигають» вийти з області стискання (адіабатичне стискання, § 2.3). Спершу розглянемо найпростіший випадок: холодні іони ($T_i = 0$) із зарядом $Z = 1$. Шукаємо збурення у вигляді $\propto e^{i(kx-\omega t)}$, тож $\partial_t \to -i\omega$, $\partial_x \to ik$.

Електрони. Больцманівська густина $n_e = n_0 e^{e\varphi/T_e}$ після лінеаризації ($e^x \approx 1 + x$) дає

$$\frac{n_{e1}}{n_0} = \frac{e\varphi}{T_e}.$$

Іони. На іон діє сила $-e\,\partial_x\varphi$, тому рівняння руху й неперервності, $\partial_t n_{i1} + n_0 \partial_x v = 0$, мають вигляд

$$-i\omega m_i v = -ik\,e\varphi, \qquad -i\omega n_{i1} + ikn_0 v = 0,$$

звідки швидкість іонів і збурення їхньої густини виражаються через потенціал:

$$v = \frac{k\,e\varphi}{m_i\omega}, \qquad \frac{n_{i1}}{n_0} = \frac{kv}{\omega} = \frac{k^2 e\varphi}{m_i\omega^2}.$$

Поле. Потенціал зв'язує густини сортів рівняння Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, тобто $k^2\varphi = 4\pi e\,(n_{i1} - n_{e1})$. Підставляємо обидві густини й скорочуємо на φ:

$$k^2 = 4\pi n_0 e^2 \left[\frac{k^2}{m_i\omega^2} - \frac{1}{T_e}\right] = \frac{\omega_{pi}^2 k^2}{\omega^2} - \frac{1}{\lambda_{De}^2},$$

де $4\pi n_0 e^2/m_i = \omega_{pi}^2$ і $4\pi n_0 e^2/T_e = 1/\lambda_{De}^2$. Отже, $k^2 + \lambda_{De}^{-2} = \omega_{pi}^2 k^2/\omega^2$. Оскільки

$\omega_{pi}^2\lambda_{De}^2 = T_e/m_i$,

$$\omega^2 = \frac{k^2\,T_e/m_i}{1 + k^2\lambda_{De}^2}.$$

Знаменник має ясний зміст: електрони, що перерозподілилися за Больцманом, екранують поле, яке тягне іони, і тим послаблюють повертальну силу.

Для іонів із зарядом Z і скінченною температурою T_i ті самі кроки (їх подано в задачі 6.9) дають дисперсійне рівняння іонно-звукової хвилі

$$\boxed{\omega^2 = k^2\left[\frac{ZT_e}{m_i\,(1 + k^2\lambda_{De}^2)} + \frac{3T_i}{m_i}\right]}, \tag{6.4}$$

де Z — заряд іона (для водню $Z = 1$) [7]. При $k\lambda_{De} \ll 1$ маємо $\omega = kc_s$ зі швидкістю $c_s^2 = (ZT_e + 3T_i)/m_i$. Вона відповідає формулі $c_s^2 = (\gamma_e p_e + \gamma_i p_i)/\rho_m$ з окремим γ для кожного сорту: ізотермічні електрони ($\gamma_e = 1$) дають ZT_e, а іони (адіабата одновимірного стискання, $\gamma_i = 3$) — $3T_i$. При $T_i \ll T_e$ c_s збігається з граничною швидкістю іонів в критерії Бома (§ 1.8), і це не випадковість: іони мають входити в шар зі швидкістю не меншою за c_s, щоб потенціал у шарі спадав монотонно, без осциляцій. При $k\lambda_{De} \ll 1$ хвиля — звичайний звук, швидкість якого визначає *електронна* температура ($T_e \gg T_i$) і *іонна* маса; при $k\lambda_{De} \gg 1$ частота прямує до ω_{pi} (при $k\lambda_{De} = 1$ вона вже $\omega_{pi}/\sqrt{2}$). Така хвиля існує вже в дворідинному описі, а кінетика (§ 7.8) визначає лише її *загасання*. Декремент (для $Z = 1$ і $k\lambda_{De} \ll 1$) [7] $\operatorname{Im}\omega/\omega \approx -\sqrt{\pi/8}\left[\sqrt{m_e/m_i} + (T_e/T_i)^{3/2}e^{-T_e/2T_i - 3/2}\right]$ малий лише за $T_e \gg T_i$; при $T_e \sim T_i$ хвиля сильно загасає на іонах, і її не спостерігають.

Числова оцінка. Водневий розряд із $T_e = 10$ еВ, $T_i \ll T_e$, $n = 10^{12}$ см$^{-3}$: $\lambda_{De} \approx 2{,}4 \times 10^{-3}$ см, $c_s \approx 3{,}1 \times 10^6$ см/с, $f_{pi} \approx 210$ МГц. Хвиля довжиною 1 см має $k\lambda_{De} \approx 0{,}015$ і частоту $f \approx c_s/\lambda \approx 3$ МГц (дисперсією можна знехтувати); довжиною 1 мм — $k\lambda_{De} \approx 0{,}15$, $f \approx 31$ МГц, лише на 1 % нижче за $kc_s/2\pi$. В обох випадках $f \ll f_{pi}$.

§ 6.3. Лінеаризована МГД і загальне дисперсійне рівняння

Розглянемо ідеальну МГД (розд. 5) над рівноважним станом: однорідні ρ_0, p_0 і поле $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$, швидкість $\mathbf{v}_0 = 0$. Лінеаризуємо рівняння неперервності, руху ($\mathbf{j}\times\mathbf{B}/c = (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}/4\pi$), індукції та адіабатичності, поклавши $\delta p = c_s^2\delta\rho$ (c_s — швидкість звуку з (6.3) з одним показником

адіабати):

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla\cdot\mathbf{v}, \qquad \frac{\partial \delta\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0),$$
$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -c_s^2 \nabla\delta\rho + \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\delta\mathbf{B})\times\mathbf{B}_0. \tag{6.5}$$

Слово «ідеальна» тут істотне. Воно означає нескінченну провідність і закон Ома (5.4) $\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c=0$: магнітне поле *вморожене* в плазму, і силові лінії рухаються разом із нею. Саме тому рівняння індукції в (6.5) не містить опору. Це справедливо, поки хвиля загасає через опір набагато повільніше, ніж коливається ($k^2\nu_m \ll \omega$, $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$, тобто магнітне число Рейнольдса $R_m \gg 1$; розд. 5). Скінченну провідність розглянуто в задачі 6.6.

Для плоскої хвилі $\propto e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ індукція дає $\delta\mathbf{B} = [\mathbf{B}_0(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)]/\omega$, і після підстановки у рівняння руху (вектор $\mathbf{v}_A = \mathbf{B}_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$)

$$\omega^2\mathbf{v} = (c_s^2+v_A^2)\,\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_A)\Big[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_A)\mathbf{v} - \mathbf{v}_A(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{k}(\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{v})\Big]. \tag{6.6}$$

Це однорідна система для трьох компонент $\mathbf{v}$. Вона розпадається на дві задачі:

- $\mathbf{v}\perp$ площини $(\mathbf{k},\mathbf{B}_0)$: тоді $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}=0$ і $\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{v}=0$, і маємо одну моду *альвенівську* $\omega^2 = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_A)^2$;
- $\mathbf{v}$ у площині $(\mathbf{k},\mathbf{B}_0)$: система 2×2 з умовою розв'язності

$$\omega^4 - k^2(c_s^2+v_A^2)\,\omega^2 + k^4 c_s^2 v_A^2\cos^2\theta = 0, \tag{6.7}$$

де θ — кут між $\mathbf{k}$ та $\mathbf{B}_0$. Вона дає дві магнітозвукові моди, *швидку* і *повільну*.

Покажемо кроки. Нехай $\mathbf{k} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$, $\mathbf{v}_A = v_A\hat{\mathbf{z}}$, так що $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_A = kv_A\cos\theta$. Розпишемо (6.6) за компонентами. *Компонента y*: $(\omega^2 - k^2v_A^2\cos^2\theta)\,v_y = 0$ — альвенівська мода, що відщеплюється. *Компоненти x, z*:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - k^2(v_A^2 + c_s^2\sin^2\theta) & -k^2c_s^2\sin\theta\cos\theta \\ -k^2c_s^2\sin\theta\cos\theta & \omega^2 - k^2c_s^2\cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix} = 0.$$

Прирівнявши визначник до нуля, маємо $\omega^4 - \omega^2k^2(v_A^2+c_s^2) + k^4\big[(v_A^2 + c_s^2\sin^2\theta)c_s^2\cos^2\theta - c_s^4\sin^2\theta\cos^2\theta\big] = 0$, де вираз у дужках дорівнює $v_A^2c_s^2\cos^2\theta$, тобто (6.7).

Отже, у однорідній ідеальній МГД є *три* хвильові гілки, і всі вони недисперсійні ($\omega\propto k$).

§ 6.4. Альвенівська хвиля

Нехай $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$, тоді $\mathbf{v}_\perp$ і $\delta\mathbf{B}_\perp$ задовольняють

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi}\frac{\partial \delta\mathbf{B}_\perp}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \delta\mathbf{B}_\perp}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}_\perp}{\partial t^2} = v_A^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_\perp}{\partial z^2}, \tag{6.8}$$

$$\boxed{v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}}, \qquad \omega = \pm k_\parallel v_A. \tag{6.9}$$

Це хвиля на «струні»: магнітний натяг $B_0^2/4\pi$ відіграє роль натягу, а масова густина — роль лінійної густини (рис. 6.2). Правий член у першому рівнянні — сила натягу $(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{B}_\perp/4\pi$ з розкладу $\mathbf{j}\times\mathbf{B}/c = -\nabla(B^2/8\pi) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}/4\pi$.

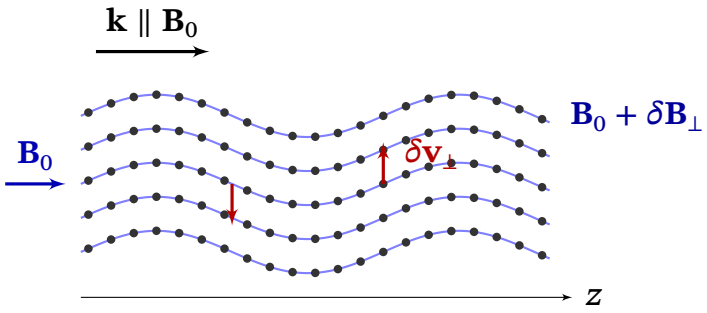


Рис. 6.2. Альвенівська хвиля: поперечне збурення поширюється вздовж магнітних силових ліній завдяки їхньому натягу. Точки — частинки плазми, вморожені в лінії й зміщені разом із ними; густина вздовж $\mathbf{B}_0$ не змінюється.

Властивості, які легко перевірити за (6.6):

- хвиля *нестислива*: $\delta\rho = 0$ і $\delta|\mathbf{B}| = 0$ у лінійному наближенні;
- вона поперечна: $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}_0$ і $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$; для хвилі, що біжить вздовж $+\mathbf{B}_0$, $\delta\mathbf{v}_\perp = -\delta\mathbf{B}_\perp/\sqrt{4\pi\rho_0}$ (співвідношення Валена [32]); енергія розподілена порівну між кінетичною та магнітною;
- для похилого поширення $\omega = k\,v_A\cos\theta$, тобто фазова швидкість $v_A\cos\theta$ залежить від напрямку, а *групова швидкість* $\partial\omega/\partial\mathbf{k} = v_A\hat{\mathbf{b}}$, $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}_0/B_0$, спрямована *завжди вздовж* поля. Енергія альвенівської хвилі поширюється лише вздовж силових ліній;
- швидкість визначається магнітним полем і густиною, а не температурою.

Це пояснює, чому збурення, створені, наприклад, спалахом на Сонці, «біжать» уздовж силових ліній у корону й сонячний вітер.

Типові значення альвенівської швидкості для різних плазм наведено в табл. 6.1. Скрізь $v_A \ll c$, але $v_A \gg c_s$ при $\beta \ll 1$.

Таблиця 6.1. Альвенівська швидкість у різних плазмах.

Плазма	B	n, см$^{-3}$	v_A
Токамак (D)	5 Тл	10^{14}	$7{,}7 \times 10^8$ см/с ($\approx c/40$)
Сонячна корона	10 Гс	10^9	$\sim 7 \times 10^7$ см/с (≈ 700 км/с)
Сонячний вітер	5 нТл	5	≈ 50 км/с

§ 6.5. Магнітозвукові хвилі

У реальній замагніченій плазмі магнітний натяг не є єдиною відновлювальною силою. Якщо збурення стискає плазму, воно змінює не лише густину та тиск, а й величину магнітного поля. З рівняння (6.7)

$$v_\pm^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2}\left[v_A^2 + c_s^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + c_s^2)^2 - 4 v_A^2 c_s^2 \cos^2\theta}\right], \tag{6.10}$$

де знак «+» відповідає швидкій моді, а «−» — повільній. Розглянемо граничні випадки.

- $\theta = 90°$ (поширення поперек поля): швидка мода

$$v_{\mathrm{ms}} = \sqrt{c_s^2 + v_A^2}, \tag{6.11}$$

  повільна мода має нульову швидкість. Дві незалежні відновлювальні дії працюють одночасно: тиск плазми дає внесок c_s^2, а магнітний тиск — v_A^2. Плазма й поле стискаються разом (рис. 6.3).
- $\theta = 0°$ (уздовж поля): швидкості v_A і c_s; швидка мода є тією з них, що більша. Магнітозвукова хвиля при цьому вироджується в альвенівську (якщо $v_A > c_s$) чи звукову (якщо $c_s > v_A$).

Фізична різниця між швидкою та повільною модою: у швидкій δp і $\delta B^2/8\pi$ змінюються *у фазі* (сумарний тиск стискається найсильніше), у повільній — *в протифазі*, так що повний тиск $p + B^2/8\pi$ майже не змінюється, а рух відбувається переважно вздовж поля. Обидві моди *стисливі*.

Залежність фазових швидкостей від кута зручно подати на полярній діаграмі (діаграма Фрідріхса, рис. 6.4). Швидка мода майже ізотропна, повільна й альвенівська відсутні поперек поля.

§ 6.6. Підсумок: хвилі в рідинному описі

Зведемо результати в одну таблицю.

Де вони трапляються: альвенівські хвилі — у сонячній короні, сонячному вітрі й токамаках (альвенівські власні моди); швидку

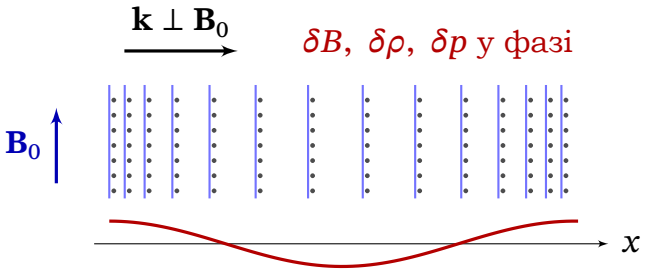


Рис. 6.3. Швидка магнітозвукова хвиля, що поширюється поперек $\mathbf{B}_0$: стискання плазми супроводжується згущенням силових ліній, тому тиск плазми й магнітний тиск діють узгоджено.

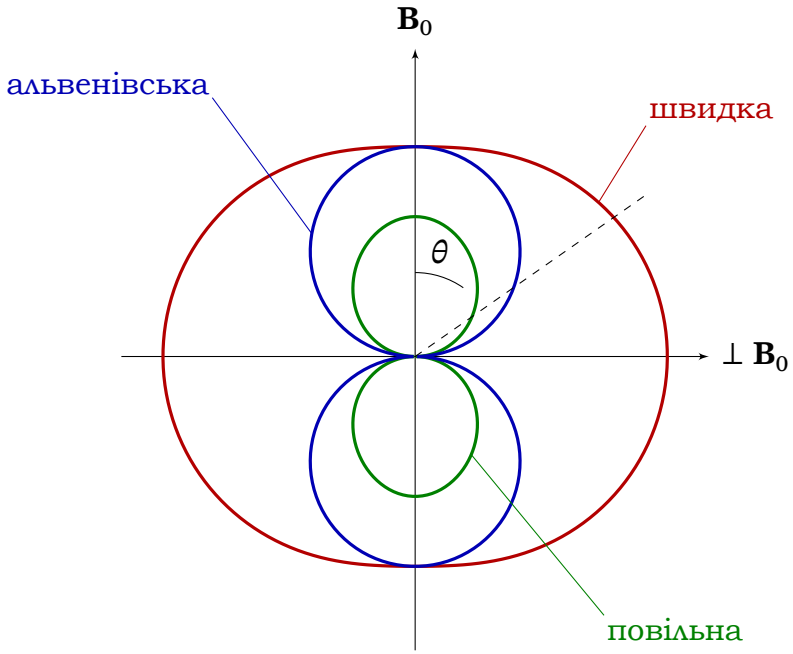


Рис. 6.4. Фазові швидкості МГД-хвиль залежно від напрямку поширення відносно $\mathbf{B}_0$ (для $v_A = 1{,}5\,c_s$): швидка, повільна й альвенівська моди.

магнітозвукову хвилю збуджують антенами для іонно-циклотронного нагріву в токамаках. Високочастотні хвилі (вістлери, X- і O-моди, гібридні резонанси) розглянемо в §6.7.

Таблиця 6.2 дає корисну фізичну карту, але її не слід сприймати як остаточну класифікацію всіх плазмових хвиль. Ми розглядали лише МГД-моди — тобто довгохвильові та повільні процеси, для яких рідинний опис є достатнім. У термоядерній плазмі β становить від 1 до 3 %, тому $v_A \gg c_s$ ($v_A \approx 7{,}7 \times 10^8$ проти $c_s \sim 10^8$ см/с), і швидка мода практично збігається з хвилею, що поширюється зі швидкістю v_A в усіх напрямках.

Таблиця 6.2. Основні хвильові моди в рідинному описі плазми.

Хвиля	Основна відновлювальна сила	Поляризація	Фазова швидкість
Звукова (без $\mathbf{B}_0$)	градієнт тиску	поздовжня	c_s
Альвенівська	магнітний натяг	поперечна, нестислива	$v_A \cos\theta$
Швидка магнітозвукова	тиск плазми + магнітний тиск (у фазі)	стискувальна	v_+
Повільна магнітозвукова	тиск плазми і магнітний тиск (у протифазі)	стискувальна, переважно вздовж $\mathbf{B}_0$	v_-

§ 6.7. Високочастотні хвилі в замагніченій плазмі

МГД описує лише повільні рухи, $\omega \ll \omega_{ci}$. Для вищих частот (зокрема НВЧ-діапазону) використовують модель *холодної* замагніченої плазми: теплом нехтуємо, а кожен сорт s рухається в полі хвилі та сталому $\mathbf{B}_0$. Нехай $\Omega_s = q_s B_0/m_s c$ — циклотронна частота з урахуванням знака ($\Omega_e = -\omega_{ce}$, $\Omega_i = \omega_{ci}$); тут $\omega_{ce} = eB_0/m_e c$ і $\omega_{ci} = ZeB_0/m_i c$ — циклотронні частоти електронів та іонів (розд. 3). Відгук середовища описує тензор діелектричної проникності (вісь $z \parallel \mathbf{B}_0$). Його записують у позначеннях S, D, P, R, L, які ввів американський фізик Т. Стікс у монографії про хвилі в плазмі [19]; вони стали загальноприйнятими.

Теоретичні відомості Нагадаємо з електродинаміки та оптики

Зі струму $\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E}$ і $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ (для залежності $e^{-i\omega t}$) $\hat{\varepsilon} = \hat{1} + 4\pi i\hat{\sigma}/\omega$. Рівняння Максвелла для плоскої хвилі дають $\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}) + (\omega^2/c^2)\hat{\varepsilon}\mathbf{E} = 0$, або для $\mathbf{N} = \mathbf{k}c/\omega$ (показник заломлення) $\mathbf{N}\times(\mathbf{N}\times\mathbf{E}) + \hat{\varepsilon}\mathbf{E} = 0$, де використано $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$. У незамагніченій плазмі $\hat{\varepsilon} = \varepsilon\hat{1}$, $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ (розд. 2). *Відсікання*: $N \to 0$ (довжина хвилі $\to \infty$, хвиля відбивається); *резонанс*: $N \to \infty$ (довжина хвилі $\to 0$, хвиля поглинається).

Вивід тензора. Для сорту s рівняння руху холодних частинок

$$-i\omega m_s \mathbf{v} = q_s\Big(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0}{c}\Big).$$

Покомпонентно, при $\Omega_s = q_s B_0/m_s c$:

$$-i\omega v_x = \frac{q_s}{m_s}E_x + \Omega_s v_y, \qquad -i\omega v_y = \frac{q_s}{m_s}E_y - \Omega_s v_x.$$

Складемо колові комбінації $v_\pm = v_x \pm i v_y$, $E_\pm = E_x \pm i E_y$ — вони розв'язують систему окремо:

$$v_\pm = \frac{i q_s}{m_s}\,\frac{E_\pm}{\omega \mp \Omega_s}, \qquad v_z = \frac{i q_s}{m_s \omega}\,E_z.$$

Тоді $\mathbf{j} = \sum_s n_s q_s \mathbf{v}_s$, $\sigma_\pm = \sum_s i n_s q_s^2/[m_s(\omega \mp \Omega_s)]$, і $\varepsilon_\pm = 1 + 4\pi i\sigma_\pm/\omega$ дає (тут $\omega_{ps}^2 = 4\pi n_s q_s^2/m_s$ — квадрат плазмової частоти сорту s)

$$\varepsilon_\mp = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega \pm \Omega_s)}, \qquad P = \varepsilon_{zz} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}.$$

Отже, $R \equiv \varepsilon_-$ і $L \equiv \varepsilon_+$ — відгуки на *колові* складові поля, а резонанс у R ($\omega = -\Omega_e = \omega_{ce}$) чи в L ($\omega = \Omega_i = \omega_{ci}$) виникає, коли поле обертається разом із частинкою. Назви S, D, P: $Sum = (R+L)/2$, $Difference = (R-L)/2$, $Plasma$; недіагональні елементи $\mp iD$ виражають обертання електрона навколо $\mathbf{B}_0$. Результат:

$$\hat\varepsilon = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad S = \frac{R+L}{2},\ D = \frac{R-L}{2}, \tag{6.12}$$

$$R = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega+\Omega_s)}, \quad L = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega-\Omega_s)}, \quad P = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}. \tag{6.13}$$

Теоретичні відомості | **Що змінює магнітне поле: гілки рівняння**

Для плоскої хвилі рівняння Максвелла дають $\mathbf{N}\times(\mathbf{N}\times\mathbf{E}) + \hat\varepsilon\mathbf{E} = 0$ — це три лінійні однорідні рівняння для трьох компонент E_x, E_y, E_z (у розд. 2 — рівняння (2.3)). Ненульовий розв'язок $\mathbf{E}$ (тобто сама хвиля) існує лише тоді, коли визначник цієї системи дорівнює нулю; ця умова і є *дисперсійним рівнянням*. Воно дає кілька залежностей $\omega(k)$ — *гілок* (розд. 2); кожна — окремий тип коливання зі своєю поляризацією.

- *Без магнітного поля* $\hat\varepsilon = \varepsilon\hat 1$ — скаляр, і єдиний виділений напрям — $\mathbf{k}$. Поле $\mathbf{E}$ або вздовж $\mathbf{k}$, або впоперек, і ці випадки не змішуються. Гілок три: ленгмюрівська ($\varepsilon = 0$, $\omega = \omega_p$) і дві поперечні ($k^2c^2 = \varepsilon\omega^2$). Поперечні збігаються: обидві поляризації рівноправні (*виродження*).
- *З магнітним полем* $\hat\varepsilon$ — тензор (6.12): з'являється ще один виділений напрям, $\mathbf{B}_0$. Звідси три наслідки. (1) Виродження знімається: праве й ліве обертання поля відрізняються ($R \neq L$), тож дві поперечні гілки розходяться. (2) Вектор $\mathbf{E}$ уже не ділиться на «вздовж» і «впоперек» $\mathbf{k}$: гілки змішуються, їхня форма залежить від кута θ між $\mathbf{k}$ і $\mathbf{B}_0$. (3) Іони, що обертаються навколо $\mathbf{B}_0$, додають низькочастотні гілки: іонно-циклотронну, альвенівську й магнітозвукові

(в межі $\omega \ll \omega_{ci}$ — це МГД-хвилі).
Перевірка: при $B_0 \to 0$ маємо $\Omega_s \to 0$, $R = L = S = P = \varepsilon$, $D = 0$. Тензор знову скалярний, R і L зливаються в поперечну гілку розд. 2. Отже, хвилі розд. 2 — окремий випадок цих гілок, а не щось окреме від них.

Хвильове рівняння для $\mathbf{E}$ у змінних $\mathbf{N} = \mathbf{k}c/\omega$ має вигляд $\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) + \hat{\varepsilon}\mathbf{E} = 0$. Зручні два граничних кути.

Поширення вздовж поля ($\theta = 0$). Поперечні хвилі розпадаються на дві кругові поляризації: $N^2 = R$ (права, обертання в той самий бік, що й електрони) і $N^2 = L$ (ліва, у бік іонів); поздовжня хвиля має $P = 0$, тобто $\omega = \omega_p$ (§ 1.3). *Чому резонанс.* Вектор $\mathbf{E}$ R-хвилі обертається в той самий бік, що й електрони навколо $\mathbf{B}_0$ (напрям відраховують від $\mathbf{B}_0$, а не від $\mathbf{k}$). При $\omega = \omega_{ce}$ електрон «бачить» стале поле й необмежено прискорюється — як гойдалка, яку штовхають у такт (циклотронний резонанс з розд. 3). Для L-хвилі так само з іонами. Особливості дисперсійних кривих (рис. 6.5):

- *резонанси*: $R \to \infty$ при $\omega = \omega_{ce}$ (електронний циклотронний резонанс, ЕЦР) і $L \to \infty$ при $\omega = \omega_{ci}$ (іонний, ІЦР); у резонансі хвиля передає енергію частинкам, що обертаються синхронно з її полем: на цьому ґрунтується нагрівання плазми;
- *відсікання*: $N^2 = 0$ при $\omega_{R,L} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \pm \omega_{ce}\right]$ (для електронної плазми); L-хвиля не поширюється нижче ω_L, а R-хвиля — у проміжку від ω_{ce} до ω_R (нижче ω_{ce} вона є вістлером);
- *вістлер* (свистяча хвиля): для $\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}$ та $\omega_{pe}^2 \gg \omega\omega_{ce}$ маємо $R \approx \omega_{pe}^2/\omega\omega_{ce}$, тому

$$\boxed{\omega = \frac{k^2 c^2\, \omega_{ce}}{\omega_{pe}^2}\, \cos\theta} \quad \text{(біля } \theta = 0\text{)}. \tag{6.14}$$

Дисперсія квадратична: $v_g = 2v_\varphi \propto \sqrt{\omega}$ [5], тож високі частоти біжать швидше за низькі. Саме це створює «падаючий свист», який чують радіоаматори після блискавки, коли імпульс поширюється магнітосферою вздовж силової лінії.

Поширення поперек поля ($\theta = 90°$). Тут моди розділяються за напрямком $\mathbf{E}$ щодо $\mathbf{B}_0$. Геометрично: в O-моді електрони рухаються вздовж поля й «не відчувають» його; в X-моді рух еліптичний, з'являється складова $E_x \parallel \mathbf{k}$ (хвиля частково поздовжня). Верхній гібридний резонанс $\omega_{UH}^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2$ зрозумілий як сума двох відновлювальних сил (поле розділення зарядів і сила Лоренца), як дві пружини; для нижнього гібридного резонансу так само, але з участю іонів.

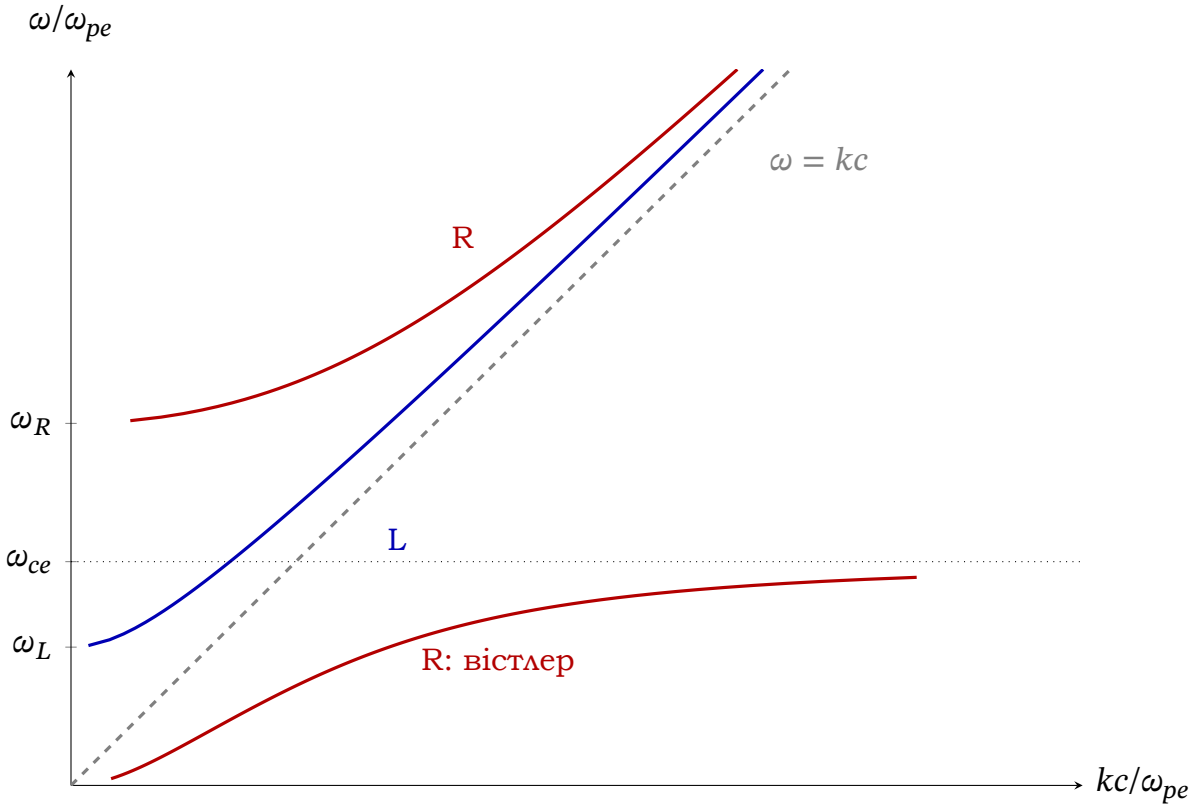


Рис. 6.5. Дисперсія R- і L-хвиль уздовж $\mathbf{B}_0$ в холодній електронній плазмі ($\omega_{ce} = \omega_{pe}$). Нижня гілка R-моди — вістлер, що асимптотично наближається до ω_{ce}.

- *Звичайна (O) мода*, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$: поле не змушує електрони обертатися, тому $N^2 = P = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ (відсікання на $\omega = \omega_{pe}$, як без поля). Цю моду використовують для зондування густини у токамаках.
- *Незвичайна (X) мода*, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$: поляризація змішана (поздовжня + поперечна), $N^2 = RL/S$. Резонанс $S = 0$ дає *верхній гібридний* резонанс

$$\omega_{UH}^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2, \tag{6.15}$$

а при $\omega \sim \sqrt{\omega_{ci}\omega_{ce}}$ — *нижній гібридний*: $\omega_{LH}^{-2} \simeq \omega_{pi}^{-2} + (\omega_{ci}\omega_{ce})^{-1}$. Хвилі нижнього гібридного резонансу застосовують для керування струмом у токамаках.

Числова оцінка. Для $n_e = 10^{14}$ см$^{-3}$, $B = 5 \times 10^4$ Гс маємо $f_{pe} \approx 90$ ГГц, $f_{ce} \approx 140$ ГГц, $f_{UH} \approx 166$ ГГц.

Мікрохвильове нагрівання на частоті 140 ГГц (її дає гіротрон — потужний генератор НВЧ на електронах, що обертаються в магнітному полі) здійснюють на ЕЦР; його називають ЕЦР-нагрівом (англ. *electron cyclotron resonance heating*, ECRH) [33, 34]: O-мода основної гармоніки поширюється в плазмі, бо $\omega_{pe} < \omega$. Альтернатива — X-мода другої гармоніки ($\omega = 2\omega_{ce}$): вона дозволяє застосувати гіротрон цієї частоти при вдвічі меншому полі, але її відсікання настає вже при

$\omega_{pe}^2 = \omega^2/2$, тобто при вдвічі меншій густині, ніж для O-моди [7]. Оскільки в токамаку $B \propto 1/R$, шар $\omega = \omega_{ce}(R)$ — вузька поверхня на певному радіусі, що дозволяє локалізувати нагрів (задача 6.8). Повну діаграму Клеммова–Муллалі–Елліса (CMA), яка показує, куди хвиля може дійти за заданих n і B, ми опускаємо; її можна знайти в монографії Стікса [19] та в курсі Чена [7] (§ 4.21).

Як це вимірюють: обертання Фарадея. Лінійно поляризована хвиля, що йде вздовж $\mathbf{B}_0$, є сумою R- і L-хвиль, які мають різні показники заломлення $N_R \neq N_L$. Через набіг різниці фаз вони повертають площину поляризації [5]. Для $\omega \gg \omega_{pe}, \omega_{ce}$ з (6.13) $N_{R,L} \simeq 1 - \dfrac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2}\left(1 \pm \dfrac{\omega_{ce}}{\omega}\right)$, тож кут повороту

$$\boxed{\psi = \frac{\omega}{2c}\int (N_L - N_R)\,dl = \frac{e^3\lambda^2}{2\pi m_e^2 c^4}\int n_e B_\parallel\,dl \approx 2{,}6\times 10^{-17}\lambda^2 \int n_e B_\parallel\,dl} \tag{6.16}$$

(СГС: λ і l у см, n_e у см$^{-3}$, $B_\parallel$ у Гс; ψ у радіанах). Оскільки $\psi \propto \int n B_\parallel\,dl$, поєднання з інтерферометром (фаза $\propto \int n\,dl$, § 2.7) дає $\int B_\parallel\,dl$, тобто інформацію про поле *всередині* плазми, зокрема про полоїдальне поле й розподіл струму в токамаку. У астрофізиці той самий ефект ($\psi \propto \lambda^2$) дає магнітне поле міжзоряного середовища за пульсарами. Числову оцінку для токамака див. у задачі 6.7. Метод вимагає $\omega \gg \omega_{pe}, \omega_{ce}$; для косих променів до обертання Фарадея додається ефект Коттона–Мутона (двопроменезаломлення при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$).

§ 6.8. Межі застосовності МГД-хвиль

Для того щоб МГД-опис хвиль був виправданим, хвиля повинна бути достатньо повільною та великомасштабною порівняно з мікроскопічними процесами:

- $\omega \ll \omega_{ci}$ (інакше з'являються ІЦР та L-мода);
- $k_\perp r_{Li} \ll 1$ (інакше важливий скінченний ларморівський радіус; при $k_\perp r_{Li} \sim 1$ альвенівська хвиля переходить у кінетичну альвенівську);
- $k\,c/\omega_{pi} \ll 1$, тобто довжина хвилі велика порівняно з іонною інерційною довжиною $d_i = c/\omega_{pi}$ (інакше істотні холівські ефекти: вістлери);
- для беззіткнювальної плазми додатково враховують загасання Ландау повільної моди (розд. 7.8) та анізотропію тиску.

Якщо ж $k_\perp r_L \sim 1$, $\omega \sim \omega_c$ або важливі резонансні частинки, треба повернутися до функції розподілу $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. МГД-хвилі є не окремими об'єктами, а граничним випадком кінетичної картини (рис. 6.6): кінетичний опис має відтворити їх у межі $k_\perp r_L \to 0$, $\omega \ll \omega_{ci}$.

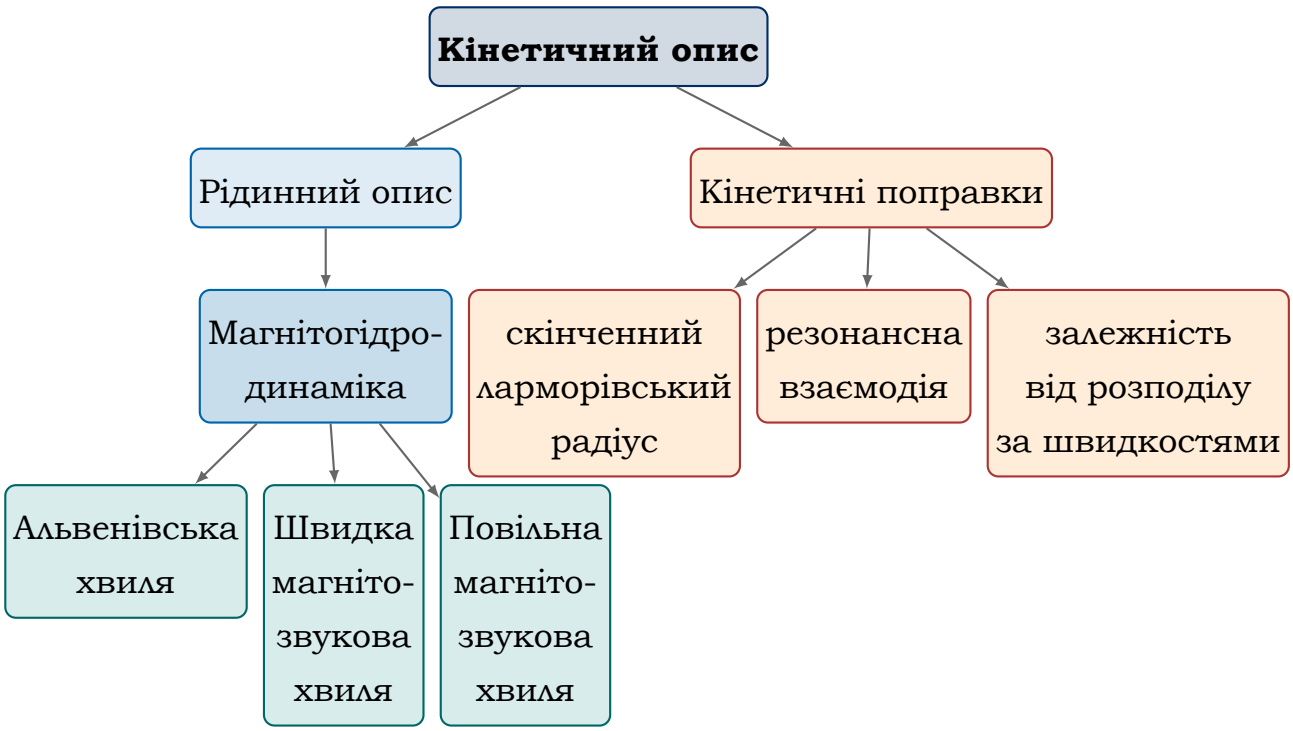


Рис. 6.6. Схематичний зв'язок між кінетичним і МГД-описами хвиль. МГД-хвилі є великомасштабною межею загальної кінетичної картини.

Карта хвиль за частотою. Усі хвилі цього розділу та розд. 2 — гілки одного дисперсійного рівняння; яка з них доступна, визначає частота (і масштаб) збурення відносно характерних частот плазми.

Звідси ж видно, чому МГД-збурення не збуджує ленгмюрівські коливання. Вони мають $\omega \approx \omega_{pe} \gg \omega_{ci}$, а МГД-збурення такої частоти не містить. Електрони встигають «підлаштуватися» під повільну зміну поля, тому плазма лишається квазінейтральною. Саме тому МГД відкидає струм зміщення й розділення зарядів: ленгмюрівські та світлові хвилі з моделі *відфільтровано*.

Чи взаємодіють хвилі? Поки амплітуда мала ($\delta B/B_0 \ll 1$, $\delta n/n \ll 1$), рівняння лінійні, і власні моди *незалежні*: збурення розкладається за гілками, і кожна еволюціонує сама (принцип суперпозиції). Тому в лінійній теорії альвенівська й магнітозвукова хвилі не «відчувають» одна одну, а ленгмюрівські коливання не збуджуються МГД-хвилею. Взаємодія виникає двома шляхами.

- *Нелінійна.* Коли $\delta B/B_0 \sim 1$, істотні квадратичні члени ($(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ тощо). Дві хвилі $(\omega_1, \mathbf{k}_1)$ і $(\omega_2, \mathbf{k}_2)$ породжують «биття» на $\omega_1 \pm \omega_2$, $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. Якщо ця комбінація збігається з третьою власною модою, хвилі резонансно обмінюються енергією (трихвильова взаємодія). Приклад — параметричний розпад альвенівської хвилі великої амплітуди на іонно-звукову та зворотну альвенівську, що важливо для сонячного вітру.
- *Лінійна, в неоднорідній плазмі.* Коли параметри середовища (B_0, n)

Таблиця 6.3. Які хвилі відповідають якому діапазону частот у замагніченій плазмі.

Діапазон ω	**Хвилі (гілки)**	**Модель**
$\omega \ll \omega_{ci}$, $k_\perp r_{Li} \ll 1$	альвенівська, швидка й повільна магнітозвукові; іонно-звукова ($T_e \gg T_i$)	МГД
$\omega \sim \omega_{ci}$ або $k_\perp r_{Li} \sim 1$	іонно-циклотронна (L-мода), кінетична альвенівська	холодна замагнічена плазма, кінетика
$\omega_{ci} \ll \omega < \omega_{ce}$	вістлер (R-мода)	холодна замагнічена плазма
$\omega \gtrsim \omega_{pe}, \omega_{ce}$	ленгмюрівська, O- і X-моди (світлові хвилі в плазмі); хвилі верхнього гібридного резонансу	розд. 2, холодна замагнічена плазма

змінюються вздовж траєкторії хвилі, гілки у деяких місцях зближуються, і хвиля може перейти з однієї гілки в іншу (перетворення мод, наприклад швидка ↔ альвенівська).

Нелінійні взаємодії та перетворення мод виходять за межі книги; тут важливо, що вони стосуються *тих самих гілок*, а не нових хвиль.

Перехід від МГД до кінетики — це перехід *від руху середовища до руху частинок, що утворюють це середовище*. Саме це ми й зробимо в розд. 7.

Головне в розділі

- Хвиля виникає тоді, коли збурення породжує відновлювальну силу та може передаватися від однієї ділянки середовища до іншої.
- У плазмі відновлювальну дію можуть створювати тиск плазми, магнітний натяг та магнітний тиск.
- Іонно-звукова хвиля існує за $T_e \gg T_i$, тоді $\omega = kc_s/\sqrt{1+k^2\lambda_{De}^2}$, $c_s^2 = ZT_e/m_i$; її загасання кінетичне.
- Лінеаризація ідеальної МГД дає три гілки: альвенівську ($\omega = kv_A\cos\theta$) та швидку й повільну магнітозвукові (6.10). Енергія альвенівської хвилі поширюється вздовж $\mathbf{B}_0$.
- Для $\omega \gtrsim \omega_{ci}$ потрібна модель холодної плазми у полі $\mathbf{B}_0$ (високочастотні хвилі): R-, L-, O-, X-моди, резонанси (ω_{ce}, ω_{ci}, ω_{UH}, ω_{LH}) та відсікання.
- МГД описує лише частину спектра плазмових хвиль. На малих масштабах та поблизу характерних частот руху частинок потрібен кінетичний опис.

Задачі

6.1. ★☆☆ Для дейтерієвої плазми токамака ($n_i = 10^{14}$ см$^{-3}$, $B = 5\times10^4$ Гс, $T_e = T_i = 10$ кеВ) знайдіть v_A, c_s (з формули для іонного звуку) і час проходу альвенівської хвилі вздовж малого радіуса $a = 2$ м. Порівняйте v_A з v_{Ti}.

6.2. ★★★ Покажіть, що рівняння (6.6) для $\mathbf{k}\perp\mathbf{B}_0$ і $\mathbf{v}\parallel\mathbf{k}$ дає $\omega^2 = k^2(c_s^2+v_A^2)$. Знайдіть границі швидкостей швидкої й повільної мод при $\theta\to0$ для $v_A > c_s$ та $v_A < c_s$.

6.3. ★★☆ Вістлерний імпульс від блискавки проходить уздовж силової лінії довжиною $L\approx10^{10}$ см. Для $f_{ce} = 1$ МГц, $f_{pe} = 5$ МГц знайдіть групову швидкість на частотах $0{,}1\,f_{ce}$ і $0{,}2\,f_{ce}$ і різницю часів приходу. Порівняйте з реальним свистом (секунди).

6.4. ★★☆ Для $n_e = 5\times10^{13}$ см$^{-3}$, $B = 3\times10^4$ Гс (водень) знайдіть f_{pe}, f_{ce}, f_{UH} і f_{LH}. Чи може X-мода з частотою f_{ce} потрапити в центр плазми?

6.5. ★☆☆ Знайдіть альвенівську швидкість для: іоносфери (O^+, $n\sim10^5$ см$^{-3}$, $B\sim0{,}3$ Гс), сонячної корони (H^+, $n\sim10^8$ см$^{-3}$, $B\sim1$ Гс) і міжзоряного середовища ($n\sim1$ см$^{-3}$, $B\sim3\times10^{-6}$ Гс).

6.6. ★★★ Врахувавши скінченну провідність ($\omega^2 = k^2v_A^2 - i\omega k^2\nu_m$, $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$), покажіть, що слабке просторове загасання альвенівської хвилі $\operatorname{Im}k = \omega^2\nu_m/(2v_A^3)$. Чому така хвиля в короні Сонця дисипує вкрай повільно?

6.7. ★★☆ Оцініть кут фарадеївського обертання площини поляризації електромагнітної хвилі з $\lambda = 0{,}02$ см (200 мкм, $f = 1{,}5$ ТГц) у токамаку ($n = 10^{14}$ см$^{-3}$, полоїдальне поле вздовж хорди $B_\parallel = 0{,}5$ Тл, шлях 1 м). Використайте $\psi = 2{,}6\times10^{-13}\lambda^2\int nB_\parallel\,dl$ (СІ: λ в м, n в м$^{-3}$, B в Тл, dl в м). Перевірте, що $\omega\gg\omega_{pe},\omega_{ce}$.

6.8. ★★☆ Поле токамака $B(R) = B_0R_0/R$, $B_0 = 6$ Тл при $R_0 = 3$ м. На якому радіусі поглинається потужність гіротрона 140 ГГц на основній гармоніці електронного циклотронного резонансу ($f_{ce} = 28\,B[\text{Тл}]$ ГГц)?

6.9. ★★☆ Виведіть дисперсійне рівняння іонно-звукової хвилі (6.4) для іонів із зарядом Z і температурою T_i. Електрони вважай-

? те больцманівськими, а для іонів візьміть адіабату одновимірного стискання ($\gamma_i = 3$).

? **6.10.** ★★☆ Знайдіть швидкість іонного звуку в водневій плазмі з $T_e = 10$ еВ, $T_i \ll T_e$. При якому $k\lambda_{De}$ частота іонного звуку стає на 10 % меншою за kc_s?

Контрольні питання

1. Що таке відновлювальна сила? Чому без неї не виникає хвильове поширення збурення?
2. Чим фізично відрізняються звукова та альвенівська хвилі?
3. Чому альвенівська швидкість залежить від B та ρ_m, але не визначається температурою плазми? У якому напрямку поширюється енергія альвенівської хвилі?
4. Яка роль магнітного тиску у магнітозвуковій хвилі? Чим відрізняються швидка й повільна моди?
5. Чому при довільному напрямку поширення виникають дві магнітозвукові моди?
6. Що таке резонанс і відсікання для R- та L-хвиль? Чому вістлер має квадратичну дисперсію?
7. Чому іонний звук існує за $T_e \gg T_i$ і сильно загасає за $T_e \sim T_i$?
8. Що відбувається з МГД-описом, коли довжина хвилі стає порівнянною з мікроскопічними масштабами плазми?
9. Чому обертання Фарадея дає інформацію про магнітне поле всередині плазми?
10. Чому O-мода не відчуває магнітного поля?
11. Чому альвенівська хвиля в короні Сонця дисипує вкрай повільно (задача 6.6)?
12. Чому альвенівська хвиля не змінює густину плазми?

7 Кінетичний опис плазми

Рідинний опис виникає після усереднення руху великої кількості частинок. Але іноді самого середнього значення швидкості недостатньо. Дві плазми можуть мати однакові густину n та середню швидкість $\mathbf{v}$, але різні розподіли частинок за швидкостями, а отже по-різному реагувати на хвилі, зіткнення та нестійкості.

Кінетичний опис зберігає інформацію про те, як частинки розподілені не лише в координатному просторі, а й у просторі швидкостей. Це особливо важливо тоді, коли характер процесу визначається невеликою частиною частинок із певними швидкостями: наприклад, при резонансній взаємодії з хвилею. Рідинні величини в такому разі вже можуть не містити достатньої інформації.

§ 7.1. Функція розподілу та фазовий простір

Для кожного сорту частинок s вводять *функцію розподілу* $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Вона визначена у шестимірному фазовому просторі $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ і часі. Величина

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d^3r\, d^3v$$

є середнім числом частинок виду s, які в момент часу t перебувають у елементі фазового простору $d^3r\, d^3v$.

На відміну від концентрації, функція f_s містить інформацію про розподіл частинок за швидкостями. Концентрація є її нульовим моментом,

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d^3v, \tag{7.1}$$

а середня швидкість визначається першим моментом,

$$n_s \mathbf{v}_s = \int \mathbf{v} f_s\, d^3v. \tag{7.2}$$

Знання тільки n_s та $\mathbf{v}_s$ не відновлює функцію розподілу. У цьому полягає одна з головних відмінностей кінетичного опису від рідинного: кінетична теорія зберігає значно більше інформації про мікроскопічний стан плазми.

§ 7.2. Моменти функції розподілу

Середня швидкість характеризує рух центра розподілу. Для опису хаотичного руху введемо відносну швидкість

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_s.$$

Тоді тензор тиску визначається другим центральним моментом:

$$P_{s,ij} = m_s \int (v_i - v_{s,i})(v_j - v_{s,j}) f_s \, d^3v. \tag{7.3}$$

У загальному випадку P_s є тензором, а не скаляром. Якщо розподіл ізотропний, усі напрямки еквівалентні й

$$P_{s,ij} = p_s \delta_{ij}. \tag{7.4}$$

Скалярний тиск тоді пов'язаний із другим центральним моментом:

$$p_s = \frac{m_s}{3} \int c^2 f_s \, d^3v. \tag{7.5}$$

Для ізотропного розподілу температуру сорту s означимо як $T_s \equiv (m_s/3n_s) \int c^2 f_s \, d^3v$, звідки $p_s = n_s T_s$; фізично — це середня енергія хаотичного руху частинок (T в енергетичних одиницях). У неізотропній плазмі природніше говорити окремо про тиск поперек і вздовж магнітного поля, $p_\perp$ та $p_\parallel$. Саме тому кінетичний опис потрібний там, де анізотропія розподілу є істотною.

Із моментів можна побудувати також густину кінетичної енергії частинок,

$$w_s = \frac{m_s}{2} \int v^2 f_s \, d^3v. \tag{7.6}$$

Після розкладання $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{c}$ вона містить дві частини: енергію впорядкованого руху та енергію хаотичного руху. Саме друга частина пов'язана з температурою і тиском.

§ 7.3. Кінетичне рівняння

Еволюцію функції розподілу визначає кінетичне рівняння. У беззіткнювальній плазмі воно має вигляд рівняння Власова:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_s + \frac{q_s}{m_s}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f_s = 0. \tag{7.7}$$

Перший доданок описує зміну розподілу з часом, другий — його перенесення в координатному просторі, а третій — зміну швидкостей під дією сили Лоренца.

Рівняння можна записати компактніше через повну похідну вздовж траєкторії частинки:

$$\frac{df_s}{dt} = 0. \tag{7.8}$$

Це не означає, що f_s не змінюється в просторі або в часі. Йдеться про те, що вздовж фазової траєкторії, визначеної рівняннями руху частинки, значення функції розподілу зберігається. Фізично це є законом збереження числа частинок у фазовому просторі.

Теоретичні відомості Нагадаємо з теоретичної механіки

Теорема Ліувілля: для гамільтонової системи фазовий об'єм $d^3r\,d^3p$, що рухається разом з частинками, зберігається; у нерелятивістському випадку $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, тож те саме справджується для $d^3r\,d^3v$. Звідси випливає вивід рівняння Власова. Частинки не народжуються й не зникають, тому в 6-вимірному фазовому просторі $(\mathbf{r},\mathbf{v})$ виконується рівняння неперервності

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}}\cdot(\mathbf{v}f) + \nabla_{\mathbf{v}}\cdot\left(\frac{\mathbf{F}}{m}f\right) = 0.$$

Оскільки $\mathbf{r}$ і $\mathbf{v}$ — незалежні змінні, $\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v} = 0$; для сили Лоренца $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}/c)$ маємо $\nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{F} = 0$ (бо $\nabla_{\mathbf{v}}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = 0$, а $\mathbf{E}$ від $\mathbf{v}$ не залежить). Тому $\mathbf{v}$ і $\mathbf{F}$ виносяться з дивергенції, і виходить (7.7), тобто $df/dt = 0$ вздовж траєкторії — теорема Ліувілля.

Якщо зіткнення важливі, рівняння набуває форми

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_s + \frac{q_s}{m_s}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f_s = C_s[f]. \tag{7.9}$$

Оператор $C_s[f]$ описує зміну функції розподілу внаслідок зіткнень. Найпростіша модель — БГК (Бхатнагара–Гросса–Крука) [35]: $C[f] = -\nu(f - f_M)$, де f_M — максвеллівський розподіл; зіткнення «тягнуть» розподіл до максвеллівського з характерним часом $1/\nu$ (ν — характерна частота зіткнень, для електронів порядку $\nu_{ei} + \nu_{ee}$, див. розд. 4). Для слабкозв'язаної плазми кулонівська взаємодія далекодіюча, тому проста модель зіткнення двох твердих кульок не є адекватною:

зіткнення визначається великою кількістю слабких кулонівських відхилень. Тому для кулонівської плазми $C_s[f]$ має вигляд інтеграла Фоккера–Планка (Ландау), який описує повільне накопичення малих змін швидкості частинки в багатьох далеких зіткненнях. Його явний вигляд і виведення виходять за межі курсу, див. [7] (§ 7.2) та [1] (§ 2.3); далі користуємося лише моделлю БГК.

Таким чином, рівняння Власова та кінетичне рівняння зіткнювальної плазми відрізняються саме способом урахування взаємодії між частинками. У першому випадку основною є самоузгоджена електромагнітна взаємодія, у другому додається кінетичний ефект зіткнень.

Умова застосовності рівняння Власова: за час процесу частинка не встигає зіткнутися, $\nu \ll \omega$, або довжина вільного пробігу набагато більша за масштаб неоднорідності. Нехтуючи зіткненнями, ми нехтуємо парними кореляціями частинок і зберігаємо лише усереднене самоузгоджене поле. Ця умова протилежна умові рідинного опису незамагніченого газу, де зіткнення мають встигнути встановити локальну рівновагу, $\nu \gg \omega$ (у замагніченій плазмі поперек поля рідинний опис можливий і без зіткнень, розд. 5). Рівняння Власова оборотне за часом, тому саме по собі не описує релаксацію до максвеллівського розподілу: для неї потрібен інтеграл зіткнень $C_s[f]$ з (7.9).

§ 7.4. Максвеллівський розподіл і температура

Найпростішим прикладом функції розподілу є локальний максвеллівський розподіл. Для частинок маси m, концентрації n та температури T він має вигляд

$$f_M(\mathbf{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2T}\right]. \tag{7.10}$$

Тут $\mathbf{u}$ є середньою швидкістю. Розподіл має максимум при $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, а його ширина визначається температурою. Чим вища T, тим більша частка частинок має великі теплові швидкості.

Для максвеллівського розподілу

$$\langle c^2 \rangle = \frac{3T}{m}, \tag{7.11}$$

тому характерну теплову швидкість зручно визначити як

$$v_T = \sqrt{\frac{T}{m}}. \tag{7.12}$$

Обережно з означеннями. Розподіл можна записати в трьох формах: одновимірний $F(v_x) \propto e^{-mv_x^2/2T}$, тривимірний $f(\mathbf{v})$ і розподіл за

модулем швидкості $4\pi v^2 f(v)$. Відповідно існують три «теплові швидкості»: найімовірніша $\sqrt{2T/m}$ (максимум $4\pi v^2 f$), середня $\sqrt{8T/\pi m}$ і середньоквадратична $\sqrt{3T/m}$ (задача 7.4). Різні підручники називають «тепловою» різні з них (часто $\sqrt{2T/m}$, як у Чена), що дає розбіжності на множник $\sqrt{2}$. У цій книзі $v_T = \sqrt{T/m}$ всюди.

У плазмі електрони та іони не зобов'язані мати однакові температури:

$$T_e \neq T_i.$$

Різні сорти частинок можуть обмінюватися енергією через зіткнення, але цей обмін не обов'язково відбувається настільки швидко, щоб встановити спільну температуру. Тому T_e та T_i слід розглядати як окремі характеристики, якщо це випливає з умов задачі.

У слабо зіткнювальній або беззіткнювальній плазмі розподіл може істотно відхилятися від максвеллівського. Тоді однієї температури вже недостатньо для повного опису кінетичного стану.

§ 7.5. Від кінетики до гідродинаміки

Рідинні рівняння можна отримати з кінетичного рівняння, якщо замінити повну функцію розподілу набором її моментів. Це робить особливо наочним зв'язок між кінетичним, дворідинним та однорідинним описами.

Помножимо рівняння Власова на одиницю та проінтегруємо за швидкостями. За умови достатньо швидкого спадання f_s при $v \to \infty$ інтеграл від похідної за швидкістю перетворюється на поверхневий інтеграл, який зникає. Отримуємо

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{v}_s) = 0. \tag{7.13}$$

Це рівняння неперервності для кожного сорту частинок.

Тепер помножимо кінетичне рівняння на $m_s\mathbf{v}$ та проінтегруємо. Розберемо доданки. Перший дає $m_s \partial_t (n_s \mathbf{v}_s)$. Другий: $\nabla \cdot \int m_s \mathbf{v}\mathbf{v} f\, d^3v$, де з розкладом $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{c}$ ($\mathbf{c}$ — хаотична швидкість, $\int \mathbf{c} f\, d^3v = 0$) маємо $\int \mathbf{v}\mathbf{v} f\, d^3v = n_s \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s + \int \mathbf{c}\mathbf{c} f\, d^3v$, тобто $m_s n_s \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s + \mathsf{P}_s$. Третій — ключовий: інтегруємо частинами за швидкостями,

$$\int v_i\, \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f\, d^3v = -\int f\, \frac{\partial (v_i a_j)}{\partial v_j}\, d^3v = -\int f\, a_i\, d^3v = -n_s a_i,$$

де $\mathbf{a} = (q_s/m_s)(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c)$; поверхневі члени зникають через спад $f \to 0$ при $|\mathbf{v}| \to \infty$, а $\partial_{v_j} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_j = 0$. Підставивши й скориставшись (7.13), щоб скоротити доданки з $\partial_t n_s$ і $\nabla \cdot (n_s \mathbf{v}_s)$, дістаємо рівняння руху

$$m_s n_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{v}_s \right) = q_s n_s \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_s \times \mathbf{B} \right) - \nabla \cdot \mathsf{P}_s + \mathbf{R}_s. \tag{7.14}$$

Тут $\mathbf{R}_s$ описує передачу імпульсу між різними сортами частинок. У беззіткнювальній моделі цей член відсутній.

Рівняння показує важливу річ: електромагнітна сила діє на середній рух, але внутрішня кінетика частинок входить через тензор тиску P_s. Тому просте скалярне рівняння стану $p = p(n, T)$ є вже додатковим припущенням, а не прямим наслідком кінетичного рівняння.

Якщо перейти до наступного моменту, виникає рівняння для потоку енергії. У ньому з'являються моменти вищого порядку. Отже, виникає *ієрархія моментів*:

$$f_s \longrightarrow (n_s, \mathbf{v}_s, \mathsf{P}_s) \longrightarrow \text{потік енергії} \longrightarrow \text{вищі моменти} \longrightarrow \cdots$$

Ієрархія сама по собі не замикається: рівняння для моменту порядку N містить момент порядку $N + 1$. Щоб отримати скінченну систему рідинних рівнянь, необхідне *замикання*. Прикладами є припущення про ізотропний тиск, рівняння стану, адіабатичний зв'язок або задану теплопровідність.

Тому ланцюжок переходу між рівнями опису має вигляд

$$\boxed{f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \longrightarrow (n_s, \mathbf{v}_s, \mathsf{P}_s, \ldots) \longrightarrow \text{дворідинна модель} \longrightarrow \text{МГД.}} \tag{7.15}$$

Кожна стрілка означає не просто зміну позначень, а втрату частини інформації та введення певних припущень.

Для плазми з електронів та іонів кінетичне рівняння записують окремо для кожного сорту, а моменти дають дві системи рідинних рівнянь зі своїми n_s, $\mathbf{v}_s$, P_s (дворідинний опис). Їхнє додавання й віднімання, яке зводить дворідинну модель до однорідинної МГД (рівняння руху центра мас, узагальнений закон Ома, струм $\mathbf{j} = en_e(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$), виконано в розд. 5; тут важливо лише, що ця різниця швидкостей губиться при переході до однієї середньої швидкості, і тому МГД не може описати ефекти, чутливі до окремого руху електронів та іонів.

§ 7.6. Перший міст між кінетикою та рідинним описом: дисперсія Ленгмюра

Рідинний вивід поправки Бома–Гросса $\omega^2 \simeq \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2$ наведено в розд. 2.3; там показник 3 виникає як адіабата одновимірного стиснення. Кінетичний вивід (див. нижче, (7.28)) показує, що ця

формула справедлива лише при $\omega/k \gg v_{Te}$, тобто для довгих хвиль, $k\lambda_{De} \ll 1$. Поправка пов'язана з тепловим рухом електронів, а за $k\lambda_{De} \gtrsim 0{,}3$ виникає ще й загасання Ландау, якого рідинна модель не передбачає.

§ 7.7. Лінеаризація кінетичного рівняння та хвильовий відгук

До цього моменту ми розглядали функцію розподілу як спосіб описати стан плазми та її еволюцію в часі. Тепер поставимо інше питання: *що відбувається з плазмою, якщо її трохи відхилити від рівноваги?*

Це питання є природним продовженням теорії хвиль. У рідинному описі ми вже бачили, що мале відхилення густини, швидкості або магнітного поля може поширюватися в плазмі у вигляді хвилі. У кінетичному описі треба поставити те саме питання безпосередньо для функції розподілу.

Що означає хвиля в кінетичному описі?. Нехай плазма перебуває в простому однорідному рівноважному стані. Для кожного сорту частинок його описує функція розподілу

$$f_s = f_{0s}(\mathbf{v}). \tag{7.16}$$

Ми спеціально розглядаємо однорідний рівноважний стан, тому f_{0s} не залежить від $\mathbf{r}$ та t. Фізично це означає, що в середньому властивості плазми однакові в усіх точках простору та не змінюються з часом.

Тепер уявімо, що цей стан трохи збурили. Наприклад, у деякій області виникла невелика надлишкова густина електронів. Вона створює електричне поле. Це поле змінює рух електронів, а змінений рух електронів змінює густину заряду і, відповідно, саме поле.

Отже, виникає замкнений ланцюг:

$$\text{збурення розподілу} \longrightarrow \text{збурення заряду} \longrightarrow \text{електричне поле} \longrightarrow \text{зміна руху частинок} \longrightarrow \text{нове збурення}.$$

Саме ця *самоузгодженість* є суттю колективної хвилі в плазмі. Поле не просто задане ззовні: воно створюється самими частинками і водночас впливає на їхній рух.

У кінетичному описі тому хвиля є збуренням самої функції розподілу. Запишемо

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{0s}(\mathbf{v}) + \delta f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \qquad |\delta f_s| \ll f_{0s}. \tag{7.17}$$

Тут f_{0s} описує незбурений стан, а δf_s — малу зміну цього стану. На відміну від густини або середньої швидкості, збурення δf_s залежить ще й від швидкості $\mathbf{v}$. Тому воно відповідає не просто зміні кількості частинок, а зміні самої форми розподілу за швидкостями.

Це принципово важливо. Дві ділянки плазми можуть мати однакову густину, але різний розподіл частинок за швидкостями. Кінетична теорія дозволяє розрізнити такі стани, тоді як рідинний опис може їх ототожнювати.

Лінеаризація рівняння Власова. Щоб знайти, як розвивається мале збурення, підставимо (7.17) у рівняння Власова (7.7). Для простоти спочатку розглянемо електростатичні збурення однорідної плазми без зовнішнього магнітного поля. Тоді

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = 0. \tag{7.18}$$

У рівноважному стані поле відсутнє, тому

$$\mathbf{E}_0 = 0.$$

Після збурення поле також є малим:

$$\mathbf{E} = \delta \mathbf{E}.$$

Підставимо ці вирази у (7.18). Виникають члени двох типів. Частина є лінійною за малими величинами, а частина містить добуток двох збурень, наприклад

$$\delta \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta f_s.$$

Оскільки і $\delta \mathbf{E}$, і δf_s малі, їхній добуток є величиною другого порядку мализни. У лінійному наближенні такими членами нехтуємо. Залишається

$$\frac{\partial \delta f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta f_s + \frac{q_s}{m_s} \delta \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{0s} = 0. \tag{7.19}$$

Тепер маємо перше принципово нове для нас рівняння: воно безпосередньо визначає еволюцію малого збурення функції розподілу.

У ньому добре видно фізику процесу. Перші два доданки описують перенесення збурення частинками. Останній доданок показує дію електричного поля: поле змінює швидкості частинок, а отже, перерозподіляє їх у просторі швидкостей.

Таким чином, (7.19) вже містить обидві необхідні складові кінетичної картини: *вільний рух частинок* та *їхню реакцію на збурене поле*.

Але поки що це ще не хвильове рівняння.

Як із цього виникає хвиля?. Щоб побачити хвильову поведінку, треба згадати, що збурення функції розподілу саме створює електричне поле. З функції δf_s отримуємо збурення густини заряду:

$$\delta\rho = \sum_s q_s \int \delta f_s \, d^3v. \tag{7.20}$$

А це поле визначається рівняннями електродинаміки. У найпростішій електростатичній задачі достатньо рівняння Пуассона:

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{E} = 4\pi\delta\rho. \tag{7.21}$$

Отже, маємо замкнений ланцюг:

$$\delta f_s \longrightarrow \delta\rho \longrightarrow \delta\mathbf{E} \longrightarrow \delta f_s.$$

Саме тому збурення не можна розглядати як просто задану зміну функції розподілу. Воно повинно бути узгоджене з полем, яке саме це збурення породжує.

Якщо таке самоузгоджене збурення поширюється в просторі та змінюється в часі, ми називаємо його хвилею.

Це важливий момент: у кінетичній теорії хвиля не вводиться окремим хвильовим рівнянням. Вона виникає як *самоузгоджений розв'язок лінеаризованого кінетичного рівняння разом із рівняннями електромагнітного поля.*

Нормальна мода. Тепер скористаємося спеціальною властивістю обраного рівноважного стану. Він однорідний та стаціонарний, тому коефіцієнти лінеаризованих рівнянь не залежать від $\mathbf{r}$ і t. Для такої системи природно розкласти довільне мале збурення на гармонічні складові.

Розглянемо одну таку складову та запишемо

$$\delta f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \widetilde{f}_s(\mathbf{v}) \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right]. \tag{7.22}$$

Тепер ця формула вже не з'являється нізвідки. Ми не стверджуємо, що функція розподілу «зобов'язана» мати такий вигляд. Ми розкладаємо мале збурення на нормальні гармонічні моди, кожна з яких характеризується хвильовим вектором $\mathbf{k}$ та частотою ω.

Для електричного поля записуємо аналогічно

$$\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \widetilde{\mathbf{E}} \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right].$$

Спільний множник у цих виразах описує просторово-часову структуру хвилі, тоді як $\widetilde{f}_s(\mathbf{v})$ визначає, як ця хвиля змінює розподіл частинок за швидкостями.

Після такої підстановки диференціювання стає простим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega, \qquad \nabla \longrightarrow i\mathbf{k}.$$

Тому (7.19) перетворюється на

$$-i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\widetilde{f_s} + \frac{q_s}{m_s}\widetilde{\mathbf{E}}\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f_{0s} = 0. \tag{7.23}$$

Це рівняння вже значно відрізняється від звичайного рівняння для рідинної швидкості. Воно містить $\mathbf{v}$ як незалежну змінну. Тому різні групи частинок із різними швидкостями мають різний відгук на ту саму хвилю.

Звідки береться резонанс?. Саме тут уперше з'являється характерна для кінетичної теорії фізика.

У (7.23) присутня комбінація

$$\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}. \tag{7.24}$$

Розглянемо для простоти рух уздовж напрямку поширення хвилі. Тоді $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} = k_\parallel v_\parallel$, і особливо важливими стають частинки, для яких

$$v_\parallel \simeq \frac{\omega}{k_\parallel}. \tag{7.25}$$

Права частина є фазовою швидкістю хвилі вздовж її напрямку поширення. Отже, резонансні частинки рухаються приблизно з тією самою швидкістю, з якою рухається фаза хвилі.

Фізично це зрозуміло. Якщо частинка рухається значно повільніше або значно швидше за хвилю, вона швидко проходить крізь різні фази хвилі. Вплив поля на неї при цьому значною мірою взаємно компенсується. Але якщо частинка рухається приблизно разом із фазою, вона може протягом тривалого часу залишатися в області поля одного знака і ефективно обмінюватися з хвилею енергією.

Таким чином, резонанс не є додатковою умовою, яку ми просто постулюємо. Він безпосередньо випливає зі структури кінетичного відгуку (7.23).

Саме цієї інформації не було в простому рідинному описі. Там ми працювали із середньою швидкістю, густиною та тиском. Тут же бачимо, що частинки з різними $v_\parallel$ взаємодіють із хвилею по-різному.

Самоузгодженість і дисперсійне рівняння. До цього моменту ми фактично розглядали відгук частинок на збурене електричне поле. Але поле не є незалежною величиною: воно створюється самою плазмою. Тому треба одночасно виконати рівняння Пуассона.

Для гармонічної моди (7.22) воно має вигляд

$$i\mathbf{k}\cdot\widetilde{\mathbf{E}} = 4\pi\sum_s q_s\int \widetilde{f}_s(\mathbf{v})\,d^3v. \tag{7.26}$$

Отже, маємо дві частини однієї задачі:

1. кінетичне рівняння визначає, як частинки реагують на поле;
2. рівняння Пуассона визначає, яке поле створюють ці частинки.

Потрібно знайти такий розподіл частинок і таке поле, які одночасно задовольняють обидві умови. Саме ця вимога називається *самоузгодженістю*.

Після підстановки кінетичного відгуку в рівняння поля отримуємо умову існування нетривіального розв'язку. У загальному вигляді її записують як дисперсійне рівняння

$$D(\omega,\mathbf{k}) = 0. \tag{7.27}$$

Це рівняння відповідає на два принципові питання.

По-перше, які хвилі взагалі можуть існувати в даній плазмі? Відповідь задається дисперсією $\omega(\mathbf{k})$.

По-друге, що відбувається з амплітудою хвилі під час її поширення? Якщо ω має уявну частину, амплітуда може зростати або спадати з часом.

Отже, дисперсійне рівняння є результатом не просто математичної підстановки. Воно є умовою самоузгодженого існування колективного руху частинок і поля.

Чому кінетичний опис дає нову фізику?. У рідинному описі ми замінюємо повну функцію розподілу її моментами: густиною, середньою швидкістю, тиском тощо. Це дуже корисно, але разом із цим втрачається інформація про те, скільки частинок має ту чи іншу швидкість.

Для багатьох повільних і великомасштабних процесів ця втрата інформації неістотна. Але для хвиль вона може стати принциповою. Як показує (7.23), відгук залежить безпосередньо від $\mathbf{v}$. Тому хвиля може вибірково взаємодіяти з певною частиною розподілу.

У цьому полягає одна з головних переваг кінетичного опису: він дозволяє досліджувати не лише рух середнього потоку, а й обмін енергією між хвилею та частинками з різними швидкостями.

Саме тут природно виникає загасання Ландау. Якщо швидкості резонансних частинок попадають на ділянку розподілу, де кількість частинок із різними швидкостями неоднакова, обмін енергією між хвилею та частинками не компенсується. Для звичайного максвеллівського розподілу це приводить до загасання хвилі.

Таким чином, наступний крок буде вже не введенням нового математичного апарату заради самого апарату. Ми використаємо отриману картину, щоб зрозуміти, *чому хвиля може втрачати енергію навіть у повністю беззіткнювальній плазмі.*

§ 7.8. Загасання Ландау

Одним із найважливіших результатів кінетичної теорії є можливість загасання хвилі навіть у беззіткнювальній плазмі. Покажемо це кількісно для ленгмюрівських хвиль.

Діелектрична проникність беззіткнювальної плазми. Розглянемо одновимірну поздовжню хвилю $\propto e^{i(kx-\omega t)}$ вздовж x і позначимо $F_s(v) = \int f_{0s}\,dv_y\,dv_z$ (так що $\int F_s\,dv = n_s$). Виведення займає чотири кроки.

(1) Для $\mathbf{k} \parallel x$ проінтегруємо (7.23) за v_y, v_z; позначивши $v \equiv v_x$, маємо

$$-i(\omega - kv)\widetilde{f}_s + \frac{q_s}{m_s}\widetilde{E}\,F_s' = 0,$$

де тепер $\widetilde{f}_s(v)$ — збурення, проінтегроване за поперечними швидкостями.

(2) Звідси

$$\widetilde{f}_s = -i\,\frac{q_s}{m_s}\,\frac{\widetilde{E}\,F_s'}{\omega - kv}.$$

(3) Підставляємо в рівняння Пуассона (7.26):

$$ik\widetilde{E} = 4\pi\sum_s q_s\int \widetilde{f}_s\,dv = -4\pi i\,\widetilde{E}\sum_s \frac{q_s^2}{m_s}\int \frac{F_s'}{\omega - kv}\,dv.$$

(4) Скорочуємо $ik\widetilde{E}$ і вводимо $\omega_{ps}^2 = 4\pi n_s q_s^2/m_s$; отримуємо дисперсійне рівняння $\varepsilon(\omega,k) = 0$ з

$$\varepsilon(\omega,k) = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k\,n_s}\int \frac{F_s'(v)}{\omega - kv}\,dv. \tag{7.28}$$

Для холодної плазми $F_s = n_s\delta(v)$ маємо $\int F'/(\omega - kv)\,dv = -n_s k/\omega^2$ і $\varepsilon = 1 - \sum \omega_{ps}^2/\omega^2$ — відомий результат (2.1). Якщо ж $\omega \gg kv_{Te}$, інтегруємо по частинах і розкладаємо:

$$\int \frac{F'}{\omega - kv}\,dv = -k\int \frac{F}{(\omega - kv)^2}\,dv$$
$$= -\frac{k}{\omega^2}\int F\Big(1 + \frac{2kv}{\omega} + \frac{3k^2v^2}{\omega^2} + \dots\Big)dv$$

$$\approx -\frac{n_s k}{\omega^2}\Big(1+\frac{3k^2 v_{Ts}^2}{\omega^2}\Big),$$

бо непарний за v член зникає для симетричного F, а $\int v^2 F\,dv = n_s v_{Ts}^2$. Множник 3 виникає тут з розкладу $(1-kv/\omega)^{-2}$, а не з показника адіабати; рідинний вивід у розд. 2.3 з $\gamma=3$ для одновимірного стиснення дає те саме, і це перевірка узгодженості кінетики й гідродинаміки. Звідси $\varepsilon \approx 1-(\omega_p^2/\omega^2)(1+3k^2v_{Te}^2/\omega^2)$ і $\varepsilon=0$ дає формулу Бома–Гросса (2.5). Новим є те, що підінтегральний вираз має *полюс* при $v=\omega/k$: саме тут «живуть» резонансні частинки.

Теоретичні відомості Нагадаємо з теорії функцій комплексної змінної

Формула Сохоцького: $\dfrac{1}{x\pm i0} = \mathrm{P}\dfrac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$. Ілюстрація: $\operatorname{Im}\dfrac{1}{x+i\varepsilon} = -\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to -\pi\delta(x)$ при $\varepsilon\to 0^+$ (лоренціан з площею π). Знак «$+i0$» визначає причинність: збурення вмикається при $t=0$, тому для перетворення Лапласа потрібно $\operatorname{Im}\omega>0$ — як адіабатичне вмикання $e^{\varepsilon t}$ в теорії збурень квантової механіки.

Як обійти полюс? Л. Ландау (1946 р.) показав, що правильно розв'язувати задачу початкових умов: тоді збурення вмикається в момент $t=0$, і для збіжності інтеграла треба вважати $\operatorname{Im}\omega>0$. Результат продовжують аналітично на область $\operatorname{Im}\omega\le 0$, що зводиться до заміни $\omega\to\omega+i0$. За формулою Сохоцького $1/(\omega-kv+i0) = \mathrm{P}\,1/(\omega-kv) - i\pi\delta(\omega-kv)$ маємо $\varepsilon=\varepsilon_r+i\varepsilon_i$ з

$$\varepsilon_i(\omega,k) = -\pi\sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2\,n_s}\,F_s'\Big(\frac{\omega}{k}\Big). \tag{7.29}$$

Уявна частина проникності визначається нахилом розподілу *у точці резонансу* $v=v_\varphi=\omega/k$ — вона відсутня в будь-якому рідинному описі.

Декремент. Нехай хвиля слабко загасає: $\omega=\omega_r+i\gamma$, $|\gamma|\ll\omega_r$. Тоді $\varepsilon_r(\omega_r,k)=0$ (це дає частоту, наприклад Бома–Гросса), а поправка знаходиться з розкладу

$$\varepsilon(\omega_r+i\gamma)\approx\varepsilon_r(\omega_r)+i\gamma\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial\omega}+i\varepsilon_i=0 \quad\Longrightarrow\quad \gamma=-\varepsilon_i\Big/\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial\omega}.$$

Для ленгмюрівської хвилі $\partial\varepsilon_r/\partial\omega\approx 2/\omega_{pe}$, тому

$$\gamma=\frac{\pi\omega_{pe}^3}{2k^2 n_e}\,F_e'(v_\varphi). \tag{7.30}$$

Знак γ збігається зі знаком $F_e'(v_\varphi)$. Для максвеллівського розподілу $F_e'(v) = -(v/v_{Te}^2)F_e$, тобто $F_e'(v_\varphi) < 0$, і хвиля загасає:

$$\boxed{\frac{\gamma}{\omega_{pe}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{1}{(k\lambda_{De})^3}\exp\!\left(-\frac{1}{2k^2\lambda_{De}^2} - \frac{3}{2}\right)} \qquad (k\lambda_{De} \ll 1). \tag{7.31}$$

Тут $\lambda_{De} = v_{Te}/\omega_{pe}$ ($v_{Te}^2 = T_e/m_e$), а $-3/2$ в експоненті враховує поправку Бома–Гросса до v_φ. Експоненціальна залежність від $1/k^2\lambda_{De}^2$ показує, що довгі хвилі ($k\lambda_{De} \ll 1$) практично не загасають, бо $v_\varphi \gg v_{Te}$ і в «хвості» розподілу майже немає частинок. Типові числа: $k\lambda_{De} = 0{,}3$ дає $|\gamma|/\omega_{pe} \approx 0{,}02$, а $k\lambda_{De} = 0{,}5$ — $\approx 0{,}15$ (така хвиля живе лише близько одного періоду, і розклад за малим γ втрачає силу).

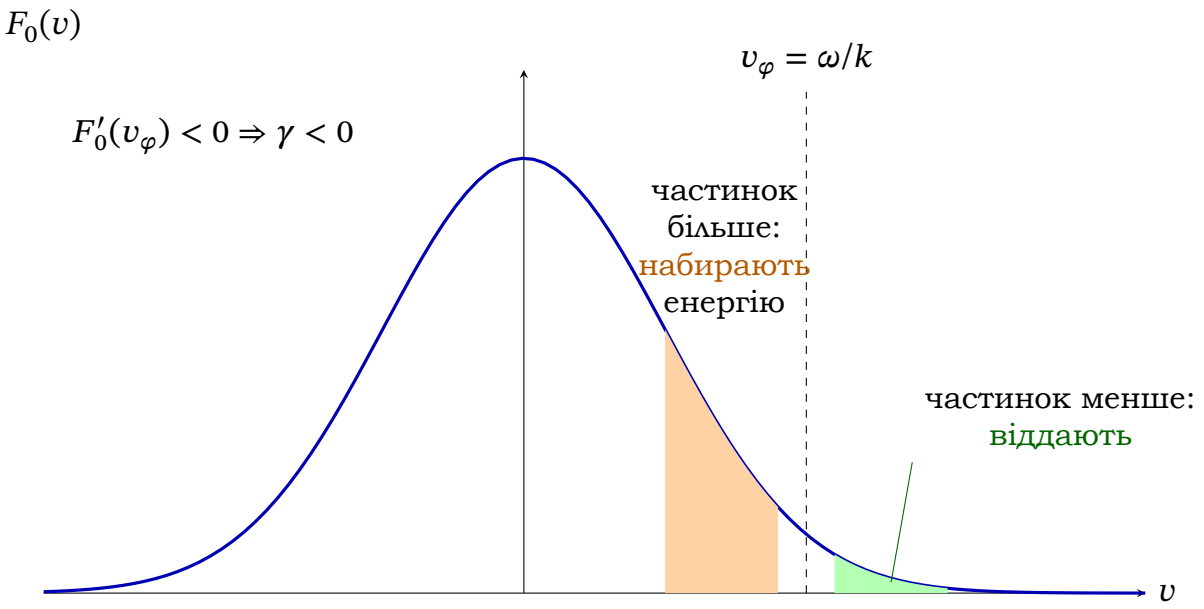


Рис. 7.1. Загасання Ландау: частинок, трохи повільніших за хвилю, більше, ніж трохи швидших, тому обмін енергією не компенсується, і хвиля віддає енергію розподілу

Фізична картина. Частинки, трохи повільніші за хвилю, прискорюються нею (хвиля «наздоганяє» їх і штовхає), а трохи швидші — гальмуються (вони передають енергію хвилі). Оскільки для спадного розподілу ($F' < 0$) повільних частинок більше, ніж швидких, сумарно енергія переходить від хвилі до частинок (рис. 7.1). Це загасання принципово відрізняється від омічної дисипації: зіткнень немає, а енергія перекачується з поля в кінетичну енергію резонансних частинок. Лінійне загасання Ландау експериментально підтвердили Малмберг і Уортон (1964 р.).

Аналогія серфінгу. Частинки — серфери на хвилі: ті, що трохи повільніші за хвилю, хвиля підхоплює й розганяє; ті, що трохи швидші, самі штовхають хвилю й гальмуються. У системі відліку хвилі частинка з відносною швидкістю $u = v - v_\varphi$ відбивається від «горба» потенціалу, сумарний обмін енергією пропорційний нахилу $F'(v_\varphi)$: для спадного F виграють повільні. *Парадокс.* Рівняння Власова оборотне, а загасання є: енергія не зникає, а переходить у дрібномасштабну структуру f у просторі швидкостей (фазове перемішування), яку макроскопічні величини вже не бачать.

Нестійкість «пучка на хвості». Якщо розподіл має локальний максимум при $v_b > v_{Te}$ (електронний пучок), то на його висхідній ділянці $F_e'(v_\varphi) > 0$, і за (7.30) $\gamma > 0$ — хвиля *зростає* (обернене загасання Ландау, розд. 8). Нестійкість зникає, коли пучок розпливається або хвиля захоплює резонансні частинки.

Нелінійне захоплення. Лінійна теорія працює, поки амплітуда мала. Резонансні частинки в потенціалі хвилі φ_0 здійснюють коливання з частотою відбиття $\omega_b = \sqrt{ek^2\varphi_0/m_e}$. Коли $\omega_b \gtrsim |\gamma|$, частинки встигають повернути й віддати енергію назад: розподіл у околі v_φ вирівнюється (плато), $F'(v_\varphi) \to 0$, і загасання припиняється (теорію захоплення дав О'Нійл, 1965 р.).

Тому загасання Ландау є важливою межею простого рідинного опису. Скалярні величини n, $\mathbf{v}$ та T не містять достатньої інформації про поведінку розподілу поблизу резонансної швидкості. Потрібна сама функція $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ або принаймні модель, яка зберігає відповідну кінетичну інформацію.

§ 7.9. Коли потрібен кінетичний опис?

Вибір між кінетичною та рідинною моделлю визначається не тим, яка модель «правильна», а масштабом явища. Якщо нас цікавлять довгохвильові процеси, для яких розподіл частинок залишається близьким до локальної рівноваги, можна перейти до моментів і замкнути систему рідинними рівняннями.

Кінетичний опис стає необхідним, коли важливими є:

- детальний розподіл частинок за швидкостями;
- резонансна взаємодія частинок із хвилями;
- анізотропія розподілу або тиску;
- нерівноважні хвости функції розподілу;
- процеси, для яких зіткнення занадто рідкі, щоб підтримувати локальну рівновагу.

У магнетизованій плазмі додатково виникає відмінність між рухом уздовж та поперек магнітного поля. Тому навіть тиск може стати анізотропним,

$$p_\perp \neq p_\parallel,$$

і проста однорідинна МГД-модель зі скалярним тиском перестає бути достатньою.

Загальну послідовність переходів між рівнями опису (від f_s до моментів $n_s, \mathbf{v}_s, \mathsf{P}_s$, далі до дворідинної моделі й до МГД) наведено в (7.15).

Чим далі ми рухаємося вправо, тим менше мікроскопічної інформації зберігаємо і тим більше припущень про замикання повинні зробити. Натомість рідинний опис стає значно простішим для довгохвильових макроскопічних процесів.

§ 7.10. Як це вимірюють: томсонівське розсіяння

Функцію розподілу не можна виміряти зондом, не збурюючи плазму, але її можна *прочитати зі спектра розсіяного світла*. Вільний електрон у полі лазерної хвилі коливається й перевипромінює її (томсонівське розсіяння) з перерізом $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6{,}65\times10^{-25}$ см^2, де $r_e = e^2/m_e c^2$. Нехай падає хвиля $(\omega_i, \mathbf{k}_i)$, а під кутом θ реєструють хвилю $(\omega_s, \mathbf{k}_s)$. Електрон, що рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$, розсіює з допплерівським зсувом $\omega_s - \omega_i = \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$, де $\mathbf{k} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$ і $|\mathbf{k}| = 2k_i \sin(\theta/2) = (4\pi/\lambda_i)\sin(\theta/2)$. Отже, спектр розсіяного світла відображає розподіл електронів за проєкцією швидкості на $\mathbf{k}$, тобто саму $F_e(v)$. Те, що саме ми побачимо, визначає *параметр розсіяння*

$$\alpha = \frac{1}{k\lambda_{De}} = \frac{\lambda_i}{4\pi\lambda_{De}\sin(\theta/2)}. \tag{7.32}$$

Це той самий параметр $k\lambda_{De}$, який керував загасанням Ландау (формула (7.31)): він порівнює масштаб $1/k$, на якому «дивимося» на плазму, з дебаївським радіусом.

Некогерентне розсіяння ($\alpha \ll 1$). Якщо $1/k \ll \lambda_{De}$, електрони розсіюють незалежно, і спектр повторює розподіл. Для максвеллівського $F_e \propto \exp(-v^2/2v_{Te}^2)$ спектр гауссів, а оскільки $\Delta\lambda/\lambda_i = -\Delta\omega/\omega_i$ (для $\omega_i = ck_i$), його стандартне відхилення дорівнює

$$\boxed{\frac{\sigma_\lambda}{\lambda_i} = 2\sin\frac{\theta}{2}\,\frac{v_{Te}}{c} = 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{T_e}{m_e c^2}}}, \qquad v_{Te}^2 = \frac{T_e}{m_e}. \tag{7.33}$$

Ширина спектра дає T_e, а повний сигнал, пропорційний n_e — густину (абсолютне калібрування виконують за розсіянням на газі відомої густини).

Числова оцінка. Для Nd:YAG-лазера ($\lambda_i = 1064$ нм), $\theta = 90°$ і $T_e = 1$ кеВ маємо $v_{Te}/c = 0{,}044$ і $\sigma_\lambda \approx 67$ нм (6 % від λ_i): спектр легко розкласти на кілька спектральних каналів. При $n_e = 10^{14}$ см$^{-3}$ дебаївський радіус $\lambda_{De} = 2{,}4 \times 10^{-3}$ см, тож $\alpha \approx 5 \times 10^{-3} \ll 1$. Частка розсіяного світла $P_s/P_0 \approx n_e r_e^2 L\,\Delta\Omega \approx 10^{14} \cdot 8 \times 10^{-26} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \approx 8 \times 10^{-14}$ (довжина перетину $L = 1$ см, тілесний кут збору $\Delta\Omega = 10^{-2}$ ср). Імпульс 1 Дж містить 5×10^{18} фотонів, тобто розсіюється лише $\sim 4 \times 10^5$ фотонів, і до детекторів доходить їхня невелика частка.

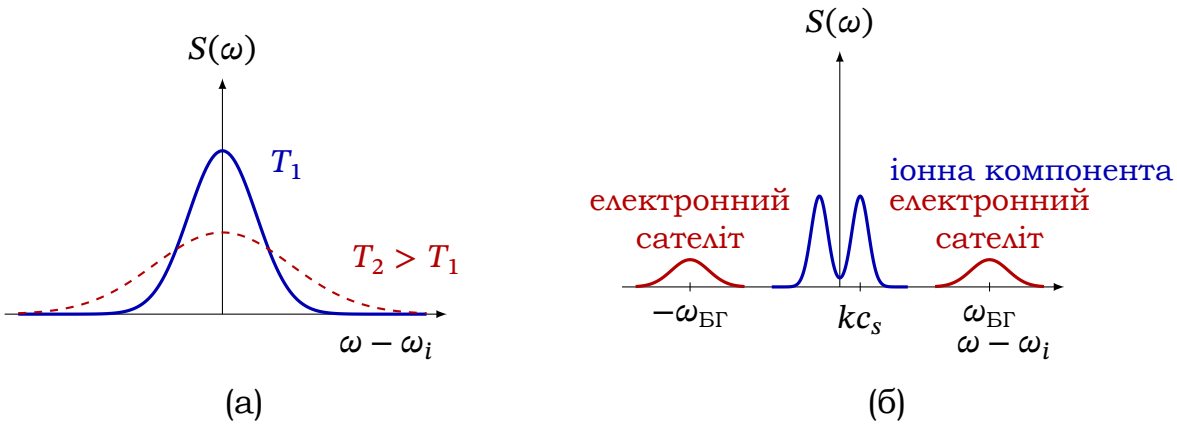


Рис. 7.2. Спектр томсонівського розсіяння: (а) $\alpha \ll 1$ — гауссів профіль, ширина якого зростає як $\sqrt{T_e}$; (б) $\alpha \gtrsim 1$ — вузька іонна компонента й електронні сателіти на частотах Бома–Гросса

Колективне розсіяння ($\alpha \gtrsim 1$). Коли $1/k \gtrsim \lambda_{De}$, електрони вже не незалежні: кожен оточений дебаївською хмарою, і розсіяння визначається тепловими флуктуаціями густини з хвильовим вектором $\mathbf{k}$ — тобто тими самими хвилями, що розглянуто вище. Спектр (рис. 7.2 б) має дві складові:

- *електронні сателіти* на частотах $\pm\omega_{БГ}$ — теплові ленгмюрівські хвилі (2.5); їхнє положення $\omega_{БГ} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2}$ дає густину без абсолютного калібрування, а ширину задає загасання Ландау (7.31);
- *іонну компоненту* завширшки $\sim k v_{Ti}$. При $T_e \gg T_i$ вона розщеплюється на два іонно-звукові піки $\pm kc_s$ (розд. 6.2), за формою яких знаходять T_i.

Числова оцінка. Для CO_2-лазера ($\lambda_i = 10{,}6$ мкм), $\theta = 5°$, $T_e = 100$ еВ і $n_e = 10^{14}$ см$^{-3}$ маємо $\lambda_{De} \approx 7 \times 10^{-4}$ см і $\alpha \approx 2{,}6$: розсіяння колективне.

Межі застосовності.

- Формула (7.33) справедлива лише за $\alpha \ll 1$ і максвеллівського розподілу; негаусові «крила» спектра свідчать про нетеплові хвости. Для проміжних $\alpha \sim 1$ спектр знаходять чисельним розрахунком, підгоняючи T_e і T_i одночасно.
- Нерелятивістський вираз працює при $T_e \ll m_e c^2$. Для $T_e \gtrsim$ кількох кеВ спектр стає асиметричним і зсувається в синю область; поправка має порядок $T_e/m_e c^2$ (близько 2 % при 10 кеВ), і у термоядерній плазмі її обов'язково враховують.
- Сигнал приблизно на 13 порядків слабший за лазерний пучок, тому потрібні потужні імпульсні лазери, придушення розсіяного світла від стінок і облік фону плазми (гальмівне випромінювання). У колективному режимі малі кути розсіяння ще ускладнюють відокремлення сигналу.
- Вимірювання *локальне*: об'єм визначається перетином пучка та поля зору. Часова роздільність дорівнює тривалості імпульсу (~ 10 нс), але частота повторення невелика (10–100 Гц), тому швидкі процеси потребують багатоімпульсних лазерів.

Отже, томсонівське розсіяння — один із небагатьох методів, що безпосередньо читає $F_e(v)$: за $\alpha \ll 1$ вимірюється форма розподілу, за $\alpha \gtrsim 1$ — діелектричний відгук $\varepsilon(\omega, k)$ з усіма хвильовими модами й загасанням Ландау.

Головне в розділі

- Кінетичний опис оперує функцією розподілу $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$; з її моментів отримують n, $\mathbf{v}$ і тензор тиску.
- Рівняння Власова описує беззіткнювальну плазму; зіткнення додають інтеграл зіткнень у правій частині.
- Ланцюжок моментів не замикається сам, тому гідродинаміка вимагає додаткових припущень про функцію розподілу.
- Загасання Ландау — беззіткнювальний резонанс хвилі з частинками, швидкість яких близька до v_φ.
- Знак декремента визначається похідною розподілу в резонансній точці: за $F_e'(v_\varphi) > 0$ хвиля росте.
- Томсонівське розсіяння лазерного світла дає T_e і n_e локально: за $\alpha = 1/k\lambda_{De} \ll 1$ ширина спектра $\propto \sqrt{T_e}$, за $\alpha \gtrsim 1$ спектр відображає колективні моди (розд. 7.10).

Задачі

7.1. ★★★ Для беззіткнювальної плазми покажіть, що інтегрування рівняння Власова за всіма швидкостями приводить до рівняння неперервності

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{v}_s) = 0.$$

Яку властивість функції розподілу потрібно використати, щоб поверхневий інтеграл у просторі швидкостей зник?

7.2. ★★★ Для максвеллівського розподілу покажіть, що

$$p_s = \frac{m_s}{3} \int c^2 f_s \, d^3v = n_s T_s.$$

Поясніть, чому цей результат потребує ізотропності розподілу.

7.3. ★★☆ Для ленгмюрівської хвилі в плазмі з $T_e = 10$ еВ, $n_e = 10^{12}$ см$^{-3}$ та довжиною хвилі $\lambda = 2\pi/k = 1$ мм: (а) знайдіть v_φ, відношення v_φ/v_{Te} і декремент γ/ω_{pe} за (7.31). Чи виконується умова слабкого загасання? Поясніть, чому саме частинки з $v \simeq v_\varphi$ відіграють особливу роль. (б) За якої довжини хвилі амплітуда спадає в e разів за ~ 10 періодів?

7.4. ★★★ Для максвеллівського розподілу обчисліть найімовірнішу швидкість, середню швидкість $\langle v \rangle$ і середньоквадратичну швидкість.

7.5. ★★★ У моделі БГК інтеграл зіткнень $-\nu\,\delta f$ додається до рівняння Власова для збурення δf. Знайдіть δf і покажіть, що в знаменниках (7.28) відбувається заміна $\omega \to \omega + i\nu$. Як це поєднує результати розділу про зіткнення й кінетичну теорію? (Проста форма не зберігає число частинок; це наближення слід мати на увазі.)

7.6. ★★★ Із (7.28) для $\omega/k \gg v_{Te}$ розкладіть знаменник за kv/ω і самостійно одержіть закон Бома–Гросса $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2$ ($v_{Te}^2 = T_e/m_e$).

7.7. ★★★ Для розподілу $F = (n/2)[\delta(v-u) + \delta(v+u)]$ одержіть із (7.28) дисперсійне рівняння двопотокової нестійкості і порівняйте з задачею 8.5.

7.8. ★★☆ Оцініть частоту коливань захопленої частинки $\omega_b = \sqrt{ek^2\varphi_0/m}$ для хвилі з $e\varphi_0/T_e = 10^{-3}$ при $k\lambda_{De} = 0{,}3$ і порівняйте з γ. Чи встигне відбутися захоплення?

7.9. ★★★ Розподіл електронів складається з максвеллівського «тіла» (n_0, v_{Te}) та слабкого пучка ($n_b \ll n_0$, швидкість $v_b \gg v_{Te}$, розкид $\Delta v \ll v_b$). Використовуючи (7.30), оцініть інкремент нестійкості $\gamma \sim \omega_{pe}(n_b/n_0)(v_b/\Delta v)^2$ та поясніть, чому він максимальний при v_φ трохи менше v_b.

7.10. ★★☆ Спектр томсонівського розсіяння ($\theta = 90°$, $\lambda_i = 1064$ нм) має гауссів профіль зі стандартним відхиленням $\sigma_\lambda = 20$ нм. Знайдіть T_e і переконайтеся, що розсіяння некогерентне при $n_e = 5 \times 10^{13}$ см$^{-3}$.

7.11. ★★☆ Для CO_2-лазера ($\lambda_i = 10{,}6$ мкм) у плазмі з $T_e = 100$ еВ, $n_e = 10^{14}$ см$^{-3}$ знайдіть кут розсіяння, при якому $\alpha = 1$. При яких кутах розсіяння колективне? Чому для $\lambda_i = 1064$ нм колективний режим при тих самих параметрах недосяжний?

Контрольні питання

1. Що таке функція розподілу $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ і чим вона відрізняється від концентрації n_s?
2. Як через моменти функції розподілу визначають концентрацію, середню швидкість та тензор тиску?
3. Чому в загальному випадку тиск є тензором, а не скаляром?
4. Який фізичний зміст рівняння Власова?
5. Що змінюється в кінетичному рівнянні, якщо зіткнення не можна нехтувати?
6. Чому кулонівські зіткнення не можна просто моделювати як зіткнення твердих кульок?
7. Що визначає ширину максвеллівського розподілу?
8. Чому в плазмі можуть бути різні температури електронів та іонів?
9. Як із кінетичного рівняння отримується рівняння неперервності?
10. Чому ієрархія моментів не замикається сама?
11. Які припущення можуть використовуватися для замикання рідинної моделі?
12. У чому фізичний зміст формули Бома–Гросса?

13. Чим загасання Ландау відрізняється від омічної дисипації?

14. Чому для опису загасання Ландау недостатньо знати лише n, $\mathbf{v}$ та T?

15. Від чого залежить знак декремента γ у формулі (7.30)? Коли хвиля зростає?

16. Що таке нелінійне захоплення частинок хвилею і чому воно припиняє загасання?

17. За яких обставин кінетичний опис є принципово необхідним?

18. Чому оборотне рівняння Власова описує загасання?

19. Чому довгі ленгмюрівські хвилі майже не загасають, а короткі ($k\lambda_{De} \sim 1$) загасають так сильно, що практично не існують як хвилі?

20. Чому іонний звук спостерігають лише при $T_e \gg T_i$?

21. Чим відрізняється томсонівське розсіяння при $\alpha \ll 1$ та $\alpha \gtrsim 1$ і яку інформацію про плазму дає кожен режим?

8 Загальний принцип нестійкості плазми

§ 8.1. Що означає нестійкість?

До цього моменту ми розглядали рівноважні стани плазми та різні рівняння, якими можна описувати її рух. Але саме по собі знаходження рівноваги ще не означає, що така конфігурація може існувати тривалий час.

Уявімо, що плазма перебуває в деякому стані рівноваги. До неї неминуче вносяться малі збурення: тепловий рух частинок, флуктуації густини, електричного та магнітного полів, похибки зовнішнього поля. Питання стійкості полягає в тому, що відбувається з таким малим відхиленням.

Якщо після відхилення система повертається до початкового стану, рівновага стійка. Якщо збурення залишається приблизно сталим, маємо нейтральну стійкість. Якщо ж навіть дуже мале збурення з часом зростає, рівновага нестійка (рис. 8.1).

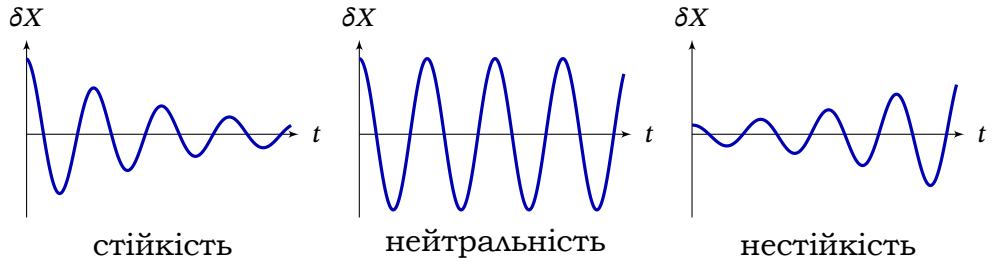


Рис. 8.1. Три можливі типи еволюції малого збурення рівноваги.

Іграшковий приклад з механіки: маятник у нижньому положенні має $\omega^2 = g/l > 0$ (коливання), у верхньому — $\omega^2 = -g/l < 0$, тобто $\gamma = \sqrt{g/l}$ (експоненціальне зростання). Тут одразу видно і знак ω^2, і «вільну енергію» (потенціальна енергія в максимумі), і ідея енергетичного принципу (розд. 8.12).

Це визначення важливе тим, що воно не прив'язане до конкретної моделі. Одна й та сама ідея працює для механічної системи, рідини, плазми, електромагнітного поля або кінетичного розподілу частинок.

Розглянемо рівноважний стан X_0 і мале збурення δX. Тоді записуємо

$$X = X_0 + \delta X, \tag{8.1}$$

де припускаємо, що $|\delta X| \ll |X_0|$. Саме ця нерівність дозволяє спочатку розглядати збурення незалежно від його нелінійної взаємодії із самою рівновагою.

§ 8.2. Лінеаризація: як знайти долю малого збурення

Нехай рівняння плазми можна символічно записати як

$$\mathcal{F}(X) = 0. \tag{8.2}$$

Підставимо в нього представлення (8.1). Розкладаючи рівняння за степенями малого збурення, одержуємо

$$\mathcal{F}(X_0) + \left.\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X}\right|_{X_0} \delta X + \mathcal{O}(\delta X^2) = 0. \tag{8.3}$$

Перший доданок у (8.3) зникає, оскільки X_0 є рівноважним станом. Залишається рівняння першого порядку за збуренням:

$$\mathcal{L}\, \delta X = 0, \tag{8.4}$$

де $\mathcal{L}$ — лінійний оператор, визначений властивостями рівноваги.

Це і є головний технічний крок теорії стійкості. Замість повного нелінійного рівняння ми спочатку питаємо значно простіше:

Що зробить система з нескінченно малим відхиленням від рівноваги?

Якщо воно зростає, рівновага нестійка вже на лінійному рівні.

§ 8.3. Хвиля, що може рости

Для однорідної рівноваги зручно розглядати окрему просторово-часову гармоніку:

$$\delta X \propto \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]\,. \tag{8.5}$$

Тут $\mathbf{k}$ визначає просторовий масштаб збурення, а ω — його частоту. Важливо, що в загальному випадку ω може бути комплексною:

$$\omega = \omega_r + i\gamma. \tag{8.6}$$

Підставивши (8.6) у (8.5), одержуємо

$$\delta X \propto \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega_r t)\,\exp(\gamma t). \tag{8.7}$$

Тому знак γ безпосередньо визначає долю збурення:

$$\begin{aligned} \gamma > 0 &\;\Rightarrow\; \text{зростання},\\ \gamma < 0 &\;\Rightarrow\; \text{загасання},\\ \gamma = 0 &\;\Rightarrow\; \text{нейтральність}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Отже, критерій лінійної нестійкості можна сформулювати дуже коротко: потрібна наявність розв'язку з

$$\operatorname{Im}\omega > 0. \tag{8.9}$$

Часова шкала розвитку нестійкості визначається величиною γ:

$$\tau_{\text{inst}} \sim \frac{1}{\gamma}. \tag{8.10}$$

Таким чином, нестійкість — це не просто твердження, що «плазма поводиться хаотично». На початковій стадії це цілком визначений експоненційний ріст певної моди збурення (рис. 8.2).

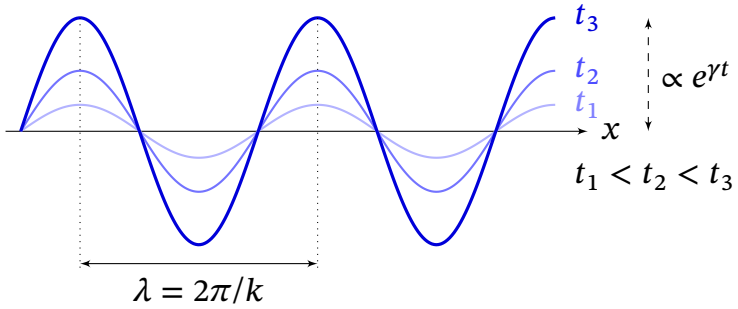


Рис. 8.2. Нестійка хвиля: просторова структура моди та її зростання з часом.

§ 8.4. Дисперсійне рівняння

Після підстановки (8.5) лінеаризовані рівняння перетворюються на систему алгебраїчних рівнянь для амплітуд різних величин. Її можна символічно записати у вигляді

$$\mathsf{D}(\omega,\mathbf{k})\,\mathbf{A} = 0, \tag{8.11}$$

де $\mathbf{A}$ містить амплітуди збурених величин, а D — матриця, яка визначається моделлю плазми та вибраною рівновагою.

Нетривіальний розв'язок (8.11) існує лише тоді, коли

$$\det \mathsf{D}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \tag{8.12}$$

Це дисперсійне рівняння. Воно є одним із центральних інструментів теорії плазмових нестійкостей.

Для кожного $\mathbf{k}$ воно визначає можливі значення ω. Якщо серед них є корінь, що задовольняє умову (8.9), відповідна мода нестійка.

Тут виникає важливий зв'язок із попередніми розділами. У теорії хвиль ми вже шукали дисперсійні співвідношення. Але тепер нас цікавить не лише залежність дійсної частоти від хвильового числа. Насамперед треба з'ясувати, чи має частота уявну частину і що означає її знак (рис. 8.3).

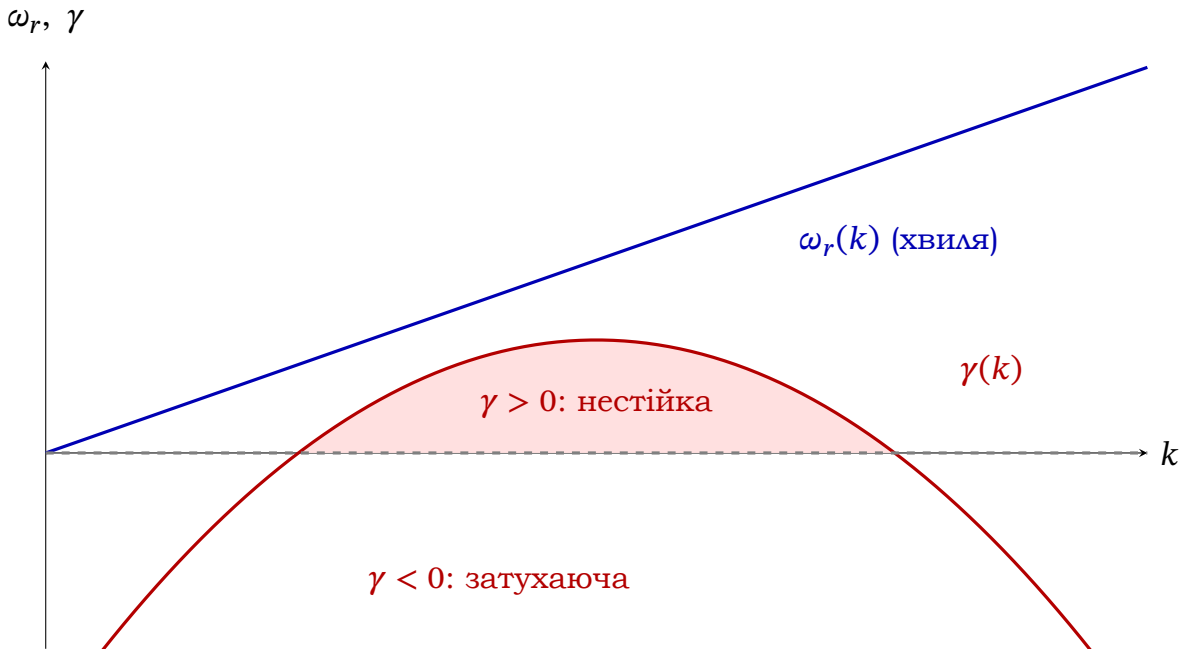


Рис. 8.3. Дисперсійне співвідношення як спосіб визначення спектра плазмових мод та їхньої стійкості.

§ 8.5. Звідки береться енергія нестійкості?

Формальна умова (8.9) говорить, *що* відбувається, але не пояснює, *чому* збурення росте. Фізично нестійкість означає, що система має джерело вільної енергії, яку збурення може перетворювати на енергію руху, електричних або магнітних полів.

У плазмі такою вільною енергією можуть бути:

- градієнти густини та температури;
- запас енергії магнітного поля;
- енергія електричного струму;

- анізотропія розподілу швидкостей;
- енергія пучка заряджених частинок;
- неоднорідність магнітної конфігурації.

Тому нестійкість не «виникає з нічого». Вона є механізмом перетворення енергії нерівноважного стану на зростаюче збурення (рис. 8.4).

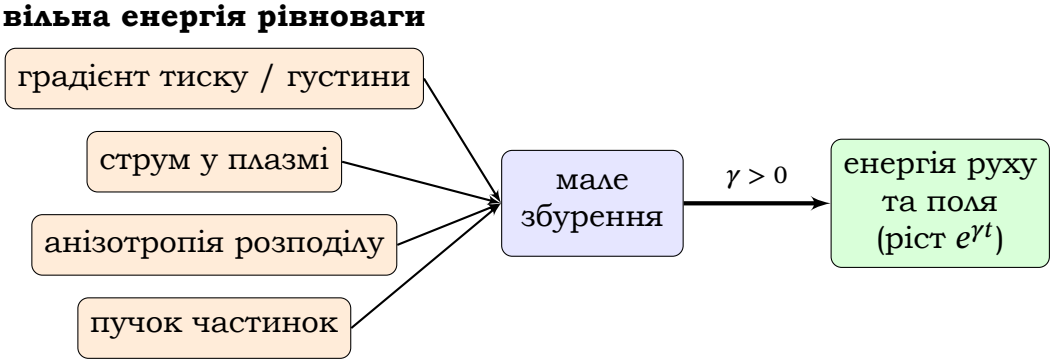


Рис. 8.4. Фізичне походження плазмової нестійкості: збурення отримує енергію з нерівноважного стану плазми.

Саме тому стійкість не можна визначити лише за величиною зовнішнього магнітного поля. Сильне поле може змінювати траєкторії частинок, але якщо в системі залишається доступне джерело вільної енергії, можуть існувати нестійкі моди.

§ 8.6. Рівновага та стійкість у магнітному полі

Для магнітного утримання особливо важливо розрізняти два питання:

1. чи може існувати рівновага сил;
2. чи є ця рівновага стійкою до малих збурень.

У простому однорідинному МГД-описі рівновага плазми задовольняє умову

$$-\nabla p + \frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = 0. \tag{8.13}$$

Рівняння (8.13) лише говорить, що сила градієнта тиску компенсується магнітною силою. Воно ще нічого не говорить про те, що стан буде зберігатися після малого зміщення.

Щоб зрозуміти це фізично, розглянемо магнітну силу. Її зручно розкласти на дві частини:

$$\frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = -\nabla \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}. \tag{8.14}$$

Перша частина поводиться як градієнт магнітного тиску

$$p_B = \frac{B^2}{8\pi}, \tag{8.15}$$

а друга пов'язана з натягом викривлених силових ліній.

Отже, магнітне поле не просто «тисне» на плазму. Його силові лінії можуть діяти подібно до натягнутих еластичних ниток, намагаючись зменшити свою кривину (рис. 8.5).

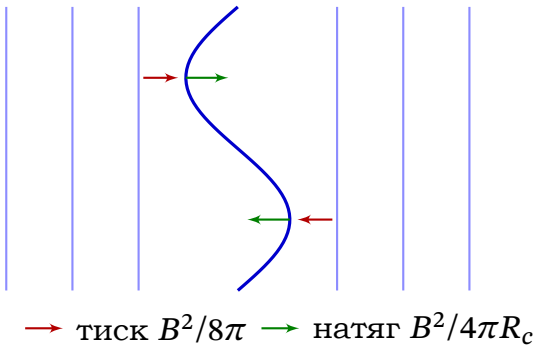


Рис. 8.5. Дві складові магнітної сили: магнітний тиск і натяг силових ліній.

Ця картина стане особливо важливою в розд. 9, де розглядатимуться конкретні конфігурації магнітного утримання.

§ 8.7. Перетяжка як найпростіший приклад нестійкості

Уявімо плазмовий струм, який створює власне магнітне поле. Якщо плазмовий канал має невелику локальну перетяжку, магнітна сила може зробити цю перетяжку ще сильнішою: поле струму $B_\theta = 2I/(cr)$ у вузькому місці більше, тиск $B_\theta^2/8\pi$ теж, і перетяжка стискається далі (позитивний зворотний зв'язок).

Це принципово відрізняється від звичайної стійкої системи. Для стійкої рівноваги початкове зміщення породжує силу, яка повертає систему назад. Для нестійкої — виникає сила в напрямку самого зміщення.

Кількісний розбір перетяжок ($m = 0$), викривлень ($m = 1$) і стабілізації поздовжнім полем B_z з числовими оцінками часу росту наведено в розд. 9.6 (рис. 9.3). Тут для нас важливий лише загальний висновок: нестійкість — це рівновага, у якій збурення змінює сили так, що підсилює саме себе.

§ 8.8. Лінійна та нелінійна стадії

Поки виконується умова малості збурення в (8.1), можна користуватися лінеаризованим рівнянням (8.4). Тоді кожна мода розвивається незалежно від інших, а її амплітуда для нестійкого випадку зростає як

$$|\delta X(t)| \sim |\delta X(0)| e^{\gamma t}. \tag{8.16}$$

Але експоненційне зростання не може тривати нескінченно. Рано чи пізно збурення стає порівнянним із величинами рівноважного стану, і члени вищих порядків, якими ми нехтували при лінеаризації, стають важливими.

Починається нелінійна стадія. На ній можливі насичення нестійкості, перерозподіл енергії між модами, утворення структур, турбулентність або руйнування початкової конфігурації (рис. 8.6).

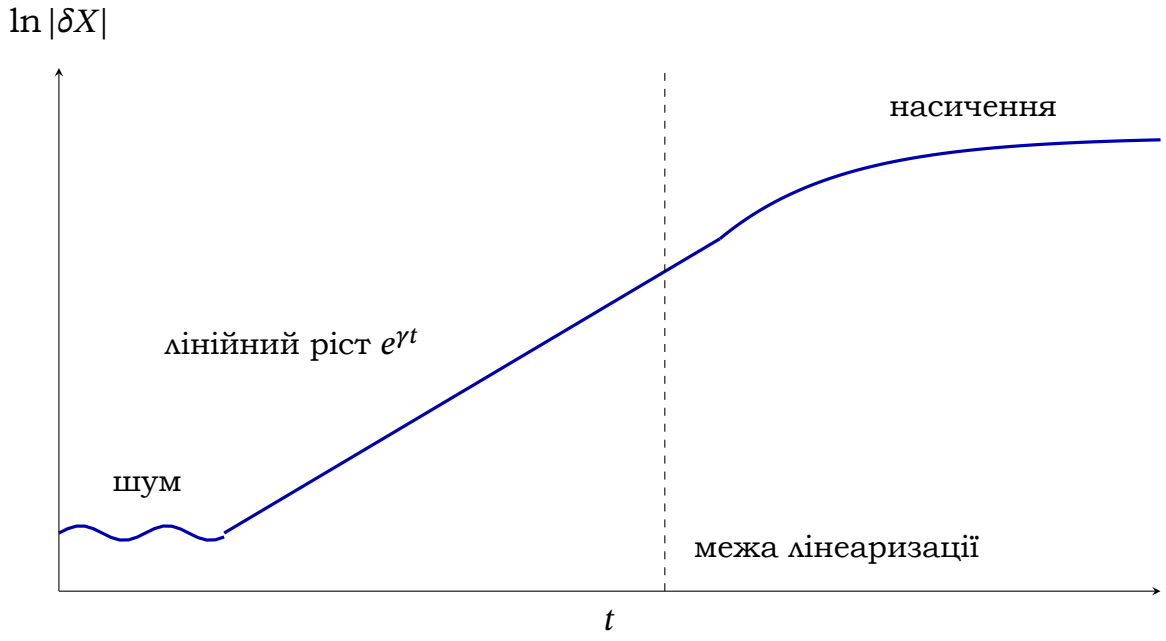


Рис. 8.6. Типова еволюція нестійкості від малого збурення до нелінійної стадії.

Це розрізнення буде важливим далі: лінійна теорія визначає, *чи* є рівновага нестійкою і які моди ростуть найшвидше, але не завжди визначає кінцевий стан системи.

§ 8.9. Нестійкість Релея–Тейлора та жолобкова нестійкість

Найпростіша й найпоширеніша гідродинамічна нестійкість виникає, коли важча рідина розташована над легшою в полі тяжіння $\mathbf{g}$

(рис. 8.7). Для двох нестисливих рідин з густинами $\rho_2 > \rho_1$ та плоскою границею, збуренням $\delta\xi \propto e^{i(kx-\omega t)}$ лінеаризація дає

$$\omega^2 = -A\,g\,k, \qquad A = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \qquad \gamma = \sqrt{A\,g\,k}. \tag{8.17}$$

Тут A — *число Атвуда*. Результат легко зрозуміти з енергетичного аргументу. Нехай границя зміщена на $\xi(x) = \xi_0 \cos kx$. Важча рідина опускається, тому на одиницю площі потенціальна енергія змінюється на $\delta U = -\frac{1}{4}(\rho_2 - \rho_1) g \xi_0^2$. Течія нестисливої рідини потенціальна й загасає як $e^{-k|z|}$ від границі, тому кінетична енергія (на одиницю площі) з обох боків $K = \frac{1}{4}(\rho_1 + \rho_2)\dot{\xi}_0^2/k$: ефективна маса $\propto (\rho_1 + \rho_2)/k$. З рівняння руху $(\rho_1+\rho_2)\ddot{\xi}_0/k = (\rho_2-\rho_1) g \xi_0$ маємо $\ddot{\xi}_0 = Agk\,\xi_0$, тобто (8.17). Усі k нестійкі, причому короткі хвилі ростуть швидше. Вільна енергія — потенціальна енергія важчої рідини в полі тяжіння: «язики» важкої рідини падають, «бульбашки» легкої спливають.

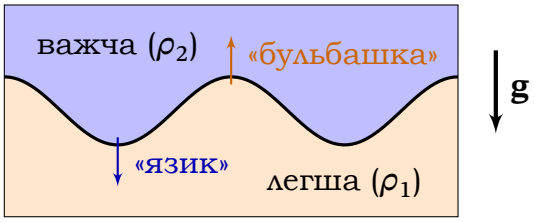


Рис. 8.7. Нестійкість Релея–Тейлора: важча рідина над легшою; границя з малим збуренням розвивається в «язики» та «бульбашки».

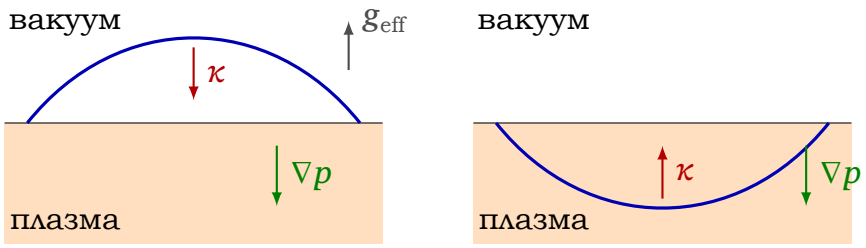
У плазмі «гравітацію» створюють *ефективні сили*, які діють на частинки в неоднорідному й викривленому магнітному полі: відцентрова сила $mv_\parallel^2/R_c$ та сила градієнтного дрейфу (розд. 3). Для гарячої плазми з $v_\parallel^2 \sim v_\perp^2/2 \sim T/m$ ефективне прискорення $g_{\text{eff}} \sim 2T/(m_i R_c)$. Нестійкі збурення з $k_\parallel = 0$ (вони не згинають силові лінії, а обмінюють місцями магнітні трубки) називають *жолобковими* (*interchange*, flute); для них

$$\gamma^2 \sim \frac{g_{\text{eff}}}{L_p} \sim \frac{2c_s^2}{R_c L_p}, \qquad L_p = \left|\frac{d\ln p}{dr}\right|^{-1}, \tag{8.18}$$

а критерій нестійкості: $\nabla p \cdot \kappa > 0$, де κ — кривина силової лінії (вектор спрямований до центра кривизни). Іншими словами, плазма нестійка в області «поганої» кривини: центр кривини силових ліній лежить з боку плазми, $\nabla p \cdot \kappa > 0$ (зовнішній бік тора, просте дзеркало). Кривина «хороша», якщо центр кривини лежить з боку вакууму (внутрішній бік тора, конфігурації min-B, наприклад котушки Іоффе): поле тоді стабілізує (рис. 8.8). Ефективна «гравітація» g_{eff} — це відцентрова сила частинок, що біжать уздовж лінії (разом із ∇B-дрейфом); у пога-

ній кривині вона спрямована від плазми до вакууму, тобто «важка» плазма стоїть над «легким» вакуумом, як у нестійкості Релея–Тейлора.

Механізм через розділення зарядів (жолобкова нестійкість). У плазмі немає гравітації, але є дрейф кривини/∇B (розд. 3): він спрямований у протилежні боки для іонів та електронів, тому на «язиках» збурення накопичуються заряди протилежних знаків. Виникає електричне поле δE_y, і дрейф $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ виносить язик *далі* в бік поганої кривини — збурення зростає.



погана кривина: $\nabla p\cdot\kappa > 0$ **хороша кривина:** $\nabla p\cdot\kappa < 0$

Рис. 8.8. Погана (ліворуч) і хороша (праворуч) кривина силових ліній. κ — вектор кривини, спрямований до центра кривини; ∇p — напрям зростання тиску; g_{eff} — ефективна сила (відцентрова).

Числова оцінка. Для зовнішньої області токамака: $c_s \approx 10^8$ см/с, $R_c = 6\times10^2$ см, $L_p \sim 50$ см. Тоді $\gamma \sim \sqrt{2\cdot10^{16}/(3\cdot10^4)} \approx 8\times10^5$ с$^{-1}$, час росту ~ 1 мкс, що на 5–6 порядків менше за час утримання (від 0,1 до 1 с).

Тому реальні установки мусять бути влаштовані так, щоб жолобкові моди були стабілізовані: сумарною «хорошою» кривиною (пастки з мінімумом B, токамак з широм), магнітним широм і т. п.

§ 8.10. Двопотокова нестійкість та нестійкість пучка

Інший клас нестійкостей живиться вільною енергією *розподілу частинок за швидкостями*. Нехай холодний електронний пучок густини $n_b \ll n_0$ та швидкості v_b проходить крізь холодну плазму (n_0, нерухомий іонний фон). Для поздовжніх хвиль $\varepsilon(\omega,k)=0$. Дисперсійне рівняння можна вивести двома шляхами. (а) Холодна гідродинаміка двох потоків (неперервність + рух + Пуассон, як для ленгмюрівської хвилі в розд. 2): для кожного потоку j лінеаризована швидкість $\delta v_j \propto \widetilde{E}/(\omega - kv_j)$, збурення густини $\delta n_j = n_j k\,\delta v_j/(\omega-kv_j) \propto \widetilde{E}/(\omega-kv_j)^2$, а рівняння Пуассона дає $1 = \sum_j \omega_{pj}^2/(\omega-kv_j)^2$, де $v_j=0$ для фонової плазми та $v_j = v_b$ для пучка. (б) З кінетичної ε розд. 7.8 (формула (7.28)) підстановкою $F = n_0\delta(v) + n_b\delta(v-v_b)$ (ω_p — плазмова частота фонової

плазми, ω_b — пучка). Результат:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k v_b)^2} = 0, \qquad \omega_b^2 = \omega_p^2 \frac{n_b}{n_0}. \tag{8.19}$$

Найсильніша взаємодія — при резонансі $k v_b \approx \omega_p$: покладемо $\omega = \omega_p + \delta$, $|\delta| \ll \omega_p$. Тоді $1 - \omega_p^2/\omega^2 \approx 2\delta/\omega_p$, а $(\omega - k v_b)^2 \approx \delta^2$, тому $2\delta/\omega_p \approx \omega_b^2/\delta^2$, тобто $\delta^3 = \omega_p \omega_b^2/2$. Три корені $\delta = (\omega_p \omega_b^2/2)^{1/3} e^{2\pi i j/3}$ включають один із додатною уявною частиною ($j = 1$: $\operatorname{Im} e^{2\pi i/3} = \sqrt{3}/2$, звідси множник $\sqrt{3}/2$ і кубічний корінь):

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n_b}{2 n_0} \right)^{1/3} \omega_p. \tag{8.20}$$

Навіть для $n_b/n_0 = 10^{-3}$ інкремент $\gamma \approx 0{,}07\,\omega_p$, тобто хвиля зростає в e разів за ~ 2 періоди плазмових коливань. Фізично: повільна хвиля пучка ($\omega < k v_b$) має *від'ємну енергію* — її збудження *зменшує* кінетичну енергію пучка сильніше, ніж додає енергії коливань. Зв'язок такої хвилі з ленгмюрівською хвилею плазми (додатна енергія) дозволяє обом наростати одночасно: енергія коливань береться зі сповільнення пучка, а повна енергія системи «пучок + хвиля» зберігається.

Для теплового пучка резонанс стає кінетичним: ріст зумовлений частинками з $v \simeq v_\varphi$ на висхідній ділянці розподілу $F_0'(v_\varphi) > 0$ (рис. 8.9); це *обернене загасання Ландау* (формула (7.30)). Нестійкість насичується, коли пучок розмивається й утворюється плато. Приклад — радіосплески III типу від електронних пучків у короні Сонця. Інший приклад — *аномальний опір* плазми. Коли електронний дрейф відносно іонів перевищує тепловий, виникає нестійкість Бунемана з $\gamma \sim (m_e/2m_i)^{1/3}\omega_{pe}$. Електрони тоді віддають імпульс не іонам через зіткнення, а хвилям, які потім передають його іонам. Ефективна частота «зіткнень» $\nu_{\text{eff}} \sim \gamma$ (або $\sim \omega_{pi}$) набагато перевищує кулонівську, тому $\eta_{\text{an}} \gg \eta_{\text{Spitzer}}$ (розд. 4).

§ 8.11. Нестійкості анізотропної плазми

У замагніченій беззіткнювальній плазмі збереження μ (розд. 3) приводить до анізотропії тиску $p_\perp \neq p_\parallel$ (наприклад, при стисканні поля $p_\perp$ зростає). Анізотропія — ще одне джерело вільної енергії. Дві головні нестійкості:

- *шлангова* (firehose): якщо $p_\parallel - p_\perp > B^2/4\pi$, тобто $\beta_\parallel - \beta_\perp > 2$, відцентрова сила частинок, що біжать уздовж викривленої лінії, перевищує натяг лінії. Оцінка: на одиницю об'єму відцентрова сила частинок $\sim n m v_\parallel^2/R_c \sim p_\parallel/R_c$, діамагнітна реакція $\sim p_\perp/R_c$ їй протидіє, а натяг лінії дає $B^2/(4\pi R_c)$; звідси поріг $p_\parallel - p_\perp > B^2/4\pi$. Дисперсія

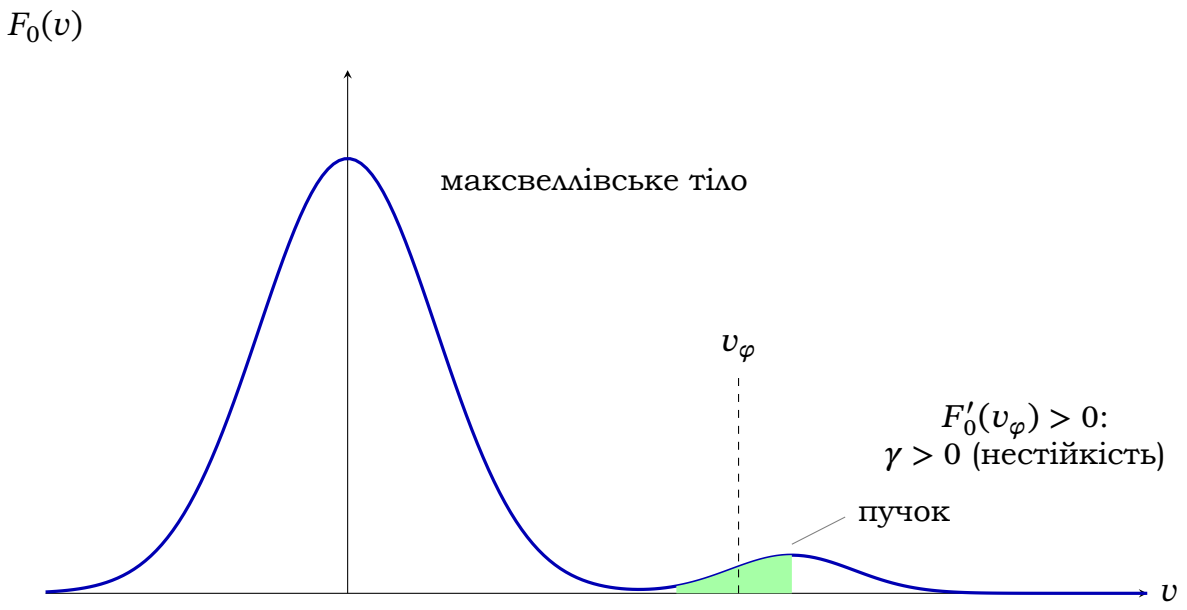


Рис. 8.9. Нестійкість «пучка на хвості»: хвиля з фазовою швидкістю на висхідній ділянці розподілу отримує енергію від частинок, і $\gamma > 0$.

альвенівської хвилі змінюється на $\omega^2 = k_\parallel^2 \left[B^2/4\pi + p_\perp - p_\parallel\right]/\rho_m$ і за зміни знака дужки стає від'ємною: лінія «б'ється», як шланг під тиском води;

- *дзеркальна*: якщо $\beta_\perp(T_\perp/T_\parallel - 1) > 1$, виникають локальні «дзеркальні пастки», в яких частинки захоплюються й поле зменшується там, де тиск більший. Механізм: частинки з великим $v_\perp$ (при $\mu = \text{const}$) виштовхуються силою $-\mu\nabla B$ з області сильного поля в слабке й підсилюють провал поля.

Саме ці пороги обмежують анізотропію в сонячному вітрі та магнітосфері планет.

§ 8.12. Енергетичний принцип

Лінеаризоване рівняння ідеальної МГД для зміщення плазми $\boldsymbol{\xi}$ має вигляд $\rho_m\,\partial^2\boldsymbol{\xi}/\partial t^2 = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ — аналог рівняння $m\ddot{x} = -U'(x)$ у механіці. Для консервативної системи оператор $\mathbf{F}$ самоспряжений (ермітів, як гамільтоніан у квантовій механіці), тому ω^2 дійсне, і для нормальної моди

$$\omega^2 = \frac{\delta W}{K}, \qquad K = \frac{1}{2}\int \rho_m |\boldsymbol{\xi}|^2 dV,$$

де K — «кінетична норма», а δW — зміна потенціальної енергії (формула (8.21) нижче). Стійкість означає, що рівновага лежить у мінімумі потенціальної енергії для *будь-якого* зміщення (як маятник у нижній точці; перевернутий маятник — нестійкий). Нестійкість ($\omega^2 < 0$) означає наявність зміщення, яке *знижує* потенціальну енергію. Тому

рівновага стійка тоді й лише тоді, коли для всіх допустимих зміщень

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{\xi}^* \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})\, dV > 0. \tag{8.21}$$

Для ідеальної МГД δW допускає зручне розкладання (з $\mathbf{Q} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})$, κ — кривина лінії):

$$\begin{aligned}\delta W = \frac{1}{2}\int \Big[& \underbrace{\frac{|\mathbf{Q}_\perp|^2}{4\pi}}_{\text{згин ліній}} + \underbrace{\frac{B^2}{4\pi}\left|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\kappa\right|^2}_{\text{стиск поля}} + \underbrace{\gamma p\,|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2}_{\text{стиск плазми}} \\ & - \underbrace{2(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla p)(\kappa\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)}_{\text{тиск}\times\text{кривина}} - \underbrace{\frac{j_\parallel}{c}(\boldsymbol{\xi}_\perp^*\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{Q}_\perp}_{\text{струм}}\Big] dV.\end{aligned} \tag{8.22}$$

Перші три доданки додатні й стабілізують; знак двох останніх залежить від зміщення — вони є *рушіями* нестійкостей: градієнт тиску в області поганої кривини (жолобкова/балонна нестійкість) і поздовжній струм (кінк-нестійкість; критерій Крускала–Шафранова, розд. 9). Тому стійкість конфігурації визначається мінімумом δW за всіма допустимими зміщеннями, а для доведення нестійкості досить одного пробного зміщення з $\delta W < 0$.

§ 8.13. Дрейфові хвилі та аномальний перенос

Навіть якщо жолобкові й кінк-моди стабілізовані, плазма з градієнтом густини $L_n = |d\ln n/dx|^{-1}$ лишається нестійкою до *дрейфових хвиль*. Нехай електрони вздовж $\mathbf{B}$ встигають встановити больцманівський розподіл: $\delta n/n_0 = e\varphi/T_e$. Збурення густини переноситься дрейфом $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ у неоднорідному фоні: $\partial_t \delta n + v_{Ex}\, dn_0/dx = 0$, з $v_{Ex} = cE_y/B = -ick_y\varphi/B$ (бо $E_y = -ik_y\varphi$). Густина спадає вздовж x: $dn_0/dx = -n_0/L_n$. Алгебра: $-i\omega\,\delta n = -v_{Ex} n_0'$, а з $\delta n = n_0 e\varphi/T_e$ маємо $-i\omega\, n_0 e\varphi/T_e = -(ick_y\varphi/B)\, n_0/L_n$, звідки

$$\omega = \omega_* = k_y v_*, \qquad v_* = \frac{cT_e}{eBL_n} \tag{8.23}$$

(діамагнітна швидкість; для $T_e = 10$ кеВ, $B = 5\times10^4$ Гс, $L_n = 50$ см $v_* \approx 4\times10^5$ см/с). Хвиля поширюється в напрямку електронного дрейфу й сама по собі нейтрально стійка; малі дисипативні ефекти (зіткнення, резонанс Ландау на електронах) зсувають фазу між δn та φ й роблять її нестійкою. Розвиток турбулентності дрейфових хвиль створює випадкові поля $\widetilde{\mathbf{E}}\times\mathbf{B}$, які переносять частинки й тепло поперек поля набагато ефективніше за зіткнення. Оцінка за Бомом: $D_B = cT_e/16eB \approx 10^6$ см^2/с, а для турбулентності зі сталим масштабом $\rho_s = c_s/\omega_{ci}$ (гіро-Бомівська модель) $D \sim (\rho_s/a)D_B \sim 2\times10^3$ см^2/с ($\rho_s \approx$

0,2 см, $a \approx 1$ м). Це на два порядки більше за класичну оцінку $\chi_\perp \sim 10$ см^2/с з розд. 5, і саме цей аномальний перенос визначає реальний час утримання $\tau_E \sim a^2/D \sim$ секунди.

§ 8.14. Від загального принципу до конкретних нестійкостей

Отже, аналіз плазмової нестійкості має загальну послідовність:

1. задається рівноважний стан;
2. до нього додається мале збурення;
3. рівняння лінеаризуються;
4. шукаються моди у вигляді (8.5);
5. з отриманого дисперсійного рівняння (8.12) визначається $\omega(\mathbf{k})$;
6. знак $\operatorname{Im}\omega$ визначає стійкість моди;
7. для нестійких мод визначається швидкість їхнього росту за (8.10).

Фізично ж треба поставити ще одне питання: *звідки ця мода бере енергію?* Саме відповідь на нього відрізняє різні класи нестійкостей (табл. 8.1).

Таблиця 8.1. Основні класи плазмових нестійкостей.

Нестійкість	**Джерело енергії**	**Умова**	**Швидкість росту**
Релея–Тейлора, жолобкова	градієнт тиску в поганій кривині	$\nabla p \cdot \kappa > 0$	$\sqrt{g_{\text{eff}}/L_p}$
Двопотокова, пучок — плазма	кінетична енергія пучка	$kv_b \approx \omega_p$	$\sim (n_b/n_0)^{1/3}\omega_p$
«Пучок на хвості»	висхідна ділянка $F_0' > 0$	$F_0'(v_\varphi) > 0$	кінетична, за (7.30)
Шланг / дзеркальна	анізотропія $p_\perp \neq p_\parallel$	$\beta_\parallel - \beta_\perp > 2$ / $\beta_\perp(T_\perp/T_\parallel - 1) > 1$	$\sim \omega_{ci}$
Кінк, перетяжка	струм у плазмі	$q < 1$ та ін.	$\sim v_A/a$
Дрейфова	градієнт густини	будь-яка за дисипації	$\lesssim \omega_*$

У магнітному утриманні такими джерелами можуть бути струми, градієнти тиску, кривина та неоднорідність магнітного поля (розд. 9). У кінетичній плазмі додатково виникають анізотропія розподілу швидкостей, пучки частинок і резонансна взаємодія хвиль із частинками. Тому наступний крок — розглянути конкретні конфігурації магнітного утримання й з'ясувати, які збурення вони допускають і які фізичні механізми їх підсилюють.

§8.15. Як це вимірюють: котушки Мірнова і м'який рентген

Нестійка мода — це біжуче збурення $\delta B \propto \exp[i(m\theta - \omega t)]$, тож її видно двома способами.

Котушки Мірнова. Невеликі котушки (N витків, площа S) вздовж стінки реєструють δB через закон індукції:

$$\mathcal{E} = -\frac{NS}{c}\frac{d\,\delta B}{dt}, \qquad |\mathcal{E}| = \frac{NS}{c}\,\omega\,\delta B \tag{8.24}$$

(СГС, $\mathcal{E}$ у статвольтах). Фазовий зсув між сусідніми котушками, рознесеними на кут $\Delta\theta$, дорівнює $m\Delta\theta$, тож набір котушок дає полоїдальне число m (аналогічно — тороїдальне n), а частота — швидкість обертання моди.

Числова оцінка. Для $N = 100$, $S = 1$ см^2, $f = 10$ кГц, $\delta B = 10$ Гс: $|\mathcal{E}| \approx 2{,}1 \times 10^{-3}$ ст.В $\approx 0{,}6$ В — легко вимірюється.

М'який рентген. Гальмівне випромінювання плазми з емісійністю $\varepsilon \propto n_e^2 Z_{\text{eff}} T_e^{1/2}$ (у вузькому спектральному вікні залежність від T_e ще крутіша) реєструють лінійкою діодів уздовж хорд. Сигнал є інтегралом по хорді, а оскільки ε різко зростає з T_e, він чутливий до внутрішніх областей. Пилкоподібні коливання (періодичні перебудови осердя токамака) показують різкий спад сигналу в центрі й стрибок на периферії; радіус інверсії позначає поверхню $q = 1$, а томографічна реконструкція за багатьма хордами відновлює двовимірну структуру острова.

Межі застосовності. Котушки бачать лише збурення *на стінці*: поле моди, локалізованої на резонансній поверхні r_s, спадає назовні приблизно як $(r_s/b)^{m+1}$, тож моди з високим m у глибині плазми до стінки майже не доходять, а внутрішню структуру моди треба відновлювати за моделлю. М'який рентген дає хордові інтеграли, тож потрібне обернення (Абеля або томографія), а внесок домішок (Z_{eff}) і T_e дозволяє розділити лише порівняння сигналів за двома різними фільтрами.

Головне в розділі

- Нестійкість — експоненційне зростання малого збурення, $\operatorname{Im}\omega > 0$; її знаходять із дисперсійного рівняння.
- Кожна нестійкість має джерело вільної енергії: градієнт тиску, пучок, анізотропію розподілу, струм.
- Лінійна теорія визначає, чи рівновага нестійка, але не кінцевий стан: на нелінійній стадії зростання насичується.
- Нестійкості Релея–Тейлора, двопотокова, шлангова, кінк та інші — приклади одного й того самого загального принципу (табл. 8.1).
- Енергетичний принцип зводить стійкість до знака зміни потенціальної енергії; дрейфові хвилі пов'язані з аномальним переносом.
- Котушки Мірнова за законом індукції дають $\delta B(t)$, фазові зсуви між ними — числа m, n; м'який рентген на хордах показує внутрішні моди й пилкоподібні коливання (розд. 8.15).

Задачі

8.1. ★★☆ Для границі двох рідин з густинами $\rho_2 = 2\rho_1$ у полі $g = 10^3$ см/с^2 знайдіть інкремент Релея–Тейлора (8.17) для $\lambda = 1$ см та 10 см. Яка мода ростиме швидше? Поверхневий натяг σ_s змінює дисперсію на $\omega^2 = -Agk + \sigma_s k^3/(\rho_1+\rho_2)$, де $A = (\rho_2-\rho_1)/(\rho_2+\rho_1)$ — число Атвуда. Знайдіть критичне хвильове число $k_c = \sqrt{(\rho_2-\rho_1)g/\sigma_s}$ і поясніть, чому моди з малою λ стабілізуються. Яку роль у плазмі відіграє «поверхневий натяг»?

8.2. ★★☆ Електронний пучок з $n_b = 10^9$ см$^{-3}$ проходить крізь плазму з $n_0 = 10^{12}$ см$^{-3}$. Знайдіть ω_p, γ за (8.20), оптимальну довжину хвилі при $v_b = 10^9$ см/с та число плазмових періодів за час росту в e^{10} разів.

8.3. ★★☆ У сонячному вітрі $B = 5\times10^{-5}$ Гс, $n = 5$ см$^{-3}$, $T_\parallel = 2\times10^5$ К, $T_\perp = 10^5$ К. Перевірте критерій шлангової нестійкості $\beta_\parallel - \beta_\perp > 2$.

8.4. ★★★ Для малого збурення, що має вигляд $\delta X \propto \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$, знайдіть час зростання збурення, якщо $\omega = \omega_r + i\gamma$ і $\gamma = 2\times10^5$ с$^{-1}$. Що зміниться, якщо $\gamma < 0$?

8.5. ★★★ Два однакові зустрічні електронні потоки $\pm v_0$ з плазмовою частотою ω_p кожного задовольняють $1 = \omega_p^2/(\omega - kv_0)^2 + \omega_p^2/(\omega + kv_0)^2$. Покажіть, що $\omega^2 = k^2v_0^2 + \omega_p^2 - \omega_p\sqrt{4k^2v_0^2 + \omega_p^2}$, що нестійкість

існує при $kv_0 < \sqrt{2}\,\omega_p$, а максимальний інкремент $\gamma_{\max} = \omega_p/2$ досягається при $kv_0 = (\sqrt{3}/2)\,\omega_p$. Проілюструйте графічно: побудуйте праву частину як функцію ω і пряму 1.

8.6. ★★★ Для математичного маятника довжини l у перевернутому положенні задайте пробне зміщення θ і знайдіть зміну потенціальної енергії $\delta W(\theta)$. Як за знаком δW визначити стійкість положень $\theta = 0$ і $\theta = \pi$? Чому для доведення нестійкості достатньо знайти одне пробне зміщення з $\delta W < 0$?

8.7. ★☆☆ Котушка Мірнова має $N = 100$ витків площею $S = 1$ см^2. Яку ЕРС вона дає за (8.24) для моди з $f = 10$ кГц і $\delta B = 10$ Гс? Дві котушки на одному тороїдальному перерізі, рознесені на $\Delta\theta = 30°$, показують фазовий зсув 90°. Яке m?

Контрольні питання

1. Що фізично означає стійкість, нейтральність і нестійкість рівноваги?
2. Чому при дослідженні нестійкості спочатку можна розглядати лише лінійні за збуренням члени?
3. Який фізичний зміст дійсної та уявної частин частоти ω?
4. Чому умова $\operatorname{Im}\omega > 0$ означає зростання збурення?
5. Чим відрізняються лінійна та нелінійна стадії розвитку нестійкості?
6. Чому виконання рівняння рівноваги ще не гарантує стійкості плазмової конфігурації?
7. Які дві фізичні ролі магнітного поля видно з (8.14)?
8. Звідки плазмова нестійкість може отримувати вільну енергію?
9. Чому із зовнішнього боку тора кривина «погана», а з внутрішнього — «хороша»? Що таке жолобкова мода?
10. Чому пучок у плазмі нестійкий? Яким буде інкремент для слабкого холодного пучка?
11. У чому суть енергетичного принципу? Які доданки в δW стабілізують, а які дестабілізують?
12. Що таке дрейфова хвиля і чому вона призводить до аномального переносу?
13. Що в плазмі відіграє роль прискорення вільного падіння g в аналогії з нестійкістю Релея–Тейлора?

14. Чим бомівська дифузія відрізняється від класичної за залежністю від B?

15. Як за сигналами котушок Мірнова визначити число m і чому вони не бачать мод із великим m в глибині плазми?

9 Магнітне утримання плазми

Щоб отримати термоядерні реакції, плазму потрібно нагріти до високої температури й водночас не дати їй торкнутися стінок. Магнітне поле розв'язує цю задачу для заряджених частинок лише частково: воно сильно обмежує рух поперек поля, але саме по собі не перешкоджає руху вздовж силової лінії. Тому геометрія магнітного поля принципово важлива.

§9.1. Проблема утримання

Для реакції синтезу $\mathrm{D}+\mathrm{T}\to{}^4\mathrm{He}+n$ дейтерієво-тритієву плазму треба нагріти до температури $T\sim 10$–20 кеВ ($\sim 10^8$ К) і утримувати достатньо довго. Критерій Лоусона (розд. 10) вимагає $n\tau_E \gtrsim 10^{14}$–10^{15} см$^{-3}$ с (оцінка за порядком величини), де τ_E — час утримання енергії. Жодна матеріальна стінка такої температури не витримає, а контакт зі стінкою охолодив би плазму. Тому плазму треба утримувати без стінок. Є два підходи: інерційний (надвисока густина й надкороткий час, $\tau\sim 10^{-10}$ с) і магнітний ($n\sim 10^{14}$ см$^{-3}$, $\tau\sim 1$ с), який розглядається нижче.

Магнітне утримання ґрунтується на двох фактах, з якими ми вже зустрічалися: заряджені частинки прив'язані до силових ліній (розд. 3), а плазма має діамагнітні властивості, тому магнітне поле для неї — «подушка». Ідею запропонували А. Д. Сахаров та І. Є. Тамм у 1950 р.

§9.2. Відкриті пастки: магнітне дзеркало

Принцип дзеркала (умова відбиття (3.9), конус втрат, рис. 3.10) розглянуто в розд. 3.5. Тут нагадаємо лише головний висновок для утримання: однорідне поле не тримає частинку вздовж лінії, а неоднорідність разом зі збереженням μ утримує лише ту частину розподілу, що лежить поза конусом втрат. Нагріті частинки розсіюються кулонівськими зіткненнями в конус втрат за час $\tau_{\mathrm{loss}}\sim \nu_{ii}^{-1}\ln(B_{\max}/B_{\min})$

(розд. 4; темп втрат задають іони, бо швидші електрони утримує амбіполярний потенціал), тому відкриті пастки «протікають» значно швидше, ніж закриті; для довгоживучої плазми їх потрібно доповнювати іншими засобами (амбіполярні потенціали, тандемні пробки). Крім того, дзеркальні конфігурації з «поганою» кривиною (центр кривини силових ліній лежить з боку плазми) схильні до жолобкових нестійкостей (розд. 8.9); конфігурації min-B, у яких кривина «добра» (центр кривини з боку вакууму), від них вільні.

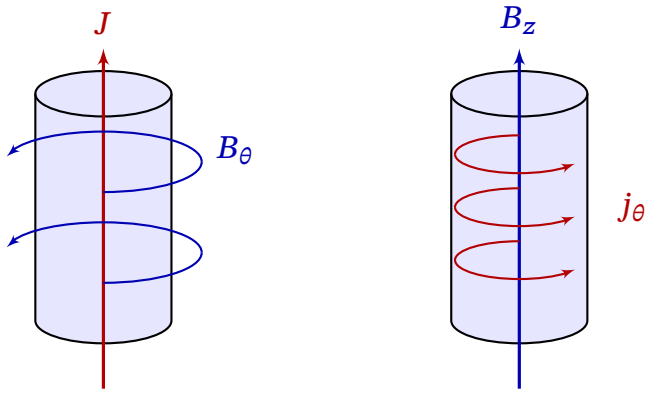
§ 9.3. Пінч-ефект

Плазму можна створити електричним розрядом. Далі виникає задача утримати плазмовий шнур від розпливання, спричиненого газокінетичним тиском. Одним із засобів є *пінч-ефект* (від англ. *pinch* — стискання) — властивість струмового каналу зменшувати свій перетин під дією магнітного поля, створеного власним струмом. Фізичну причину зрозуміти легко: паралельні струми притягуються (сила Ампера на одиницю довжини $dF/dl = 2I_1I_2/c^2d$), і нитки струму в шнурі стискаються до осі.

Пінч-ефект описав Беннет 1934 р. стосовно потоків швидких заряджених частинок у газорозрядній плазмі, а назву «пінч-ефект» 1937 р. запропонував Тонкс, який вивчав дуговий розряд. Розрізняють два типи (рис. 9.1):

1. z-пінч: струм тече вздовж шнура й взаємодіє з власним азимутальним полем;
2. θ-пінч: швидко зростаюче поздовжнє поле індукує в плазмі азимутальні (кільцеві) струми, що взаємодіють з цим полем і стискають шнур.

Розглянемо рівновагу обох конфігурацій, а потім їхню стійкість.



(а) z-пінч (б) θ-пінч

Рис. 9.1. Зліва — z-пінч, справа — θ-пінч

§9.4. Рівновага z-пінча. Співвідношення Беннета

Розглянемо нескінченний циліндричний шнур радіуса R із поздовжнім струмом I (рис. 9.2). Теорема про циркуляцію на колі радіуса r дає азимутальне поле

$$2\pi r B_\theta = \frac{4\pi}{c} I(r) \quad \Rightarrow \quad B_\theta(r) = \frac{2I(r)}{cr}, \qquad I(r) = \int_0^r 2\pi r' j\, dr',$$

а умова рівноваги (5.9) у радіальній проекції $dp/dr = -jB_\theta/c$, оскільки $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ напрямлено до осі. Виразивши $j = \dfrac{c}{4\pi r}\dfrac{d(rB_\theta)}{dr}$, знаходимо

$$\frac{d}{dr}\left(p + \frac{B_\theta^2}{8\pi}\right) = -\frac{B_\theta^2}{4\pi r}. \tag{9.1}$$

Права частина — це натяг азимутальних силових ліній («обручевий натяг»), який додатково стискає шнур. Тому сума газового та магнітного тисків $p + B_\theta^2/8\pi$ *не* стала: вона спадає до периферії.

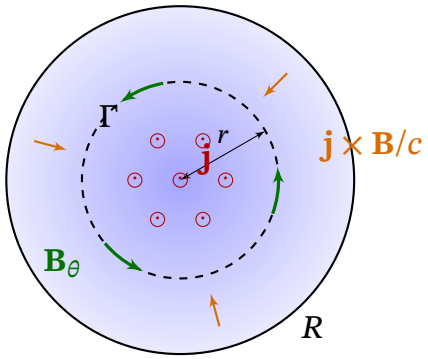


Рис. 9.2. До виведення умови рівноваги z-пінча. Контур Γ показано штриховою лінією

Окремий випадок: однорідний струм. Нехай $j = \text{const} = I/\pi R^2$, тоді $B_\theta = 2\pi jr/c$ і (9.1) інтегрується: з урахуванням $p(R) = 0$

$$p(r) = \frac{\pi j^2}{c^2}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{B_\theta^2(R) - B_\theta^2(r)}{4\pi}.$$

Бачимо, що саме для $j = \text{const}$ виконується $p + B_\theta^2/4\pi = \text{const}$ (а не $B_\theta^2/8\pi$: різницю дає обручевий натяг). Якщо концентрація всіх частинок n стала, $p = nT$, то профіль температури

$$T(r) = \frac{\pi}{nc^2}\left(\frac{I}{\pi R^2}\right)^2 (R^2 - r^2).$$

Зокрема на осі $N_1 T(0) = I^2/c^2$, де $N_1 = \pi R^2 n$ — погонна густина частинок.

Загальне співвідношення Беннета. Результат можна одержати без припущень про профіль. Помножимо $dp/dr = -jB_\theta/c$ на r^2 й проінтегруємо від 0 до R. Ліва частина дає (інтегрування частинами, $p(R)=0$) $-2\int_0^R pr\,dr$, а у правій, використавши $j = \dfrac{c}{4\pi r}\dfrac{d(rB_\theta)}{dr}$, маємо

$$-\frac{1}{c}\int_0^R r^2 jB_\theta\,dr = -\frac{1}{8\pi}\int_0^R \frac{d\,(rB_\theta)^2}{dr}\,dr = -\frac{[RB_\theta(R)]^2}{8\pi} = -\frac{I^2}{2\pi c^2}.$$

Звідси $\int_0^R 2\pi p\,r\,dr = I^2/2c^2$, або

$$\boxed{N_1\overline{T} = \frac{I^2}{2c^2}}\,. \tag{9.2}$$

Тут N_1 — повне число частинок (електронів і іонів) на одиницю довжини шнура, $\overline{T}$ — усереднена за кількістю частинок температура. Це *співвідношення Беннета*. Воно показує, що для утримання шнура із заданими N_1 і $\overline{T}$ *потрібен цілком певний струм*, незалежно від радіуса й розподілу струму. У випадку $n = \text{const}$, $j = \text{const}$ маємо $\overline{T} = T(0)/2$, і (9.2) збігається з отриманим вище. Наприклад, шнур з концентрацією електронів й іонів по 10^{16} см$^{-3}$ при радіусі 1 см, нагрітий в середньому до 1 кеВ, потребує струму $I \approx 1{,}4\times 10^5$ А (аналогічна задача 9.3).

§ 9.5. Рівновага θ-пінча

У θ-пінчі (рис. 9.1, справа) плазму оточує одновиткова котушка, через яку розряджають конденсаторну батарею. Поздовжнє поле B_z за мікросекунди зростає до десятків кілогаусів. Вихрове електричне поле E_θ наводить у поверхневому шарі плазми кільцевий струм j_θ. Його напрям такий, що власне поле струму зменшує зовнішнє поле всередині шнура: плазма поводиться як діамагнетик (розд. 5.8). Сила $\mathbf{j}\times\mathbf{B}/c$ напрямлена до осі, і поле працює як *магнітний поршень*, що стискає шнур.

У рівновазі радіальна проекція (5.9) має вигляд $dp/dr = j_\theta B_z/c$. Підставивши $j_\theta = -\dfrac{c}{4\pi}\dfrac{dB_z}{dr}$, одержуємо

$$\frac{d}{dr}\left(p + \frac{B_z^2}{8\pi}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad p(r) + \frac{B_z^2(r)}{8\pi} = \frac{B_0^2}{8\pi}, \tag{9.3}$$

де B_0 — поле між плазмою та котушкою, де $p = 0$. Це просто баланс тисків (5.15). Порівняно з z-пінчем (9.1) у правій частині немає обручевого натягу: силові лінії поля B_z прямі. Тому сума газового та магнітного тисків стала по перерізу.

З (9.3) випливає, що $\beta = 8\pi p/B_0^2 = 1 - B_z^2/B_0^2 \leqslant 1$. Межа $\beta = 1$ досягається, коли поле повністю витіснене з осі. На відміну від токамака, де β становить кілька відсотків (розд. 9.9), у θ-пінчах одержують $\beta \approx 0{,}7$–$0{,}9$. Отже, θ-пінч використовує магнітне поле найефективніше. Максимальний тиск задає лише поле котушки. Наприклад, при $B_0 = 50$ кГс маємо $p_{\max} = B_0^2/8\pi \approx 10^8$ дин/см$^2 \approx 100$ атм. При $T_e = T_i = 1$ кеВ це відповідає $n = p/2T \approx 3\times 10^{16}$ см$^{-3}$.

Нагрівання. Плазма нагрівається у два етапи. Спочатку швидкий фронт поля (час наростання $\lesssim 1$ мкс) збуджує стискну ударну хвилю. Вона за один прохід нагріває іони до сотень електронвольт. Далі поле зростає повільніше, і відбувається адіабатичне стискання вмороженої плазми. Саме на такій установці, *Scylla* (Лос-Аламос, 1958 р.), уперше надійно зареєстрували термоядерні нейтрони з лабораторної плазми.

Стійкість і втрати. Силові лінії прямі, а поле на межі плазми монотонно зростає назовні. Тому лінійний θ-пінч стійкий щодо перетяжок і викривлень, які руйнують z-пінч (розд. 9.6). Проте вздовж поля ніщо не утримує частинки, і плазма вільно витікає через торці. Час утримання визначається часом прольоту іона на половину довжини, $\tau \sim L/2v_{Ti}$. Для дейтерієвої плазми з $T = 1$ кеВ ($v_{Ti} \approx 2\times 10^7$ см/с) при $L = 1$ м маємо $\tau \approx 2$ мкс і $n\tau \sim 10^{11}$ см$^{-3}$ с. Це на три порядки менше за критерій Лоусона (10.3). Закрити торці, згорнувши шнур у тор, теж не вдалося. Як і для будь-якого чисто тороїдального поля (розд. 9.7), тороїдальний θ-пінч (*Scyllac*, 1970-ті) не має рівноваги без додаткових гвинтових полів. Його нащадок — *конфігурація з оберненим полем* (FRC). У ній на початку розряду всередині шнура вморожують зворотне поле, і силові лінії замикаються самі на себе в плазмі.

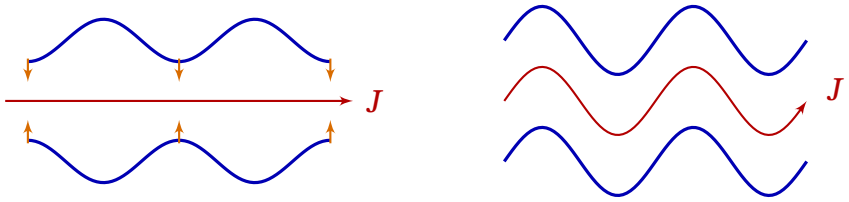
§ 9.6. Нестійкості пінча

Рівновага ще не гарантує існування. Плазма — об'єкт, у якому розвиваються різні нестійкості, що порушують її однорідність і форму та обмежують час життя. Для термоядерного синтезу, де плазму потрібно утримувати довго, це критично.

Перетяжки ($m = 0$). Нехай випадково на шнурі виникло звуження (рис. 9.3). Струм I сталий, тому густина струму $j = I/\pi R^2$ в перетяжці зростає, а разом із нею зростає поле на поверхні $B_\theta(R) = 2I/cR$. Тиск цього поля $B_\theta^2/8\pi = I^2/2\pi c^2R^2 \propto R^{-2}$ збільшується, а сила Ампера на одиницю об'єму $F_A = jB_\theta/c = 2I^2/(\pi c^2R^3)$ ще швидше. Тиск плазми в перетяжці майже не підвищується (плазма витискається вздовж осі). Тому нескомпенсована сила стискання зростає, звуження поглиблюється — розвивається нестійкість. Для лабораторного шнура ($n \sim 10^{16}$ см$^{-3}$, $R \sim 1$ см) характерний час росту $\sim R/v_{A\theta} \sim 10^{-8}$ с, де

$v_{A\theta} = B_\theta/\sqrt{4\pi\rho_m}$. Для прикладу Беннета ($B_\theta \approx 2{,}8\times10^4$ Гс, $n_i = 10^{16}$ см$^{-3}$, дейтерій) $v_{A\theta} \approx 4\times10^7$ см/с, $R/v_{A\theta} \approx 2{,}5\times10^{-8}$ с.

Викривлення ($m = 1$). Якщо шнур випадково прогнувся, то з увігнутого (внутрішнього) боку вигину кільцеві силові лінії B_θ згущуються, а з опуклого розріджуються. Магнітний тиск $B^2/8\pi$ з увігнутого боку більший, він штовхає шнур ще далі в бік опуклості, і вигин наростає: що сильніше прогин, то більша різниця тисків, тобто нестійкість.



(а) перетяжки, $m = 0$ (б) викривлення, $m = 1$

Рис. 9.3. Нестійкості z-пінча: перетяжки та викривлення шнура

Стабілізація поздовжнім полем. Щоб боротися з перетяжками, в плазму «вморожують» поздовжнє магнітне поле B_z. У ідеально провідній плазмі магнітний потік через поперечний переріз зберігається: $\pi R^2 B_z = \text{const}$, тому при звуженні шнура $B_z \propto R^{-2}$, а відповідний тиск $B_z^2/8\pi \propto R^{-4}$ зростає *швидше* за тиск азимутального поля ($\propto R^{-2}$). Вимагатимемо рівноваги на поверхні $p + B_z^2/8\pi = B_\theta^2(R)/8\pi$ й порівняємо зміни при малому стисканні δR (тиск p не змінюється):

$$\delta\frac{B_z^2}{8\pi} = -4\,\frac{B_z^2}{8\pi}\frac{\delta R}{R}, \qquad \delta\frac{B_\theta^2}{8\pi} = -2\,\frac{B_\theta^2}{8\pi}\frac{\delta R}{R}.$$

Внутрішній тиск при стисканні зростає більше за зовнішній, якщо $4B_z^2 > 2B_\theta^2$, тобто $B_z^2 > B_\theta^2/2$. Тоді виникає повертаюча сила — перетяжки стійкі. (Це оцінка в спрощеній моделі, але вона правильно передає суть: чим більше поздовжнє поле, тим стійкіший шнур; у цій моделі тиск плазми вважається незмінним, а B_z — «вмороженим» у шнур і стисненим разом із ним.)

Проти викривлення потрібна ще сильніша стабілізація. Умова Крускала–Шафранова для шнура довжиною L й радіусом a вимагає

$$q = \frac{2\pi a}{L}\,\frac{B_z}{B_\theta} > 1.$$

Тобто силові лінії мають зробити більше одного оберту навколо осі на довжині шнура. У стабілізованому пінчі B_z значно перевищує B_θ,

а рівновага визначається не лише струмом, і ми поступово переходимо до сучасних систем. Крім перетяжок і викривлень існують інші нестійкості (перестановочні, балонні, розривні моди — останні пов'язані з пересполученням, розд. 5.10), які визначають межі параметрів реальних установок.

§9.7. Тороїдальні системи: токамак і стеларатор

Відкриті пастки (дзеркала, лінійні пінчі) втрачають частинки через торці. Інший спосіб — замкнути силові лінії в тор. Однак чисто тороїдальне поле $B_\varphi \propto 1/R$ неоднорідне, тому виникають градієнтний і відцентровий дрейфи (3.4) з вертикальною швидкістю

$$v_d \approx \frac{2c\,T}{|q|BR},$$

протилежною для іонів і електронів. Для $T = 10$ кеВ, $B = 5\times10^4$ Гс, $R = 6\times10^2$ см маємо $v_d \approx 7\times10^4$ см/с, тобто за секунду частинка дрейфувала б на сотні метрів. Дрейф розділяє заряди, виникає вертикальне електричне поле, і дрейф у схрещених полях (3.2) виносить уже *обидва* сорти частинок назовні на стінку. Отже, чисто тороїдальне поле не утримує.

Вихід — закрутити силові лінії, додавши до тороїдального поля полоїдальну складову B_θ. Тоді лінії гвинтоподібно намотуються на вкладені магнітні поверхні, і частинка, рухаючись уздовж лінії, по черзі опиняється вгорі й внизу тора: вертикальні дрейфи усереднюються, а заряди закорочуються вздовж лінії. Закрученість характеризують *запасом стійкості* $q = rB_\varphi/(RB_\theta)$ — локальним співвідношенням тороїдального та полоїдального полів. Фізично q показує, скільки разів силова лінія обходить тор вздовж (тороїдально) за один оберт навколо осі шнура (полоїдально); назва «запас стійкості» — це запас до порогу $q = 1$. Для шнура довжиною $L = 2\pi R$ маємо $q = 2\pi aB_z/(LB_\theta) = aB_\varphi/(RB_\theta)$ — той самий q в обох означеннях. Важливий також *шир* $s = (r/q)\,dq/dr$: на сусідніх магнітних поверхнях лінії мають різний крок гвинта, тому збурення, витягнуте вздовж лінії на одній поверхні, на сусідній «розрізається»; шир стабілізує. У простій циліндричній моделі критерій Крускала — Шафранова для основної $m = 1$-моди приводить до умови порядку $q(a) > 1$. Для реального токамака умови МГД-стійкості складніші й визначаються профілями струму, тиску та геометрією магнітних поверхонь.

Закрутку створюють двома способами (рис. 9.4). У *токамаку* (скорочення від рос. *тороидальная камера с магнитными катушками*) тороїдальне поле створюють зовнішні котушки, а полоїдальне — струм, що тече самою плазмою (індукований трансформатором). То-

камак розвинули в СРСР з ідей Тамма й Сахарова; результати установки Т-3 (1968 р., під керівництвом Л. А. Арцимовича) стали поворотним пунктом, після якого токамаки почали будувати в усьому світі. У *стелараторі* (Спітцер, 1951 р.) закрутку створюють зовнішні гвинтові котушки, а струму в плазмі немає, що дозволяє працювати в стаціонарному режимі, але вимагає складної тривимірної геометрії котушок. Найбільший токамак, що будується, — ITER ($R \approx 6{,}2$ м, $a \approx 2$ м, $B \approx 5{,}3$ Тл, $I = 15$ МА); саме такі параметри ми використовуватимемо в оцінках нижче.

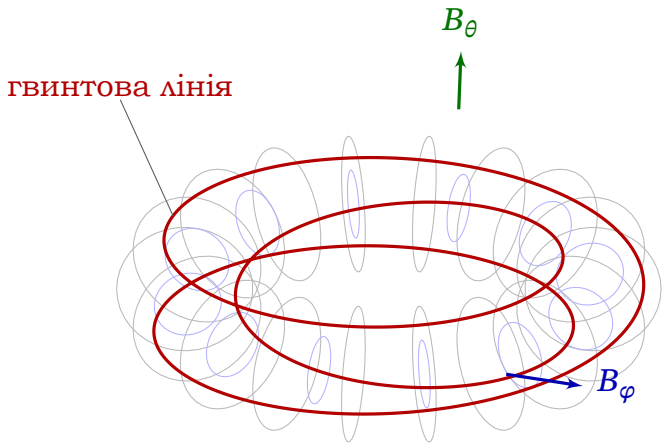


Рис. 9.4. Принцип тороїдального магнітного утримання: силові лінії замкнені й закручені, лежать на вкладених магнітних поверхнях

§ 9.8. Захоплені частинки й неокласичний перенос

У токамаку $B_\varphi \propto 1/R$: поле сильніше на внутрішній стороні тора ($B_{\max}$) і слабше на зовнішній ($B_{\min}$). Отже, тор містить магнітне дзеркало (розд. 3.5), розтягнуте по периметру. Умова відбиття $\sin^2\theta \geq B_{\min}/B_{\max} = (1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$, де $\varepsilon = r/R$ — обернене аспектне відношення, означає (кути беруться на зовнішній стороні, де $B = B_{\min}$) $\sin^2\theta \geq \dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \Rightarrow \cos^2\theta \leq \dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \Rightarrow v_\parallel/v \lesssim \sqrt{2\varepsilon}$: такі частинки *захоплені* на зовнішній стороні й не оббігають поперечний переріз повністю. Їхня частка $f_t \approx \sqrt{2\varepsilon}$: для ізотропного розподілу частка частинок у конусі $|\cos\theta| < x$ дорівнює x. Для $\varepsilon = 0{,}3$ маємо $\sqrt{0{,}6} \approx 0{,}77 \sim 0{,}8$ — це велика частка, а не мала поправка (точніше, $f_t \approx \sqrt{2\varepsilon/(1+\varepsilon)} \approx 0{,}68$). Інші частинки *пролітні*.

У проєкції на полоїдальну площину траєкторія захопленої частинки має форму банана (рис. 9.5). Оцінимо її ширину: поздовжня швидкість захопленої частинки $v_\parallel \sim \sqrt{\varepsilon}\,v$; час півоберту по банану $\tau_b \sim qR/v_\parallel \sim qR/(\sqrt{\varepsilon}\,v)$ (множник q тому, що довжина силової лінії

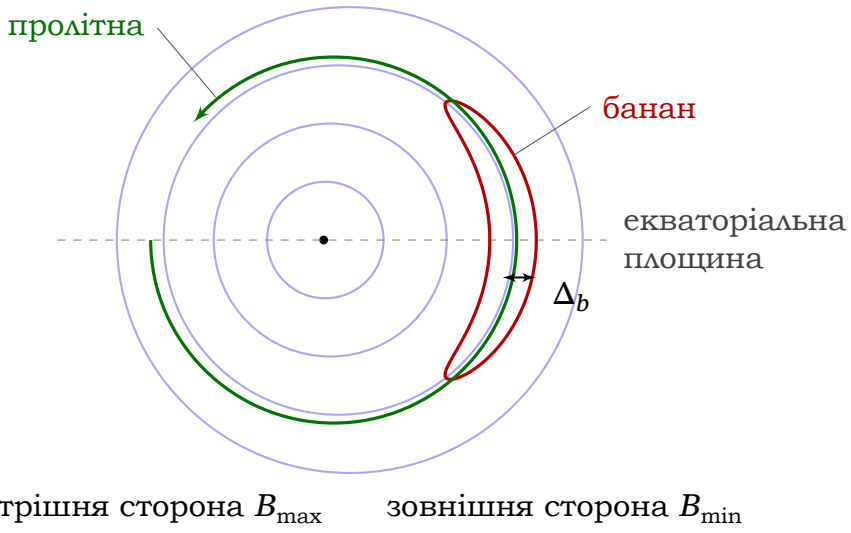


Рис. 9.5. Полоїдальний переріз токамака: пролітна частинка оббігає магнітну поверхню, а захоплена описує «бананову» орбіту навколо екваторіальної площини на зовнішній стороні

за один полоїдальний оберт дорівнює $2\pi qR$); тороїдальний дрейф $v_d \sim v\,r_L/R$. Отже, $\Delta_b \sim v_d\tau_b \sim q\,r_L/\sqrt{\varepsilon}$: радіальна ширина за порядком величини

$$\Delta_b \sim \frac{q\,r_L}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{9.4}$$

де q — запас стійкості, r_L — ларморівський радіус у повному полі. Це кратно більше за r_L (для $q = 2$, $\varepsilon = 0{,}3$ у ~ 4 рази). Кулонівські зіткнення зсувають частинку на Δ_b вбік; щоб вона покинула банан, достатньо розсіяти її по куту на $\Delta\theta \sim \sqrt{\varepsilon}$. Кут розсіюється *дифузійно*, $(\Delta\theta)^2 \sim \nu t$, тож щоб змінити його на $\sqrt{\varepsilon}$, потрібен час $t \sim \varepsilon/\nu$, тобто ефективна частота розсіяння $\nu_{\text{eff}} \sim \nu/\varepsilon$ (вона більша за ν, бо для виходу з банана досить малого кутового зсуву). Оцінимо дифузію (крок Δ_b, частота кроків ν_{eff}, частка частинок f_t):

$$D_{\text{neo}} \sim f_t\,\Delta_b^2\,\nu_{\text{eff}} \sim q^2\,\varepsilon^{-3/2}\,r_L^2\nu. \tag{9.5}$$

Порівняно з класичною дифузією $D_\perp \sim r_L^2\nu$ перенос збільшується в $q^2\varepsilon^{-3/2}$ разів, тобто в $\sim$ 20–50 разів у типових токамаках. Це *неокласичний* перенос (режим бананів, поки $\nu\,qR/(\varepsilon^{3/2}v_T) < 1$). Він є результатом тороїдальної геометрії, не залежить від турбулентності, але все одно нижчий за спостережуваний у електронному каналі — різницю (див. розд. 8.13) дає аномальний перенос.

Захоплені частинки мають ще один наслідок: у плазмі з градієнтом тиску виникає *бутстреп-струм* $j_{\text{bs}} \sim -\sqrt{\varepsilon}\,(c/B_\theta)\,dp/dr$, який створюється самою плазмою без трансформатора й дозволяє токамаку працювати в стаціонарному режимі.

Звідки він береться. Захоплені частинки на бананах рухаються в протилежних напрямках уздовж внутрішньої та зовнішньої «ні-

жок» банана. Якщо є градієнт густини, на даному радіусі банани, що приходять із внутрішнього боку, густіші за ті, що з зовнішнього, і виникає нескомпенсований струм (аналог діамагнітного струму намагнічування, але від бананів). Через тертя він передається пролітним частинкам, звідки й оцінка вище. Практично: у стаціонарних сценаріях ITER і в проєктах DEMO розраховують на частку бутстреп-струму $\sim 50\%$ і більше (в індуктивному базовому сценарії ITER — лише ~ 15–20%), що наближає токамак до стаціонарної роботи без індукції.

§ 9.9. Рівновага тора: зсув Шафранова та межа за тиском

Плазмовий тор, як і надувний обруч, прагне розширитися: газовий тиск і «обручева» сила струму витискають кільце назовні. Для рівноваги потрібне вертикальне поле B_v, а самі магнітні поверхні зсуваються вбік зовнішньої стінки відносно центра камери — *зсув Шафранова* $\Delta \sim (a^2/R)(\beta_p + l_i/2)$, де $\beta_p = 8\pi\langle p\rangle/B_\theta^2$ — полоїдальна бета, l_i — внутрішня індуктивність. Чим більший тиск плазми, тим більший зсув; при $\beta_p \sim R/a$ рівновага взагалі зникає.

Є й жорсткіші межі, що пов'язані зі стійкістю (розд. 8). Поздовжній струм обмежений кінк-нестійкістю: $q(a) > 1$, а практично $q(a) \gtrsim 2$–3. Тиск обмежений балонними й кінк-модами; для них емпірично встановлено *межу Тройона*

$$\beta_{\max}[\%] = \beta_N \frac{I[\text{МА}]}{a[\text{м}]\, B[\text{Тл}]}, \qquad \beta_N \approx 2{,}8, \tag{9.6}$$

тобто $\beta \sim$ кілька відсотків. Для $I = 15$ МА, $a = 2$ м, $B = 5$ Тл маємо $\beta_{\max} \approx 4\%$. Оскільки $P_f \propto \beta^2 B^4$ (розд. 5), саме межа Тройона й максимальне поле надпровідних магнітів визначають розмір електростанції. Окрім того, густина обмежена *межею Грінвальда* $n_G[10^{20}\,\text{м}^{-3}] = I[\text{МА}]/(\pi a^2[\text{м}^2]) \approx 1{,}2$ для цих параметрів ($\approx 1{,}2\times10^{14}$ см$^{-3}$) — не випадково саме такі густини ми розглядали у попередніх розділах.

> **!** *Бета порівнює тиски, але сама по собі не характеризує стійкість: утримання з малим β може бути нестійким (наприклад, при $q(a) < 1$), а межа Тройона — емпіричне, а не точне співвідношення.*

§ 9.10. Як це вимірюють: магнітна реконструкція рівноваги

Форму й положення плазмового шнура не можна побачити всередині, але їх можна відновити із зовнішніх магнітних вимірів. Пояс Роговського дає повний струм I, петлі потоку й зонди B_θ вздовж

стінки (розд. 5.12) дають полоїдальне поле на контурі. Поза плазмою поле безвихрове, тож за значеннями на контурі розв'язують рівняння Града–Шафранова й знаходять магнітні поверхні, положення осі й зсув Шафранова Δ. Зворотно, виміряний Δ задає комбінацію

$$\beta_p + \frac{l_i}{2} \sim \frac{R}{a^2}\,\Delta, \tag{9.7}$$

а разом з діамагнітним вимірюванням енергії (розд. 5.12) розділяє внесок тиску β_p і внутрішньої індуктивності l_i (профілю струму).

Числова оцінка. Для $a = 0{,}5$ м, $R = 1{,}5$ м, $\Delta = 10$ см: $\beta_p + l_i/2 \approx 0{,}6$.

Межі застосовності. Зовнішні виміри однозначно задають лише зовнішні поверхні; внутрішній профіль струму $q(r)$ потрібно знаходити з додаткових даних (поляриметрія, розд. 6.7, або штарківське розщеплення ліній інжектованого пучка), а у реальному часі реконструкцію виконують спрощеними моделями.

Головне в розділі

- Магнітне поле обмежує рух поперек силових ліній, а вздовж них — ні, тому геометрія поля принципово важлива.
- Відкриті пастки (магнітне дзеркало) мають конус втрат; замкнені конфігурації вимагають закрутки силових ліній.
- Рівновага z-пінча встановлюється балансом газокінетичного тиску, магнітного тиску й натягу азимутальних силових ліній (обручевий натяг); такий пінч нестійкий до перетяжок і викривлень.
- У θ-пінчі силові лінії прямі, тож $p + B_z^2/8\pi = \text{const}$, β близьке до одиниці, а конфігурація МГД-стійка; головна вада — швидке витікання плазми через торці.
- Токамак і стеларатор утримують плазму завдяки гвинтовому полю; захоплені частинки призводять до неокласичного переносу.
- Тиск плазми обмежений рівновагою та стійкістю (зсув Шафранова, межа за β).
- Положення й форму шнура, зсув Шафранова та комбінацію $\beta_p + l_i/2$ відновлюють із зовнішніх магнітних вимірів (розд. 9.10).

Задачі

9.1. ★★☆ Для $\varepsilon = a/R = 0{,}3$ ($a = 2$ м), $q = 2$ знайдіть частку захоплених частинок f_t і ширину банана для іона дейтерію ($T = 10$ кеВ, $B = 5 \times 10^4$ Гс). Порівняйте з a і оцініть $D_{\text{neo}}/D_{\text{cl}}$.

9.2. ★★☆ Знайдіть межу Тройона й межу Грінвальда для $I = 2$ МА, $a = 0{,}5$ м, $B = 2$ Тл. Яким буде тиск плазми при досягненні цієї межі β?

9.3. ★★☆ За співвідношенням Беннета знайдіть струм, потрібний для утримання шнура радіуса $R = 0{,}5$ см дейтерієвої плазми з концентрацією електронів та іонів по 5×10^{17} см$^{-3}$ і середньою температурою 200 еВ. Яке при цьому поле B_θ на поверхні шнура? Оцініть час наростання перетяжки ($m = 0$).

9.4. ★★☆ У θ-пінчі поле котушки $B_0 = 40$ кГс, а поле на осі шнура $B_z(0) = 20$ кГс. Знайдіть β на осі, тиск плазми й концентрацію дейтерієвої плазми при $T_e = T_i = 1$ кеВ. Оцініть час витікання через торці для шнура довжиною $L = 3$ м і порівняйте $n\tau$ з критерієм Лоусона (10.3).

9.5. ★☆☆ Оцініть запас стійкості $q(a) = aB_\varphi/(RB_\theta)$ для $a = 0{,}5$ м, $R = 1{,}5$ м, $B_\varphi = 2$ Тл, $I = 1$ МА, де $B_\theta = 2I/(ca)$ у СГС (0,4 Тл). Чи виконується умова Крускала–Шафранова $q(a) > 1$?

9.6. ★★☆ Для пробкового відношення $R_m = B_{\max}/B_{\min} = 5$ знайдіть частку частинок ізотропного розподілу, що потрапляють у конус втрат. Як вона зміниться при $R_m = 10$?

9.7. ★★☆ У токамаку з $a = 0{,}5$ м, $R = 1{,}5$ м, $B_\theta = 0{,}4$ Тл середня концентрація $n_e = n_i = 5 \times 10^{13}$ см$^{-3}$, $T_e = T_i = 1$ кеВ. Знайдіть $\beta_p = 8\pi\langle p\rangle/B_\theta^2$ і зсув Шафранова Δ за (9.7) при $l_i = 1$.

Контрольні питання

1. Як працює магнітне дзеркало? Що таке конус втрат?
2. Чому z-пінч утримується? Чому в загальному випадку $p + B^2/8\pi \neq \text{const}$?
3. Що виражає співвідношення Беннета? Що з нього випливає для струму?
4. Чому в θ-пінчі $p + B_z^2/8\pi = \text{const}$, а в z-пінчі ні? Чому лінійний

θ-пінч стійкий, але не придатний для реактора?

5. Чому чисто тороїдальне поле не утримує плазму? Як це виправляють у токамаку та стелараторі?

6. Які частинки в токамаку називають захопленими? Яку форму має їхня орбіта і чому неокласичний перенос перевищує класичний?

7. Які обмеження за струмом, тиском і густиною існують у токамаку?

8. Що таке запас стійкості q і навіщо потрібна умова $q(a) > 1$?

9. Чому виникає бутстреп-струм?

10. Чому тор прагне розширитися і як його утримують?

10 Керований термоядерний синтез

Основний практичний інтерес фізики плазми пов'язаний із проблемою *керованого термоядерного синтезу* (КТС). Для достатньо інтенсивних реакцій синтезу речовину треба нагріти до ~ 10–20 кілоелектронвольт (понад сто мільйонів кельвінів), а за таких температур вона є плазмою.

§ 10.1. Реакції та паливо

Найлегше здійснюється реакція дейтерію з тритієм

$$\mathrm{D} + \mathrm{T} \to {}^4\mathrm{He}\,(3{,}5\ \text{МеВ}) + n\,(14{,}1\ \text{МеВ}),$$

з повним виходом $E_f = 17{,}6$ МеВ. Швидкість реакцій характеризує величина $\langle \sigma v \rangle$ (усереднена за максвеллівським розподілом): для D–T вона дорівнює приблизно $1{,}4 \times 10^{-17}$, $1{,}1 \times 10^{-16}$, $4{,}3 \times 10^{-16}$, $6{,}7 \times 10^{-16}$ см^3/с при $T = 5$, 10, 20, 30 кеВ. Дейтерій міститься в морській воді (приблизно один атом на 6400 атомів водню; загальна маса в океанах $\sim 4 \times 10^{13}$ т, що за порядком величини відповідає 10^{20} кВт·рік, тоді як споживана людством потужність становить $\sim 10^{10}$ кВт). Тритій радіоактивний (період піврозпаду ≈ 12 років) і в природі практично відсутній, тому його треба виробляти в самому реакторі: нейтрони реакції опромінюють літієвий шар («бланкет»), $n + {}^6\mathrm{Li} \to \mathrm{T} + {}^4\mathrm{He}$. Реакція D–D потребує значно вищих температур (~ 50 кеВ).

§ 10.2. Чому потрібна саме така температура: бар'єр і тунелювання

Два ядра мають злитися на відстані $r \sim 4$ фм (радіус дії ядерних сил), але вони відштовхуються кулонівською силою. Висота кулонівського бар'єра для D–T $U_C = Z_1 Z_2 e^2 / r \approx 1{,}44$ МеВ·фм/4 фм $\approx 0{,}4$ МеВ, тобто в ~ 40 разів більше за 10 кеВ. Класично злиття можливе лише для частинок із далекого максвеллівського «хвоста» $e^{-E/T} \sim e^{-40}$ — замало. Реакції ідуть завдяки *квантовому тунелюванню*.

Теоретичні відомості Нагадаємо з квантової механіки

У квазікласичному (ВКБ) наближенні ймовірність проходження крізь бар'єр дорівнює $\exp\!\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}|p|\,dr\right)$, де $|p|=\sqrt{2m_r(U(r)-E)}$ під бар'єром. Для кулонівського бар'єра $U=Z_1Z_2e^2/r$ інтеграл від точки зупинки $r_2=Z_1Z_2e^2/E$ до ядерного радіуса (при $E\ll U_C$ нижня межа несуттєва) обчислюється точно й дає $\sqrt{E_G/E}$.

Ймовірність проходження бар'єра (формула Гамова)

$$P_{\text{tun}}\approx\exp\!\left(-\sqrt{\frac{E_G}{E}}\right),\qquad E_G=2m_rc^2\,(\pi\alpha Z_1Z_2)^2,\tag{10.1}$$

де m_r — наведена маса, $\alpha=e^2/\hbar c$. Для D–T $m_rc^2=1{,}12$ ГеВ, $E_G\approx 1{,}18$ МеВ. Перерізи реакції тому швидко зростають з енергією, $\sigma(E)=S(E)\,E^{-1}e^{-\sqrt{E_G/E}}$, де $S(E)$ повільно змінюється (а для D–T має резонанс при ~ 64 кеВ, що додатково підсилює реакцію).

Швидкість реакції $\langle\sigma v\rangle$ визначається добутком двох протилежних факторів (рис. 10.1): максвеллівського хвоста $e^{-E/T}$ (спадає) і імовірності тунелювання (зростає). Добуток має максимум — *пік Гамова* — при

$$E_0=\left(\frac{E_G\,T^2}{4}\right)^{1/3}\approx 31\text{ кеВ при }T=10\text{ кеВ}.\tag{10.2}$$

Максимум знаходимо з умови $\frac{d}{dE}\!\left(-\frac{E}{T}-\sqrt{\frac{E_G}{E}}\right)=0$, тобто $\frac{1}{T}=\frac{1}{2}\sqrt{E_G}\,E^{-3/2}$, звідки $E_0=(E_GT^2/4)^{1/3}$. У максимумі $E_0/T=(E_G/4T)^{1/3}$, а $\sqrt{E_G/E_0}=2(E_G/4T)^{1/3}$, тож показник дорівнює $-3(E_G/4T)^{1/3}$. Фізично: реагують не типові частинки, а хвіст Максвелла — компроміс між бар'єром і числом частинок. Отже, реакції відбуваються переважно за участі частинок з енергіями втричі вищими за T, а швидкість реакції

$$\langle\sigma v\rangle\propto T^{-2/3}\exp\!\left[-3\!\left(\frac{E_G}{4T}\right)^{1/3}\right]\;\Rightarrow\;\langle\sigma v\rangle\propto T^{2\text{–}3}\text{ при }T\sim 10\text{ кеВ}.$$

Саме тому швидкість реакції *різко* (степенево, як T^2–T^3) зростає з температурою в області кількох кеВ і сильно спадає при $T\ll 10$ кеВ. Крім того, $E_G\propto(Z_1Z_2)^2m_r$, тому для ядер із більшими зарядами бар'єр вищий і потрібні ще вищі температури. Для D–D $E_G\approx 1{,}0$ МеВ, але в цієї реакції немає резонансу, а її S-фактор на два порядки менший, тому вона потребує $T\sim 50$ кеВ.

Залежність $\langle\sigma v\rangle(T)$ для основних реакцій показано на рис. 10.2 (параметризація Боша–Гейла). Крива D–T лежить на кілька порядків вище за інші в області $T\lesssim 100$ кеВ і має широкий максимум поблизу

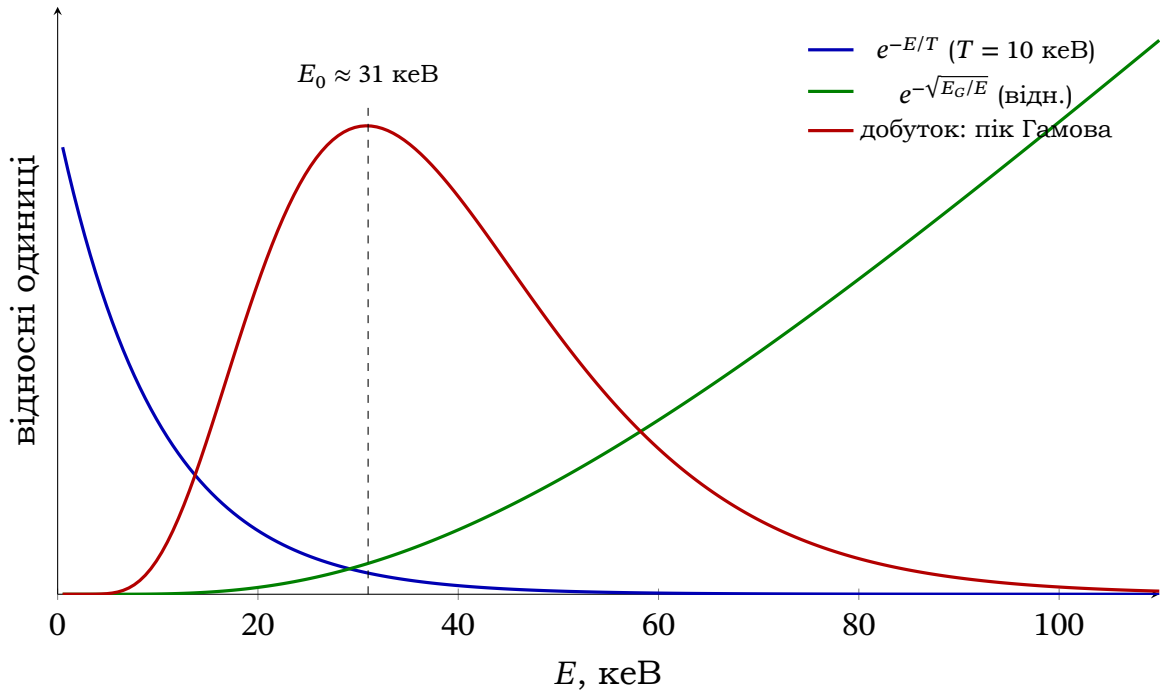


Рис. 10.1. Пік Гамова для реакції D–T: добуток спадного максвеллівського хвоста та зростаючої ймовірності тунелювання дає максимум біля $E_0 \approx 31$ кеВ при $T = 10$ кеВ

60–100 кеВ; саме тому для першого реактора обрано D–T і температури 10–20 кеВ: там $\langle\sigma v\rangle$ уже достатньо велике, а втрати ще помірні.

§ 10.3. Баланс потужностей і критерій Лоусона

Нехай $n_D = n_T = n/2$, $n_e = n$, $T_e = T_i = T$. Потужність синтезу в одиниці об'єму $P_f = n_D n_T \langle\sigma v\rangle E_f = \tfrac{1}{4} n^2 \langle\sigma v\rangle E_f$. Нейтрони залишають плазму, а заряджені α-частинки ($E_\alpha = 3{,}5$ МеВ) передають їй свою енергію: $P_\alpha = \tfrac{1}{4} n^2 \langle\sigma v\rangle E_\alpha$. Тепловий запас плазми $W = 3nT$ (по $\tfrac{3}{2}T$ на електрон і на іон), а втрати характеризуються часом утримання енергії τ_E: $P_L = W/\tau_E$. Умова *запалювання* (самопідтримна реакція) $P_\alpha \geq P_L$ дає

$$\boxed{n\tau_E \geq \frac{12\,T}{\langle\sigma v\rangle E_\alpha}}. \tag{10.3}$$

З наведених значень $\langle\sigma v\rangle$ маємо $n\tau_E \gtrsim 3\times10^{14}$ см$^{-3}$с при 10 кеВ. Оскільки $n\tau_E \propto T/\langle\sigma v\rangle$, мінімум потрібного $n\tau_E$ відповідає не максимуму $\langle\sigma v\rangle$, а максимуму $\langle\sigma v\rangle/T$: він лежить при $T \approx 20$–30 кеВ і дорівнює $\approx 1{,}5\times10^{14}$ см$^{-3}$с. Помноживши на T, одержуємо *потрійний добуток* $nT\tau_E \gtrsim 3\times10^{15}$ кеВ $\cdot$ с $\cdot$ см$^{-3}$; він пропорційний $T^2/\langle\sigma v\rangle$ і має мінімум поблизу 14–15 кеВ. Саме потрійний добуток прийнято вважати мірою досягнення, бо при заданому магнітному полі обмежений тиск плазми nT (розд. 9.9). Це *критерій Лоусона* в сучасному формулюванні

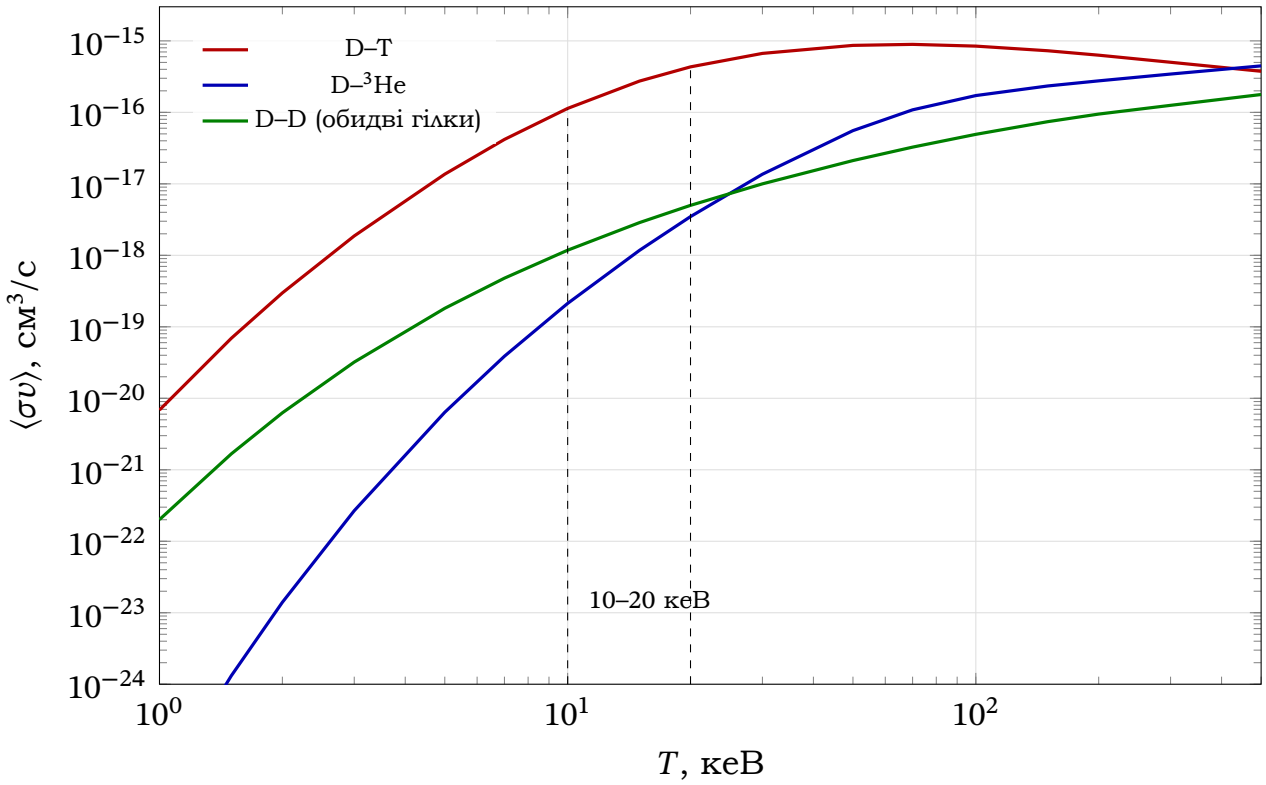


Рис. 10.2. Швидкість реакції $\langle\sigma v\rangle$ для D–T, D–^{3}He та D–D залежно від температури (логарифмічні осі, параметризація Боша–Гейла). Пунктиром позначено робочий інтервал 10–20 кеВ

(оригінал 1957 р. стосувався беззбитковості при заданому ККД, тому числові множники різняться). Для D–D, за оцінками, потрібне на два порядки більше: $n\tau \sim 10^{16}$ см$^{-3}$с.

§ 10.4. Втрати

У розрахунку τ_E не було враховано випромінювання. Основні радіаційні втрати — *гальмівне* (при кулонівських зіткненнях електронів з іонами) і *циклотронне* (магнітогальмівне, від руху електронів по ларморівських колах). Потужність гальмівного випромінювання $P_{br} \approx 1{,}7\times10^{-32}\, n_e\sqrt{T_e}\sum Z^2 n_i$ Вт/см^3 (T_e в еВ, n в см$^{-3}$) зростає як Z^2, тому домішки важких елементів небезпечні. Для $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, 10 кеВ маємо $P_f \approx 0{,}80$, $P_\alpha \approx 0{,}16$, $P_{br} \approx 0{,}017$ Вт/см^3, тобто гальмівне випромінювання становить близько 10 % від α-нагрівання. Враховуючи його, нижня межа температури запалювання D–T становить кілька кеВ, але практично працюють при 10–20 кеВ. Циклотронне випромінювання $\propto B^2 nT$, проте воно в основному реабсорбується плазмою та відбивається стінками.

Отже, критерій Лоусона — лише базовий орієнтир, а не гарантія працездатності реактора: він не враховує всіх видів випромінювання, нестійкостей, транспорту й технологічних втрат. Для порівняння

установок зручніше користуватися потрійним добутком $nT\tau_E$ і коефіцієнтом підсилення плазми Q (див. нижче).

§ 10.5. Дві стратегії: магнітне й інерційне утримання

Умову (10.3) можна виконати за добутком $n\tau$ двома способами. У *магнітному утриманні* (розд. 9) $n \sim 10^{14}$ см$^{-3}$ і $\tau_E \sim 1$ с. У *інерційному* стисканні мішені лазерним або іншим випромінюванням густина досягає 10^{25}–10^{26} см$^{-3}$, а реакція встигає відбутися за $\sim 10^{-10}$ с, поки речовина не розлетілася.

§ 10.6. Від реакції до розетки

Критерій Лоусона відповідає на питання, чи *самопідтримується* реакція. Але мета — електрика. Простежмо, куди дівається енергія.

Куди дівається 17,6 МеВ. Реакція має два продукти: α-частинку та нейтрон. Початковий сумарний імпульс (у системі центра мас) нульовий, тому за збереженням імпульсу $p_\alpha = p_n$. Кінетична енергія $p^2/2m$ обернено пропорційна масі, отже

$$\frac{E_\alpha}{E_n} = \frac{m_n}{m_\alpha} \approx \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad E_\alpha = \frac{17{,}6}{5} \approx 3{,}5 \text{ МеВ}, \qquad E_n \approx 14{,}1 \text{ МеВ}.$$

Тобто 20% енергії несе α-частинка, 80% — нейтрон. Їхні долі різні, бо різні маси: за однакового за модулем імпульсу легша частинка має більшу кінетичну енергію.

α-частинка заряджена, тому прив'язана до силових ліній. Її швидкість $v_\alpha = \sqrt{2E_\alpha/m_\alpha} \approx 1{,}3 \times 10^9$ см/с, і в полі 5 Тл ларморівський радіус $r_{L\alpha} = m_\alpha c v_\alpha/(2eB) \approx 5$ см, тобто приблизно на порядок менший за характерний розмір плазми близько метра. Це означає, що α-частинка є замагніченою, хоча сама по собі мала орбіта ще не гарантує утримання в усій конфігурації. У добре замкненому магнітному полі вона може залишатися в плазмі достатньо довго, щоб віддати їй значну частину енергії: спершу електронам (її швидкість менша за теплову швидкість електронів, але більша за іонну), потім іонам. Це і є P_α в умові запалювання (10.3).

Гальмування α-частинок характеризує критична енергія

$$E_{\text{crit}} \approx 14{,}8\, T_e A_\alpha \Big(\sum_j \frac{n_j Z_j^2}{n_e A_j}\Big)^{2/3} \approx 33\, T_e \approx 330 \text{ кеВ} \quad (T_e = 10 \text{ кеВ}).$$

Оскільки $E_\alpha = 3{,}5$ МеВ $\gg E_{\text{crit}}$, α-частинка спочатку віддає енергію переважно електронам: її швидкість $1{,}3 \times 10^9$ см/с менша за $v_{Te} \approx 4\times$

10^9 см/с, але набагато більша за v_{Ti}, тож застосовне динамічне тертя з розд. 4 — приклад того, що теорія зіткнень працює для реактора.

Нейтрон не має заряду, магнітне поле на нього не діє. Його вільний пробіг у плазмі $\sim 1/(n\sigma) \sim 10^{10}$ см (порядку 10^5 км) незрівнянно більший за розмір установки, тож нейтрон безперешкодно вилітає й потрапляє у *бланкет* — шар завтовшки близько метра навколо плазми.

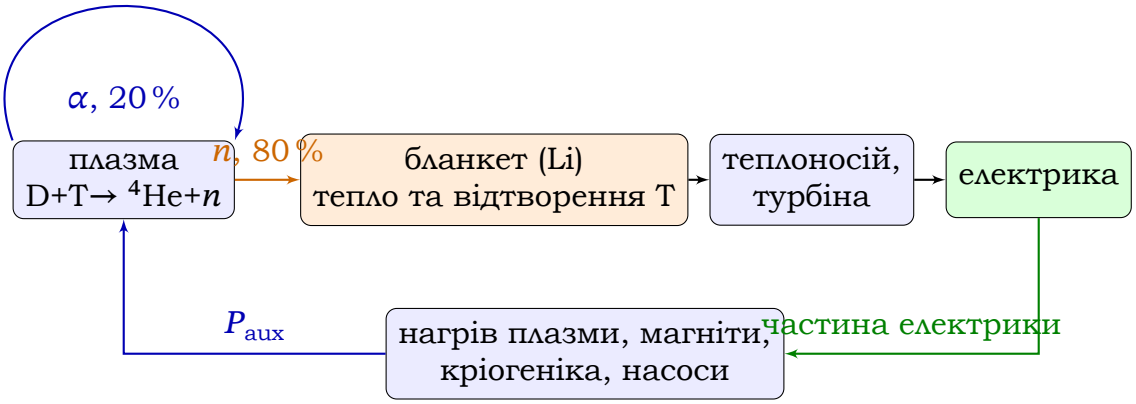


Рис. 10.3. Потоки енергії в термоядерній електростанції

Бланкет: тепло і тритій. У бланкеті нейтрон гальмується в зіткненнях, і його енергія переходить у тепло. Крім того, він виконує другу, не менш важливу роботу: наробляє тритій для палива:

$$n + {}^6\mathrm{Li} \to \mathrm{T} + {}^4\mathrm{He} + 4{,}8\ \text{МеВ}, \qquad n + {}^7\mathrm{Li} \to \mathrm{T} + {}^4\mathrm{He} + n' - 2{,}5\ \text{МеВ}.$$

Перша реакція екзотермічна (додає тепла, тому енергія, що виділилася в бланкеті, у $M \approx 1{,}1$–$1{,}3$ рази більша за 14,1 МеВ), друга, навпаки, поглинає енергію, проте повертає нейтрон. На один акт синтезу вигоряє один атом тритію й народжується один нейтрон, тож без втрат у кращому разі вийшов би рівно один новий атом. Втрати неминучі, тому додають *розмножувач нейтронів* (берилій, свинець: $n + {}^9\mathrm{Be} \to 2n + 2\,{}^4\mathrm{He}$) і вимагають *коефіцієнт відтворення тритію* більший за одиницю. Тепло з бланкета забирає теплоносій (вода, гелій, рідкий метал), далі звичайний цикл: пара, турбіна, генератор, з термічним ККД $\eta_{\mathrm{th}} \sim 30$–$40\%$.

Коефіцієнт підсилення Q. У сталому режимі втрати плазми покриваються α-нагрівом і зовнішнім нагрівом: $P_\alpha + P_{\mathrm{aux}} = P_{\mathrm{loss}}$. Означимо

$$Q = \frac{P_f}{P_{\mathrm{aux}}}.$$

Оскільки $P_\alpha = P_f/5$, частка нагріву за рахунок α-частинок $P_\alpha/(P_\alpha+P_{\text{aux}}) = Q/(Q+5)$. При $Q = 1$ вона дорівнює 1/6 (*беззбитковість* плазми: синтез дає стільки ж, скільки ми вкладаємо); при $Q = 5$ — половина; при $Q = 10$ — 2/3; при $Q \to \infty$ — одиниця: це і є *запалювання*, зовнішній нагрів не потрібен. Для порівняння: токамаки досягли Q порядку одиниці (JET 1997: $Q \approx 0{,}67$; JT-60U: еквівалентне $Q \approx 1{,}25$, екстрапольоване з D–D). Лазерна установка NIF у грудні 2022 року вперше отримала підсилення мішені $G > 1$, проте лазери спожили з мережі приблизно в сто разів більше енергії (~ 300 МДж), ніж дали термоядерні реакції (3,15 МДж). Сучасні рекорди зібрано в табл. 10.1. Отже, «Q» у різних контекстах означає різне. Промислова електростанція потребує $Q \gg 10$ (див. нижче). Важливіше за конкретні числа — зв'язок Q з енергетичним балансом.

Але Q — характеристика *плазми*, а не електростанції. Оцінимо, який Q потрібен для чистого вироблення електроенергії. Усе тепло (від нейтронів, α-частинок і зовнішнього нагріву) зрештою потрапляє на стінки й дивертор, тож $P_{\text{th}} = MP_n + P_\alpha + P_{\text{aux}}$, де $P_n = 0{,}8P_f$. Електричну потужність $\eta_{\text{th}}P_{\text{th}}$ треба порівняти з тією, що йде на нагрів, $P_{\text{aux}}/\eta_{\text{aux}}$:

$$\eta_{\text{th}}\Big[(0{,}8M + 0{,}2)\,Q + 1\Big] \geq \frac{1}{\eta_{\text{aux}}}.$$

Числова оцінка. При $M = 1{,}2$, $\eta_{\text{th}} = 0{,}35$ та $\eta_{\text{aux}} = 0{,}4$ (ККД систем нагріву) це дає $Q \gtrsim 5$ навіть у ідеальному випадку.

Реально треба ще живити магніти, кріогеніку, насоси, тому проєкти електростанцій розраховують на Q порядку десятків.

§ 10.7. Що ще треба вирішити

- *Вихлоп.* Гелій «попіл» накопичується й розбавляє паливо, його потрібно виводити. Для цього силові лінії на краю відводять у *дивертор*, де потік тепла сягає порядку 10 МВт/м^2, тож без випромінювання домішками пластини не витримали б.
- *Матеріали.* Нейтрони 14 МеВ зміщують атоми конструкції (десятки зміщень на атом за рік) і роблять її радіоактивною. Усе, що поряд із плазмою, мусить витримувати це роками.
- *Паливний цикл.* Вигоряє лише невелика частка тритію, що подається, решту потрібно уловлювати й повертати. Тритій радіоактивний (період піврозпаду ≈ 12 років).

Чому ця складність виправдана. Енергія на одиницю маси палива D–T 17,6 МеВ/5 $u \approx 3{,}4 \times 10^{14}$ Дж/кг, приблизно в 10^7 разів більше за вугілля. Електростанція потужністю 1 ГВт (ел.) за $\eta_{\text{th}} \sim 0{,}4$ має $P_{\text{th}} \approx 2{,}5$ ГВт, тобто (за $M = 1{,}2$) $P_f \approx P_{\text{th}}/(0{,}8M + 0{,}2) \approx 2{,}2$ ГВт, і спалює ≈ 0,55 кг D + T

на добу, тоді як вугільній потрібно близько 8–9 тисяч тонн.

§ 10.8. Інерційний шлях

Тут енергію «добувають» вибухом мікромішені, яку стискає лазерне випромінювання. Для оцінки успіху використовують *коефіцієнт підсилення мішені* G — відношення енергії термоядерного виходу до енергії, доставленої до мішені. Але це не те саме, що енергетичний баланс усієї установки: лазери, нагрів, магніти, кріогеніка та інші системи також споживають енергію. Тому слід розрізняти Q плазми, підсилення мішені та інженерний енергетичний баланс.

! *$Q > 1$ або $G > 1$ ще не означає, що установка виробляє електроенергію: потрібна оцінка повного інженерного балансу (задача 10.3).*

Мішень нагрівають *прямо* (лазерні пучки б'ють по оболонці) або *непрямо* (лазер гріє стінки порожнини-хольраума, а рентгенівське випромінювання стискає оболонку). Стиснення має ракетний характер: абляція зовнішнього шару штовхає решту всередину. Після стиснення центральна *гаряча пляма* (hot spot) запалюється, а навколо неї лишається холодне щільне паливо, у якому горіння поширюється. Аналог критерію Лоусона для ІТС — $\rho R \gtrsim 0{,}3$ г/см^2: пробіг α-частинок має бути меншим за розмір плями, а час розльоту R/c_s — більшим за час горіння, тобто роль добутку $n\tau$ відіграє $\rho R/c_s$.

Головна складність у цьому підході — гідродинамічна нестійкість Релея–Тейлора (розд. 8.9). Вона діє двічі: на етапі прискорення, коли легка гаряча плазма абляції штовхає важку оболонку, і на етапі гальмування, коли гаряча пляма зупиняє оболонку, що збігається. В обох випадках у системі оболонки ефективна гравітація спрямована від важкої речовини до легкої, тобто конфігурація нестійка. Нерівності поверхні зростають як $e^{\gamma t}$, $\gamma = \sqrt{Agk}$, де A — число Атвуда, а g — прискорення (гальмування) оболонки. Нестійкість перемішує холодну оболонку з гарячою плямою й руйнує симетрію стискання, тому симетрія опромінення й гладкість мішені мають критичне значення. У магнітному утриманні нестійкості й перенос розглянуто в розд. 8 та 9.

§ 10.9. Де ми зараз: стан на 2026 рік

Табл. 10.1 збирає основні досягнення трьох великих гравців. Кожен рядок ілюструє якусь величину цього розділу: Q, G, потрійний добуток або тривалість імпульсу.

Таблиця 10.1. Рекорди та плани керованого синтезу (за відкритими повідомленнями установок, станом на листопад 2026).

Регіон	Установка	Досягнення або план	Дж.
Європа	JET (закрито 2023)	рекорд енергії 69 МДж за ∼ 5 с, $Q < 1$	[22]
Європа	Wendelstein 7-X (стелларатор)	рекордний потрійний добуток для розрядів > 30 с (43 с, травень 2025)	[36]
Європа (Франція)	WEST	1337 с, 2,6 ГДж, гідрогенна плазма (лютий 2025)	[37]
Китай	EAST	1066 с у H-режимі (січень 2025)	[38]
Китай	BEST (будується, Хефей)	спалювана плазма; завершення монтажу до кінця 2027	[38]
США	NIF (ITC)	рекорд 8,6 МДж на 2,08 МДж лазера, $G \approx 4{,}1$ (квітень 2025)	[21]
США (приватна)	SPARC (CFS)	мета $Q > 1$ приблизно у 2027, за умови дотримання графіка	[39]
Міжнародна	ITER	нова базова лінія: дослідна фаза 2034, D–T у 2039	[23]

Висновки з таблиці такі.

- Жоден магнітний пристрій ще не досяг $Q > 1$ у D–T. Рекорди тривалості (понад 1000 с) встановлено на водневій плазмі, без α-нагріву, а рекорди енергії (69 МДж) — на імпульсах у кілька секунд. Поєднати тривалість, $Q > 1$ і α-нагрів в одній установці ще не вдалося.
- NIF довів, що запалювання мішені можливе ($G \approx 4$), але це G, а не інженерний баланс: лазери споживають з мережі в десятки разів більше енергії, ніж дає мішень (див. зауваження в розділі про інерційний шлях).
- Терміни зсуваються: ITER переніс початок досліджень з 2025 на 2034 рік. Приватні проєкти називають коротші строки, але їхні цифри ще не підтверджено експериментом.

§ 10.10. Як це вимірюють: нейтронна діагностика

Нейтрон D–T-реакції не відчуває магнітного поля й майже не взаємодіє з плазмою, тож вилітає з установки та несе інформацію про те, що відбулося всередині. Кожен акт синтезу дає один нейтрон, тому швидкість реакції вимірюють підрахунком нейтронів поза камерою

(калібровані лічильники, активаційні фольги):

$$\frac{dN_n}{dt} = \int n_D n_T \langle \sigma v \rangle \, dV, \qquad P_f = \frac{dN_n}{dt} \cdot 17{,}6 \text{ МеВ}. \tag{10.4}$$

Отже, термоядерна потужність і $Q = P_f / P_{\text{aux}}$ визначаються прямо з нейтронного потоку.

Числова оцінка. Потужності $P_f = 10$ МВт відповідає $dN_n/dt \approx 3{,}5 \times 10^{18}$ нейтронів/с.

Енергетичний спектр дає температуру іонів. Нейтрон народжується в системі центра мас, що рухається з тепловою швидкістю іонів, тож лінія 14 МеВ допплерівськи розширюється:

$$\Delta E_{\text{FWHM}} \approx 82{,}5 \sqrt{T_i[\text{кеВ}]} \text{ кеВ}.$$

При $T_i = 10$ кеВ ширина ≈ 260 кеВ (порівняйте з розд. 4.5).

Межі застосовності. Нейтронні лічильники потребують абсолютного калібрування з урахуванням розсіяння в конструкціях, а в чисто дейтерієвій плазмі сигнал дають лише D–D-нейтрони (2,45 МеВ), на кілька порядків слабші. Допплерівську ширину на практиці ускладнюють розсіяні нейтрони й немаксвеллівські добавки до розподілу іонів (пучки, швидкі хвости), тому цей метод дає лише оцінку T_i.

Головне в розділі

- Найлегша реакція — D–T; для неї потрібна температура $T \sim 10$–20 кеВ.
- Пік Гамова виникає як добуток спадного максвеллівського хвоста та зростаючої ймовірності тунелювання крізь кулонівський бар'єр.
- Критерій Лоусона зв'язує густину, температуру та час утримання, $n\tau_E \gtrsim 10^{14}$–10^{15} см$^{-3}$с.
- Випромінювальні втрати (гальмівні й циклотронні) задають нижню межу температури запалювання.
- Є два шляхи: магнітне утримання (великий час, мала густина) та інерційне (мала тривалість, надвелика густина).
- Нейтрони D–T-синтезу залишають плазму: їхній потік дає P_f і Q, а допплерівська ширина лінії — T_i (розд. 10.10).

Задачі

10.1. ★☆☆ Для дейтерій-тритієвої плазми ($n_D = n_T$, $n_e = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T = 10$ кеВ, $\langle\sigma v\rangle = 1{,}1 \times 10^{-16}$ см^3/с) знайдіть P_f, P_α, P_{br} (у Вт/см^3) та мінімальний час утримання τ_E для запалювання без урахування випромінювання. Знайдіть $n\tau_E$ при 20 кеВ ($\langle\sigma v\rangle = 4{,}3 \times 10^{-16}$ см^3/с).

10.2. ★★☆ Знайдіть швидкість і ларморівський радіус α-частинки з енергією 3,5 МеВ у полі 5,3 Тл. Покажіть, що частка нагріву плазми α-частинками дорівнює $Q/(Q+5)$, і обчисліть її для $Q = 10$.

10.3. ★★★ Виведіть умову чистого вироблення електроенергії

$$\eta_{\text{th}}[(0{,}8M + 0{,}2)Q + 1] \geq 1/\eta_{\text{aux}}$$

і знайдіть мінімальне Q при $M = 1{,}2$, $\eta_{\text{th}} = 0{,}35$, $\eta_{\text{aux}} = 0{,}4$. Як зміниться результат, якщо додатково 20% електрики йде на власні потреби (магніти, кріогеніка)?

10.4. ★★☆ Для інерційного синтезу задано $\rho R = 0{,}3$ г/см^2 при $\rho = 300$ г/см^3. Знайдіть радіус гарячої плями та оцініть час інерційного утримання $\tau \sim R/c_s$ при $T = 10$ кеВ ($c_s \approx \sqrt{2T/\bar{m}_i}$, $\bar{m}_i = 2{,}5\,m_p$).

10.5. ★★☆ Порівняйте реакції D–T і D–^{3}He: енерговиділення, частку енергії в заряджених продуктах, типову оптимальну температуру (рис. 10.2). У чому перевага й недолік безнейтронного синтезу?

10.6. ★★☆ Яка енергія виділяється на 1 кг суміші D + T? Скільки палива на добу споживає термоядерна електростанція з електричною потужністю 1 ГВт ($\eta = 0{,}4$) і скільки вугілля (теплотворність 29 МДж/кг, $\eta = 0{,}35$) потрібно звичайній?

10.7. ★☆☆ Скільки D–T-нейтронів за секунду випромінює плазма з термоядерною потужністю $P_f = 500$ МВт? Яка допплерівська ширина лінії при $T_i = 15$ кеВ?

Контрольні питання

1. Виведіть умову запалювання D–T-плазми. Чому існує оптимальна температура? Які втрати вона не враховує?
2. У чому відмінність між магнітним та інерційним утриманням з погляду добутку $n\tau$?
3. Як розподіляється енергія реакції D–T між α-частинкою й нейтроном і чому? Чим плазмовий Q відрізняється від інженерного?
4. Чому реакція D–D потребує вищих температур, ніж D–T, хоча дейтерій дешевший?
5. Чим відрізняється Q для NIF від Q для ITER?

11 Низькотемпературна плазма та газовий розряд

Більшість плазм, з якими людина має справу щодня, зовсім не гарячі: це полум'я дуги зварювального апарата, світіння люмінесцентної лампи, плазма в реакторі, що витравлює транзистори на кремнієвій пластині. Це *низькотемпературна плазма*: електрони мають $T_e \sim 1$–10 еВ, а іони та нейтральний газ лишаються майже холодними, $T_i \approx T_g \sim 0{,}03$–$0{,}1$ еВ. Ступінь іонізації (1) малий, 10^{-6}–10^{-2}, густина $n_e \sim 10^{8}$–10^{12} см$^{-3}$. Така плазма *нерівноважна*: формула Саха (1.1) до неї не застосовна, бо електрони нагріває зовнішнє поле, а енергію вони віддають нейтральному газу повільно (у пружному зіткненні електрон передає атому лише частку $\sim 2m/M \sim 10^{-4}$ своєї енергії). Плазма живе доти, доки поле підтримує іонізацію, яка компенсує втрати заряджених частинок на стінки. Цей баланс і є предметом фізики *газового розряду*.

У розділі ми побачимо, як виникає розряд (пробій Таунсенда і закон Пашена), як влаштовані тліючий розряд і дуга, що визначає температуру електронів і густину плазми (глобальна модель), і як працюють сучасні високочастотні джерела плазми для мікроелектроніки. Детальний виклад є в [15, 18, 8].

§ 11.1. Елементарні процеси: іонізація і її швидкість

Основний процес, що підтримує розряд, — *іонізація електронним ударом* $e + A \to A^{+} + 2e$. Вона можлива, лише якщо енергія електрона ε перевищує потенціал іонізації ε_{iz} (13,6 еВ для H, 15,8 еВ для Ar, 24,6 еВ для He). Класична оцінка Томсона (електрон передає атомному електрону енергію $\Delta\varepsilon$ у кулонівському зіткненні, а іонізація відбувається при $\Delta\varepsilon > \varepsilon_{iz}$) дає переріз

$$\sigma_{iz}(\varepsilon) = \frac{\pi e^{4}}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon_{iz}} - \frac{1}{\varepsilon}\right), \qquad \varepsilon > \varepsilon_{iz}. \tag{11.1}$$

Переріз лінійно зростає від порога, досягає максимуму $\sigma_{\max} = \pi e^{4}/(4\varepsilon_{iz}^{2})$ при $\varepsilon = 2\varepsilon_{iz}$ (для Ar $\approx 3\times10^{-16}$ см^{2}, тобто порядку газокінетичного) і далі спадає як $1/\varepsilon$. Поряд з іонізацією відбуваються збудження атомів

(саме воно дає світіння розряду), пружні зіткнення, а в електронегативних газах (O_2, SF_6, CF_4) — ще й прилипання $e + AB \to A + B^-$.

Кількість іонізацій в одиниці об'єму за одиницю часу дорівнює $n_e n_g k_{iz}$, де n_g — густина газу, а *константа швидкості* $k_{iz} = \langle \sigma_{iz} v \rangle$ усереднена за розподілом електронів. Для максвеллівських електронів з $T_e \ll \varepsilon_{iz}$ іонізують лише електрони з хвоста розподілу. Якщо поблизу порога $\sigma_{iz} \approx C(\varepsilon - \varepsilon_{iz})$, то (задача 11.1)

$$\boxed{k_{iz}(T_e) = C\bar{v}_e\,(\varepsilon_{iz} + 2T_e)\,e^{-\varepsilon_{iz}/T_e}, \qquad \bar{v}_e = \sqrt{\frac{8T_e}{\pi m}}.} \tag{11.2}$$

Головне в (11.2) — арреніусівський множник $e^{-\varepsilon_{iz}/T_e}$. Для аргону добре працює апроксимація $k_{iz} \approx 2{,}3 \times 10^{-8}\, T_e^{0{,}59} e^{-17{,}4/T_e}$ см^3/с (T_e в еВ) [15].

Числова оцінка. При $T_e = 2$ еВ $k_{iz} \approx 6 \times 10^{-12}$ см^3/с, а при $T_e = 4$ еВ уже $\approx 7 \times 10^{-10}$ см^3/с. Подвоєння температури збільшує швидкість іонізації більш ніж у сто разів.

Через таку різку залежність T_e у розряді ледь змінюється (див. розд. 11.5): невелика зміна T_e компенсує зміну втрат у кілька разів.

Оцінка. Втрати енергії електрона в пружних зіткненнях малі ($2m/M$ за зіткнення), тому основний «стік» енергії електронів — непружні процеси. На одну іонізацію в аргоні при $T_e \sim 3$ еВ припадає кілька збуджень, і повна енергія, яку витрачає електронний газ на створення однієї пари електрон–іон, становить $\varepsilon_c \approx 50$–60 еВ, у кілька разів більше за ε_{iz}. Більша частина цієї енергії виходить з плазми у вигляді випромінювання.

§ 11.2. Пробій газу: механізм Таунсенда і закон Пашена

Нехай між плоскими електродами на відстані d прикладено напругу V, поле $E = V/d$. Випадковий вільний електрон (від космічного випромінювання чи фотоефекту) прискорюється до анода і іонізує газ. Число іонізацій на одиницю довжини шляху — *перший коефіцієнт Таунсенда* α. Оцінимо його. Між зіткненнями електрон проходить у середньому $\lambda = 1/(n_g\sigma) \propto 1/p$ і набирає енергію $eE\lambda$. Імовірність пройти без зіткнення відстань $\varepsilon_{iz}/(eE)$, потрібну для набору енергії іонізації, дорівнює $\exp[-\varepsilon_{iz}/(eE\lambda)]$; зіткнень на одиницю довжини $1/\lambda$. Отже,

$$\alpha = Ap\,\exp\!\left(-\frac{Bp}{E}\right), \qquad A = \frac{1}{\lambda p}, \quad B = \frac{\varepsilon_{iz} A}{e}, \tag{11.3}$$

де A і B — сталі газу (на практиці їх беруть з експерименту: для повітря $A \approx 15$ см$^{-1}$Торр$^{-1}$, $B \approx 365$ В/(см·Торр); для аргону $A \approx 12$,

$B \approx 180$). Важливо, що α/p залежить лише від E/p — енергії, набраної на довжині пробігу.

Один електрон, що вилетів з катода, дає на аноді лавину $e^{\alpha d}$ електронів; утворені $e^{\alpha d}-1$ іонів повертаються на катод і вибивають з нього $\gamma(e^{\alpha d}-1)$ нових електронів, де $\gamma \sim 10^{-2}$–10^{-1} — *коефіцієнт вторинної емісії* (другий коефіцієнт Таунсенда). Якщо кожен вихідний електрон відтворює хоча б одного наступника, розряд стає *самостійним* і не потребує зовнішнього іонізатора:

$$\gamma\left(e^{\alpha d}-1\right)=1 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha d=\ln\left(1+\frac{1}{\gamma}\right). \tag{11.4}$$

Підставивши (11.3) з $E=V/d$, отримуємо напругу пробою — *закон Пашена*:

$$\boxed{V_b=\frac{B\,pd}{\ln(A\,pd)-\ln\ln(1+1/\gamma)}}. \tag{11.5}$$

Напруга пробою залежить не від p і d окремо, а лише від добутку pd (закон подібності). Крива Пашена (рис. 11.1) має мінімум при $(pd)_{\min}=e\ln(1+1/\gamma)/A$, де $V_{\min}=B\,(pd)_{\min}$ (задача 11.2); для повітря $V_{\min}\approx 300$ В при $pd\approx 0{,}8$ Торр$\cdot$см. Праворуч від мінімуму електрон зазнає багато зіткнень, але за одне зіткнення набирає замало енергії, тому потрібне сильне поле. Ліворуч від мінімуму зіткнень замало, щоб розвинулася лавина: електрон долітає до анода, майже нікого не іонізувавши. Звідси практичні наслідки: повітряний проміжок 1 см при атмосферному тиску ($pd=760$ Торр$\cdot$см) пробивається при ≈ 30 кВ; вакуумні вимикачі і високовольтні вводи працюють на лівій гілці, а пробій усередині тонкої трубки при низькому тиску може піти «довгим шляхом» уздовж трубки, а не коротким поперек.

Механізм Таунсенда описує пробій, поки лавина не спотворює зовнішнього поля. При $pd \gtrsim 200$ Торр$\cdot$см (довгі іскри, блискавка) просторовий заряд головки лавини сам створює поле, порівнянне з прикладеним. Тоді розряд поширюється як *стример* — тонкий іонізаційний фронт, що рухається зі швидкістю 10^7–10^8 см/с і підживлюється фотоіонізацією перед головкою, а катод і коефіцієнт γ ролі вже не грають.

§ 11.3. Тліючий розряд і дуга

Після пробою при обмеженому струмі (зовнішній резистор) встановлюється *тліючий розряд*. Його найпомітніша риса — шарувата будова (рис. 11.2). Біля катода лежить *катодне падіння*: шар завтовшки в кілька довжин пробігу, на якому спадає майже вся напруга, $V_c\sim 100$–400 В (порядку $V_{\min}$ кривої Пашена). У ньому іони прискорюються до катода, вибивають вторинні електрони, і ті розмножуються

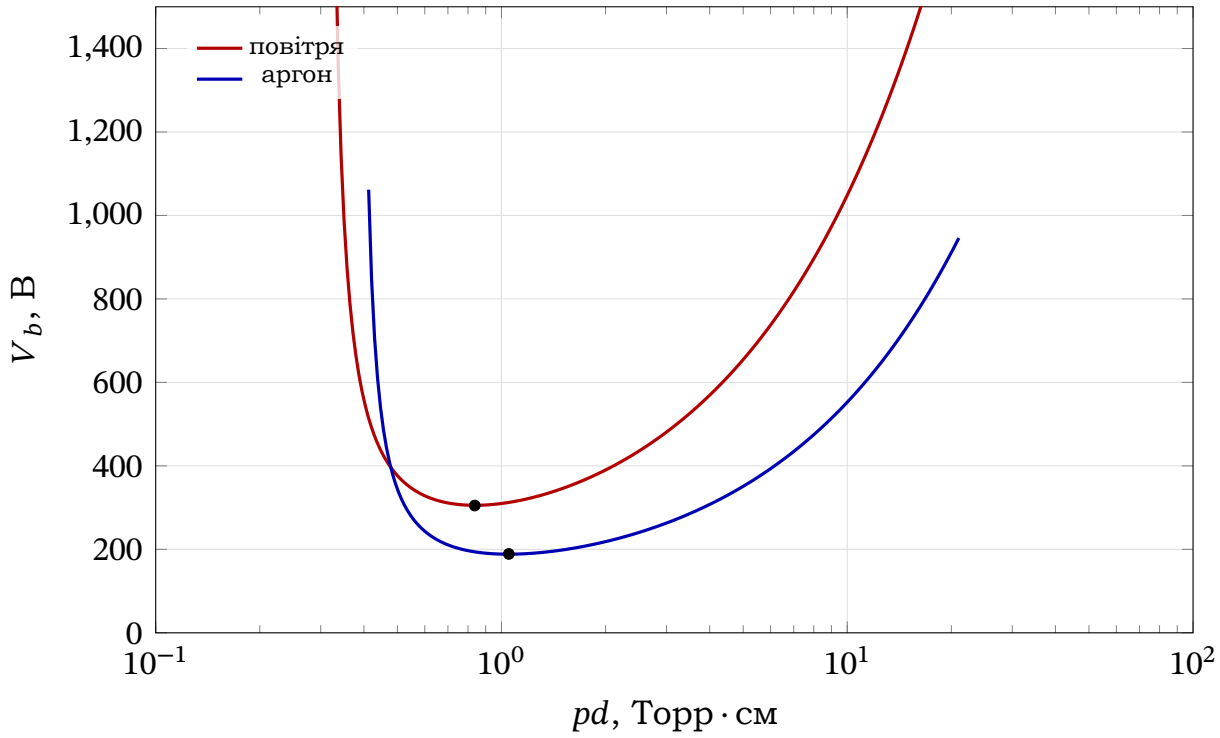


Рис. 11.1. Криві Пашена (11.5) для повітря ($A = 15$, $B = 365$) і аргону ($A = 12$, $B = 180$) при $\gamma = 0{,}01$. Точками позначено мінімуми $V_{\min} = eB\ln(1 + 1/\gamma)/A$.

лавиною, як у механізмі Таунсенда. Прискорені електрони виходять із шару в *негативне світіння* — область майже без поля, де вони втрачають енергію на збудження та іонізацію. Далі, у *фарадеєвому темному просторі*, швидких електронів уже немає, а поле ще мале. Решту проміжку до анода заповнює *позитивний стовп* — однорідна квазінейтральна плазма зі слабким поздовжнім полем $E \sim 1$–10 В/см.

Позитивний стовп: температура з балансу частинок. Позитивний стовп — найпростіший приклад самоузгодженої плазми. Заряджені частинки дифундують до стінок трубки радіуса R амбіполярно (розд. 4.4) і там рекомбінують; втрати компенсує іонізація в об'ємі. Рівняння неперервності для густини, $D_a\nabla^2 n + n_g k_{iz} n = 0$, з умовою $n(R) \approx 0$ має розв'язок $n(r) = n_0 J_0(2{,}405\, r/R)$ і дає *умову Шотткі*

$$n_g k_{iz}(T_e) = D_a \left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2, \qquad D_a \approx \frac{T_e}{M\nu_{in}}. \tag{11.6}$$

Тут $D_a \approx D_i(1 + T_e/T_i) \approx T_e/(M\nu_{in})$ з (4.7), а $\nu_{in} \propto n_g$ — частота зіткнень іонів з атомами. Оскільки $n_g \propto p$, умова (11.6) пов'язує T_e лише з параметром подібності pR: *густина плазми з неї випадає зовсім.* Температуру електронів задає геометрія і тиск, а струм розряду (через баланс енергії) визначає лише густину. Зі зменшенням pR дифузійні втрати зростають, і T_e зростає, щоб іонізація встигала їх компенсувати. Цю ж логіку ми повторимо в глобальній моделі (розд. 11.5).

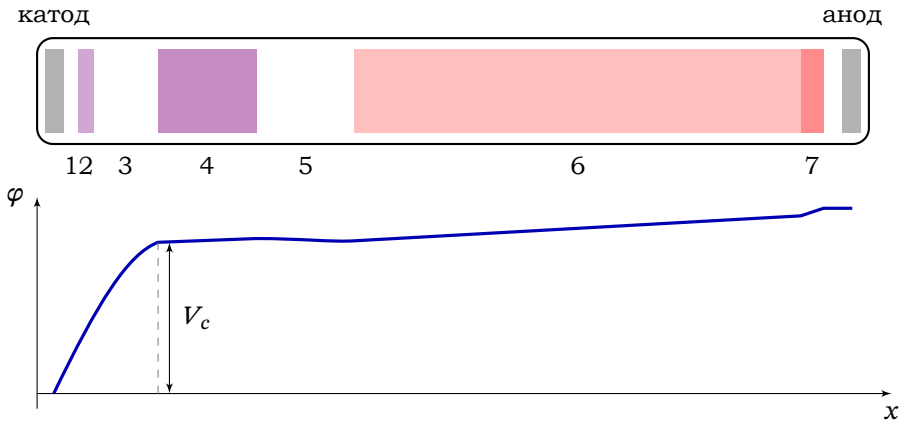


Рис. 11.2. Будова тліючого розряду в трубці (зверху) і розподіл потенціалу $\varphi(x)$ (знизу): 1 — астонів темний простір, 2 — катодне світіння, 3 — катодний (круксів) темний простір, 4 — негативне світіння, 5 — фарадеїв темний простір, 6 — позитивний стовп, 7 — анодне світіння. Майже вся напруга спадає в катодному шарі (1–3).

Вольт-амперна характеристика і дуга. Зі зростанням струму розряд проходить кілька режимів. При малих струмах ($\lesssim 10^{-6}$ А) горить *темний таунсендівський* розряд. Далі напруга стрибком падає до значення *нормального* тліючого розряду. У ньому катодне падіння і густина струму на катоді сталі ($j/p^2 = \text{const}$), а зростання струму лише збільшує вкриту світінням площу катода. Коли світіння вкриває весь катод, настає *аномальний* тліючий розряд: щоб збільшити струм, треба підвищувати V_c. При струмах $\gtrsim 1$ А іонне бомбардування розігріває катод до термоемісії (або на ньому утворюються мікроскопічні катодні плями з автоемісією), і розряд переходить у *дугу*. Катодне падіння в дузі лише ~ 10 В, бо електрони емітує сам гарячий катод, а не вибивають іони. Напруга на дузі падає зі зростанням струму, тобто дуга має *спадну* характеристику, тому без баластного опору вона нестійка. Дуга атмосферного тиску (зварювання, плазмотрони, вимикачі) близька до локальної термодинамічної рівноваги: $T_e \approx T_i \approx T_g \sim 1$ еВ, бо часті зіткнення вирівнюють температури, і до неї вже можна застосувати формулу Саха.

§ 11.4. Приелектродний шар у розряді

Будь-яка розрядна плазма відділена від стінок і електродів шаром позитивного просторового заряду. Його структуру для малого перепаду потенціалу ми вже розглянули (розд. 1.8): іони входять у шар зі швидкістю Бома $u_B = \sqrt{T_e/M}$ (1.19), а густина на межі шару внаслідок прискорення в передшарі становить $n_s \approx e^{-1/2} n_0 \approx 0{,}6\, n_0$. Отже, потік іонів на поверхню

$$\Gamma_i \approx 0{,}6\, n_0 u_B \tag{11.7}$$

не залежить від потенціалу поверхні: його задає плазма, а не стінка. Ця обставина лежить в основі всієї технології плазмової обробки.

На ізольовану стінку іони падають з енергією $e|\Delta\varphi_f| + T_e/2$, де $\Delta\varphi_f$ — плаваючий потенціал (1.20); для аргону це $\approx 5{,}2\,T_e$, тобто ~ 15 еВ. Щоб отримати іони з енергією в сотні електронвольт, на електрод подають великий від'ємний потенціал $-V_0$, $eV_0 \gg T_e$. Тоді електрони в шарі практично відсутні, і шар містить лише іони, що прискорюються. Нехай $\Phi(x) > 0$ — спад потенціалу від межі шару ($x = 0$) вглиб, $J = en_i v_i$ — стала густина іонного струму, $v_i = \sqrt{2e\Phi/M}$ (початковою швидкістю u_B нехтуємо). Рівняння Пуассона

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi e n_i = \frac{4\pi J}{\sqrt{2e\Phi/M}}$$

після множення на $d\Phi/dx$ і інтегрування з $\Phi = \Phi' = 0$ при $x = 0$ дає $\Phi^{3/4} \propto x$, а умова $\Phi(s) = V_0$ на електроді — *закон Чайлда–Ленгмюра*:

$$\boxed{J = \frac{1}{9\pi}\sqrt{\frac{2e}{M}}\,\frac{V_0^{3/2}}{s^2}.} \tag{11.8}$$

Той самий закон «трьох других» обмежує струм електронів у вакуумному діоді (з заміною $M \to m$). У плазмі струм J задано наперед потоком Бома, $J = e\,n_s u_B$, тож (11.8) визначає не струм, а *товщину шару*:

$$s = \frac{\sqrt{2}}{3}\,r_D\left(\frac{2eV_0}{T_e}\right)^{3/4}, \tag{11.9}$$

де r_D — дебаївський радіус (1.9) при густині n_s. Шар під високою напругою в десятки разів товщий за дебаївський: при $T_e = 3$ еВ, $n_s = 10^{10}$ см$^{-3}$ і $V_0 = 300$ В маємо $r_D \approx 0{,}13$ мм і $s \approx 3$ мм (задача 11.3).

Енергія іонів на поверхні. Якщо шар беззіткненнєвий ($\lambda_i \gg s$), кожен іон приходить на електрод з енергією eV_0, а розподіл за енергіями вузький. Кут розходження визначає відношення поперечної теплової швидкості до набраної в шарі: $\theta \approx \sqrt{T_i/(2eV_0)} \sim 1°$. Саме цей майже нормальний пучок іонів робить можливим анізотропне травлення (розд. 11.7). Якщо ж $\lambda_i < s$ (тиск $\gtrsim 100$ мТорр), іони перезаряджаються в шарі, і їхній енергетичний спектр розмивається в бік малих енергій, а кутовий розширюється.

§ 11.5. Глобальна модель розряду

Як для заданого джерела (газ, тиск, розміри, потужність) оцінити T_e і n_0, не розв'язуючи рівнянь переносу? *Глобальна модель* усереднює плазму за об'ємом V і записує два балансові співвідношення.

Баланс частинок. Іонізація в об'ємі компенсує потік Бома на поверхню площею A:

$$n_g k_{iz} n_0 V = n_0 u_B A_{\text{eff}},$$

де ефективна площа $A_{\text{eff}} = hA$ враховує, що густина біля стінки менша, ніж у центрі (при низькому тиску $h \sim 0{,}3$–$0{,}5$, з ростом тиску h спадає як $\lambda_i^{1/2}$). Густина n_0 скорочується, і ми отримуємо рівняння лише для T_e:

$$\boxed{\frac{k_{iz}(T_e)}{u_B(T_e)} = \frac{1}{n_g d_{\text{eff}}}, \qquad d_{\text{eff}} = \frac{V}{A_{\text{eff}}}.} \tag{11.10}$$

Це той самий висновок, що й для позитивного стовпа: *температуру електронів задає баланс частинок, вона залежить тільки від $n_g d_{\text{eff}}$ і не залежить від потужності.* Через арреніусівську залежність $k_{iz}(T_e)$ розв'язок лежить у вузькій смузі $T_e \approx 2$–5 еВ майже для всіх джерел: малі розряди при низькому тиску мають вищу T_e, великі при високому — нижчу.

Баланс енергії. Кожна пара електрон–іон, що покидає плазму, забирає енергію

$$\mathcal{E}_T = \varepsilon_c + 2T_e + \varepsilon_i, \tag{11.11}$$

де ε_c — енергія, витрачена в зіткненнях на створення пари (розд. 11.1), $2T_e$ — середня кінетична енергія електрона, що долає потенціальний бар'єр шару (потік через бар'єр збагачений швидкими частинками), а $\varepsilon_i \approx e\Delta\varphi + T_e/2$ — енергія, яку іон набирає в передшарі й шарі. Поглинена плазмою потужність P_{abs} виходить з неї разом з потоком частинок: $P_{\text{abs}} = e\, n_0 u_B A_{\text{eff}}\, \mathcal{E}_T$ (тут $\mathcal{E}_T$ у вольтах). Звідси

$$\boxed{n_0 = \frac{P_{\text{abs}}}{e\, u_B A_{\text{eff}}\, \mathcal{E}_T}.} \tag{11.12}$$

Густина пропорційна потужності, а T_e від неї не залежить — розподіл ролей, підтверджений вимірюваннями в багатьох джерелах.

Числова оцінка. Аргон, $p = 10$ мТорр ($n_g \approx 3{,}2 \times 10^{14}$ см$^{-3}$ при кімнатній температурі), $d_{\text{eff}} = 10$ см. Тоді $n_g d_{\text{eff}} \approx 3{,}2 \times 10^{15}$ см$^{-2}$, і розв'язок (11.10) дає $T_e \approx 2{,}8$ еВ ($u_B \approx 2{,}6 \times 10^5$ см/с). При $\varepsilon_c \approx 60$ еВ і $\varepsilon_i \approx 5{,}2\, T_e$ маємо $\mathcal{E}_T \approx 80$ еВ, і потужність 500 Вт на $A_{\text{eff}} = 10^3$ см^2 підтримує $n_0 \approx 1{,}5 \times 10^{11}$ см$^{-3}$ (задача 11.4). Це типові параметри індуктивного джерела.

§ 11.6. Високочастотні джерела плазми

Розряд постійного струму має два недоліки: електроди контактують з плазмою (і розпорошуються), а на діелектричних поверхнях (пластина з оксидом) накопичується заряд. Тому в технології

використовують високочастотні (ВЧ) розряди. Стандартна частота 13,56 МГц лежить між іонною і електронною плазмовими частотами: $\omega_{pi} < \omega \ll \omega_{pe}$. Електрони миттєво відстежують поле, а іони реагують лише на усереднений за періодом потенціал шару. Основні типи джерел показано на рис. 11.3, їхні параметри порівняно в табл. 11.1.

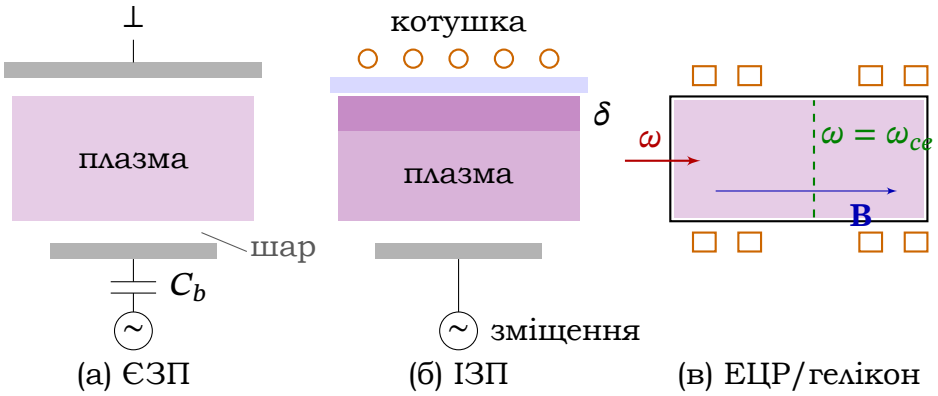


Рис. 11.3. Схеми ВЧ-джерел плазми: (а) ємнісне (ЄЗП), енергію передають коливні шари біля електродів; (б) індуктивне (ІЗП), вихрове поле котушки проникає в плазму на глибину скін-шару δ; (в) ЕЦР/геліконне, мікрохвилі або геліконна хвиля поглинаються в магнітному полі. В (б) окреме ВЧ-зміщення підкладки керує енергією іонів незалежно від густини.

Ємнісний розряд. У *ємнісно-зв'язаній плазмі* (ЄЗП) ВЧ-напругу подають на один з двох плоских електродів через розділювальний конденсатор. Плазма має потенціал, вищий за потенціал обох електродів, тож біля кожного утворюється шар, товщина якого коливається з частотою поля. Електрони нагріваються омічно (зіткнення в об'ємі) і *стохастично*: вони відбиваються від рухомої межі шару, як м'ячик від ракетки, і набирають енергію. Оскільки електрони значно рухливіші за іони, сумарний струм на електрод за період може дорівнювати нулю лише за умови, що конденсатор зарядиться і на електроді виникне від'ємне *автозміщення*. Якщо площі електродів різні, більший спад напруги припадає на шар біля меншого електрода: $V_1/V_2 \approx (A_2/A_1)^q$, ідеалізована модель дає $q = 4$, а на практиці $q \approx 1$–2. Тому пластину кладуть на менший (ВЧ) електрод, а більшим є заземлені стінки камери. Головна вада ЄЗП: однією напругою визначаються і густина плазми ($n \sim 10^9$–10^{10} см$^{-3}$), і енергія іонів (сотні еВ), тож незалежно керувати ними неможливо. Частковий вихід дають двочастотні ЄЗП (десятки МГц для густини, ~ 2 МГц для енергії іонів).

Індуктивний розряд. У *індуктивно-зв'язаній плазмі* (ІЗП) ВЧ-струм тече в котушці над діелектричним вікном. Змінне магнітне поле ко-

тушки наводить у плазмі вихрове електричне поле E_θ, яке нагріває електрони, як вторинну обмотку трансформатора. Поле проникає в плазму лише на глибину скін-шару: у беззіткненнєвому випадку з провідності (4.3) при $\nu \ll \omega$ $\delta = c/\omega_{pe}$, для $n = 10^{11}$ см$^{-3}$ $\delta \approx 1{,}7$ см. Тут немає високовольтних шарів біля котушки, тож густина вища (10^{11}–10^{12} см$^{-3}$ при 1–50 мТорр), а енергією іонів керує окреме ВЧ-зміщення столика з пластиною. При малій потужності ІЗП працює в ємнісному режимі (E-режим) через напругу на котушці і зі зростанням потужності стрибком переходить в індуктивний (H-режим) з густиною на порядок вищою.

ЕЦР- і геліконні джерела. У магнітному полі B мікрохвилі поглинаються резонансно, де $\omega = \omega_{ce}$ (розд. 6.7). Для стандартної частоти 2,45 ГГц резонансне поле $B = 875$ Гс. Звичайна хвиля не проходить у плазму з густиною, вищою за критичну $n_c = m\omega^2/(4\pi e^2) \approx 7{,}4 \times 10^{10}$ см$^{-3}$, а права поляризована хвиля, введена з боку сильного поля ($\omega < \omega_{ce}$), поширюється як свистова хвиля (6.14) і не має обмеження за густиною, доки не дійде до резонансу. Так *ЕЦР-джерело* дає $n \sim 10^{11}$–10^{12} см$^{-3}$ при тиску лише 0,1–1 мТорр.

Геліконне джерело використовує ту саму свистову гілку на ВЧ-частотах ($\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}$) в обмеженому циліндрі. При $\omega_{pe}^2 \gg \omega\omega_{ce}$ закон дисперсії свистової хвилі, що поширюється під кутом θ до поля, $c^2k^2/\omega^2 \approx \omega_{pe}^2/(\omega\omega_{ce}\cos\theta)$, з $k\cos\theta = k_z$ набуває вигляду

$$k k_z = \frac{\omega\,\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}c^2} = \frac{4\pi n e\,\omega}{Bc} \quad\Longrightarrow\quad n = \frac{B k k_z c}{4\pi e \omega}. \tag{11.13}$$

При фіксованій антені (задані k_z і поперечне $k_\perp \approx 3{,}83/a$) густина плазми, в якій хвиля резонансно «вписується» у трубку радіуса a, пропорційна полю B. Геліконні джерела дають рекордні для ВЧ-розрядів густини $\sim 10^{13}$ см$^{-3}$ (задача 11.6).

§ 11.7. Плазмова обробка матеріалів

Мікросхему з мільярдами транзисторів неможливо виготовити без плазми: близько третини технологічних кроків є плазмовими. Плазма постачає на поверхню два «інструменти»: потік *хімічно активних радикалів* (атоми F, Cl, O, утворені дисоціацією молекул електронним ударом) і *спрямований потік іонів* з енергією, яку задає шар.

Травлення. Атоми фтору травлять кремній і самі по собі ($\mathrm{Si} + 4\mathrm{F} \to \mathrm{SiF_4}\uparrow$), але *ізотропно*: маска підтравлюється збоку так само, як вглиб. Іони аргону з енергією ~ 500 еВ розпорошують кремній, але повільно. Разом вони дають швидкість травлення, у кілька (до десяти) разів більшу за суму окремих швидкостей: іонне бомбардування руйнує

Таблиця 11.1. Типові параметри технологічних джерел плазми (аргон).

Джерело	p, **мТорр**	n, см$^{-3}$	T_e, **еВ**	**Енергія іонів**
Тліючий (пост. струм)	10^2–10^4	10^9–10^{11}	1–5	до V_c
ЄЗП (13,56 МГц)	10–10^3	10^9–10^{10}	1–5	10^2–10^3 еВ, зв'язана з n
ІЗП	1–50	10^{11}–10^{12}	2–5	окреме зміщення
ЕЦР (2,45 ГГц)	0,1–10	10^{11}–10^{12}	2–7	окреме зміщення
Геліконне	1–10	10^{12}–10^{13}	3–6	окреме зміщення

поверхневий шар і прискорює утворення та десорбцію летких продуктів. Цей *іонно-стимульований* синергізм діє лише там, куди падають іони, тобто на дно канавки, а не на її стінки, бо пучок майже нормальний (кут ~ 1°, розд. 11.4). Стінки часто ще й захищає полімерна плівка з фторвуглецевих радикалів (CF_x), яку іони здирають лише з дна. Так виходять *анізотропні* канавки з відношенням глибини до ширини понад 50:1.

Осадження. У плазмохімічному осадженні з газової фази (PECVD) енергію для дисоціації прекурсора (SiH_4, NH_3) дають гарячі електрони, а не нагрів підкладки. Тому плівки аморфного кремнію чи нітриду кремнію ростуть при ~ 300 °C замість $\gtrsim$ 700 °C у термічному процесі, і це сумісно з алюмінієвими контактами та скляними підкладками сонячних батарей і дисплеїв.

Розпорошення. У *магнетроні* над катодом-мішенню створюють арочне магнітне поле B ~ 300 Гс. Електрони (ρ_e ~ 0,1 мм) замагнічені й дрейфують у схрещених полях (3.2) по замкненій доріжці над мішенню, тому довго іонізують газ. Іони з ларморівським радіусом у кілька сантиметрів практично не відчувають поля і бомбардують мішень. Так можна підтримувати густий розряд при тиску ~ 1 мТорр, а розпорошені атоми долітають до підкладки без зіткнень.

Розряди атмосферного тиску. Діелектричний бар'єрний розряд (ДБР) між електродами, вкритими діелектриком, складається з багатьох наносекундних мікророзрядів: діелектрик заряджається й гасить кожен з них раніше, ніж той перейде в дугу. Газ лишається холодним, а електрони мають кілька еВ. На цьому ґрунтуються промислові озонатори, обробка полімерів, плазмова медицина. Люмінесцентні та газорозрядні лампи — позитивний стовп, у якому до 60 % потужності перетворюється на резонансне випромінювання (лінія Hg 254 нм).

§ 11.8. Як це вимірюють: оптична емісія і ВЧ-зонди

Оптична емісійна спектроскопія (ОЕС) найпростіша: розряд світиться сам, і досить спектрометра біля вікна камери. Інтенсивність лінії, збудженої прямим електронним ударом з основного стану, $I_X \propto n_e n_X k_X^{\mathrm{exc}}(T_e)$, але і n_e, і k^{exc} невідомі. Метод *актинометрії* обходить цю проблему: до газу додають кілька відсотків інертного газу («актинометра», зазвичай Ar) відомої концентрації і вибирають пару ліній із близькими порогами збудження, наприклад F 703,7 нм (14,5 еВ) і Ar 750,4 нм (13,5 еВ). Тоді відношення констант збудження майже не залежить від T_e, і

$$\frac{n_{\mathrm{F}}}{n_{\mathrm{Ar}}} = C_{\mathrm{F,Ar}}\,\frac{I_{\mathrm{F}}}{I_{\mathrm{Ar}}}, \tag{11.14}$$

де C — стала калібрування. На практиці зміну інтенсивності ліній продуктів реакції (наприклад, CO або SiF) використовують для визначення моменту, коли травлення доходить до нижнього шару (контроль закінчення процесу). Відношення інтенсивностей ліній з *різними* порогами, навпаки, чутливе до хвоста розподілу і дає оцінку T_e.

Зонд Ленгмюра у ВЧ-плазмі. Класична вольт-амперна характеристика зонда (рис. 1.10) передбачає сталий потенціал плазми. У ВЧ-розряді потенціал плазми коливається з амплітудою $\tilde{V}$ від кількох до сотень вольт. Через експоненту в електронній гілці усереднений струм зміщується і розмивається: зонд показує завищену T_e і занижений плаваючий потенціал. *ВЧ-компенсований* зонд вирішує це двома способами: послідовно з зондом вмикають резонансні дроселі, налаштовані на 13,56 МГц і другу гармоніку, а через ємність до зонда під'єднують допоміжний електрод великої площі. Тоді зонд «плаває» разом з потенціалом плазми, і ВЧ-напруга на його шарі стає малою, $e\tilde{V}_{\mathrm{sh}} \lesssim T_e/2$. З компенсованої характеристики знаходять не лише T_e і n_e, а й саму функцію розподілу за енергіями за *методом Дрювестейна*:

$$g_e(\varepsilon) = \frac{2m}{e^2 S}\sqrt{\frac{2eV}{m}}\,\frac{d^2 I_e}{dV^2}, \qquad \varepsilon = eV, \tag{11.15}$$

де V — гальмівний потенціал зонда відносно плазми, S — площа зонда, $g_e(\varepsilon)\,d\varepsilon$ — число електронів в одиниці об'єму з енергією в інтервалі $d\varepsilon$. Формула випливає з того, що струм на зонд при гальмівному потенціалі V несуть лише електрони з енергією, більшою за eV, і справедлива для будь-якого ізотропного розподілу. Такі вимірювання показали, що в ЄЗП низького тиску розподіл часто *двотемпературний*: холодні електрони в центрі ($\sim 0{,}5$ еВ) і гарячі (~ 3 еВ), нагріті коливними шарами. Для абсолютного значення n_e незалежно від зонда використовують мікрохвильову інтерферометрію або резонансний зонд-«шпильку», власна частота якого зсувається на ω_{pe}.

Межі застосовності. Актинометрія вимагає, щоб обидва верхні рівні збуджувалися прямим електронним ударом з основного стану (а не дисоціативним збудженням молекул чи каскадом з вищих рівнів) і розпадалися радіаційно, без гасіння зіткненнями. При тисках $\gtrsim 1$ Торр і в молекулярних газах ці умови порушуються, і стала C стає залежною від режиму. Зонд вносить у плазму збурення і забруднюється плівками в хімічно активних розрядах; друга похідна у (11.15) підсилює шум, тож хвіст розподілу при $\varepsilon \gtrsim 15$ еВ визначається з великою похибкою. У магнітному полі (ЕЦР, магнетрон) струм електронів на зонд обмежено поперечною рухливістю, і формула Дрювестейна незастосовна.

Головне в розділі

- Низькотемпературна плазма нерівноважна: $T_e \sim 1$–10 еВ, $T_i \approx T_g$; її підтримує зовнішнє поле, а іонізація компенсує втрати на стінки.
- Константа іонізації $k_{iz} \propto e^{-\varepsilon_{iz}/T_e}$ (11.2) різко залежить від T_e, тому T_e у розрядах лежить у вузькій смузі 2–5 еВ.
- Пробій: лавина $\alpha = Ap\,e^{-Bp/E}$ плюс вторинна емісія, $\gamma(e^{\alpha d} - 1) = 1$; напруга пробою залежить лише від pd (закон Пашена (11.5)) і має мінімум ~ 200–300 В.
- Тліючий розряд: майже вся напруга спадає в катодному шарі; позитивний стовп підтримується балансом іонізації та амбіполярної дифузії (умова Шотткі (11.6)). Дуга має катодне падіння ~ 10 В і спадну характеристику.
- Потік іонів на поверхню $\approx 0{,}6\,n_0 u_B$ задає плазма; товщину високовольтного шару дає закон Чайлда–Ленгмюра (11.8), $s \sim r_D (eV_0/T_e)^{3/4}$.
- Глобальна модель: T_e визначає баланс частинок, $k_{iz}/u_B = 1/(n_g d_{\text{eff}})$, незалежно від потужності; густина $n_0 = P_{\text{abs}}/(e u_B A_{\text{eff}} \mathcal{E}_T)$ пропорційна потужності.
- ЄЗП зв'язує густину й енергію іонів; ІЗП, ЕЦР і геліконні джерела дають густішу плазму й окреме керування енергією іонів через зміщення підкладки.
- Анізотропне травлення ґрунтується на синергії радикалів і майже нормального потоку іонів із шару.
- Діагностика: актинометрія для відносних концентрацій радикалів, ВЧ-компенсований зонд і метод Дрювестейна для функції розподілу електронів.

Задачі

11.1. ★★★ Нехай переріз іонізації поблизу порога $\sigma_{iz} = C(\varepsilon - \varepsilon_{iz})$ при $\varepsilon > \varepsilon_{iz}$. Усередніть $\sigma_{iz} v$ за максвеллівським розподілом і отримайте (11.2). У скільки разів зросте k_{iz} аргону ($\varepsilon_{iz} = 15{,}8$ еВ) при зростанні T_e від 2 до 3 еВ?

11.2. ★★☆ Знайдіть положення і величину мінімуму кривої Пашена (11.5). Обчисліть їх для повітря ($A = 15$ см$^{-1}$Торр$^{-1}$, $B = 365$ В/(см·Торр), $\gamma = 0{,}01$). Якою буде напруга пробою проміжку $d = 1$ мм при атмосферному тиску?

11.3. ★★☆ Виведіть (11.9) з (11.8) і умови $J = en_s u_B$. Знайдіть товщину шару біля електрода під напругою $V_0 = 300$ В в аргоновій плазмі з $T_e = 3$ еВ, $n_s = 10^{10}$ см$^{-3}$ і час прольоту іона через шар. Порівняйте його з періодом поля 13,56 МГц.

11.4. ★★★ Аргонова плазма при $p = 10$ мТорр, $d_{\text{eff}} = 10$ см, $T_g = 300$ К. Користуючись апроксимацією $k_{iz} \approx 2{,}3 \times 10^{-8} T_e^{0{,}59} e^{-17{,}4/T_e}$ см^3/с, знайдіть T_e з (11.10). Яку густину підтримує поглинена потужність 500 Вт при $A_{\text{eff}} = 10^3$ см^2 і $\mathcal{E}_T = 80$ еВ? Як зміняться T_e і n_0, якщо потужність подвоїти, а тиск зменшити вдвічі?

11.5. ★☆☆ Знайдіть резонансне магнітне поле ЕЦР-джерела з частотою 2,45 ГГц і критичну густину для звичайної хвилі цієї частоти. Чому мікрохвилі вводять з боку сильного поля?

11.6. ★★☆ Геліконне джерело: трубка радіуса $a = 2{,}5$ см, $f = 13{,}56$ МГц, антена задає $\lambda_z = 20$ см, $B = 500$ Гс. Оцініть густину плазми з (11.13), взявши $k_\perp = 3{,}83/a$.

11.7. ★★☆ У магнетроні $B = 300$ Гс, енергія електронів ~ 3 еВ, іонів аргону — до ~ 10 еВ. Порівняйте ларморівські радіуси електронів та іонів із товщиною розрядної області ~ 1 см.

Контрольні питання

1. Чому формула Саха незастосовна до плазми тліючого розряду, але застосовна до дуги атмосферного тиску?
2. Поясніть фізично, чому крива Пашена має мінімум.
3. Чому в глобальній моделі температура електронів не залежить від потужності, а густина пропорційна їй?

4. Чому потік іонів на поверхню не залежить від прикладеної до неї напруги, а товщина шару залежить?

5. Звідки береться автозміщення в ємнісному розряді і чому пластину кладуть на менший електрод?

6. У чому перевага індуктивного джерела над ємнісним для травлення?

7. Чому для актинометрії вибирають лінії з близькими порогами збудження?

12 Основні масштаби, режими та межі моделей

Після розгляду основних фізичних явищ корисно зібрати в одному місці методичну ідею, яка проходить через усю фізику плазми: *модель визначається не назвою середовища, а співвідношенням характерних масштабів*. Одна й та сама плазма може потребувати різного опису залежно від просторового масштабу, характерного часу та швидкості процесу.

Нехай L — просторовий масштаб задачі, а $\tau \sim 1/\omega$ — характерний час її розвитку. Насамперед порівнюють

$$\frac{\lambda_D}{L}, \qquad \frac{r_L}{L}, \qquad \frac{\omega}{\omega_p}, \qquad \frac{\omega}{\omega_c}, \qquad \frac{\nu}{\omega_c}.$$

Ці відношення не є незалежним набором «характеристик плазми». Кожне з них відповідає на конкретне фізичне питання: чи можна вважати плазму квазінейтральною, чи замагнічені частинки, чи встигають електрони відновлювати квазінейтральність, чи встигають частинки здійснювати гірообертання та чи руйнують зіткнення замагніченість.

§ 12.1. Просторові та часові масштаби

Для токамака ($n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T = 10$ кеВ, $B = 5 \times 10^4$ Гс, $L \approx 1$ м) ієрархію довжин і частот показано на рис. 12.1; далі кожна умова вибору моделі — це порівняння двох точок на цій шкалі.

Умова

$$\lambda_D \ll L$$

означає, що дебаївське екранування відбувається на значно меншому масштабі, ніж досліджувана задача. Тому на масштабі L можна, як правило, покладати $n_e \simeq Z n_i$ і користуватися квазінейтральним описом. Якщо ж $L \sim \lambda_D$, електростатичне поле та розділення зарядів стають частиною самої задачі.

Аналогічно,

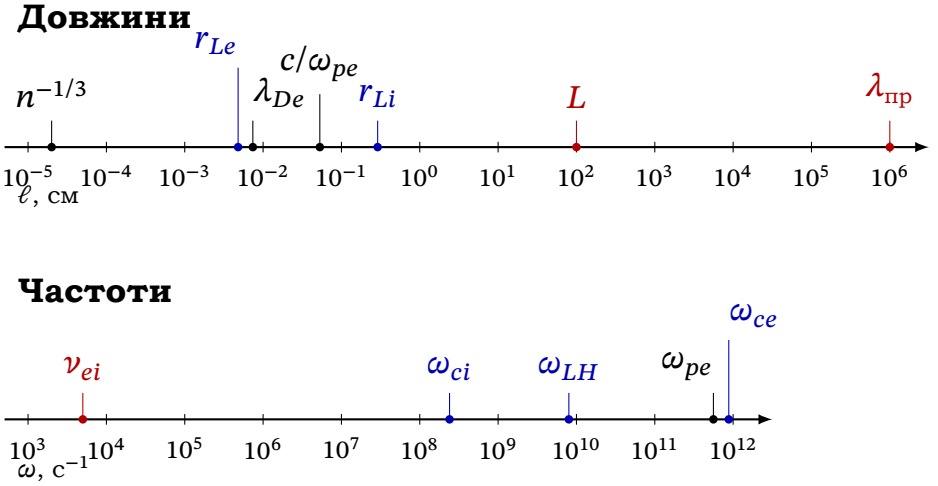


Рис. 12.1. Ієрархія масштабів у токамаку на логарифмічній осі: довжини (зверху) і частоти (знизу). Червоним позначено масштаби задачі (L, $\lambda_{\text{пр}}$, ν_{ei}), синім — магнітні масштаби. Для ω_{LH} використано точну формулу з урахуванням ω_{pi}

$$r_L \ll L$$

є просторовою умовою: на одній ларморівській орбіті поле та його градієнти майже однорідні, тому орбіту можна замінити ведучим центром. Ця умова відрізняється від часової умови $\omega \ll \omega_c$ (за час зміни плазми частинка багато разів обертається навколо силової лінії); обидві потрібні для дрейфового наближення (розд. 3). Якщо $r_L \sim L$, гірація вже не є малим швидким масштабом, який можна відокремити від основного руху.

Порівняння характерної частоти процесу з плазмовою частотою має інший зміст. Умова $\omega \ll \omega_p$ означає, що електрони швидко реагують на спробу порушити квазінейтральність, тоді як при $\omega \gtrsim \omega_p$ їхня інерція стає суттєвою.

Умова $\omega \ll \omega_c$ означає, що гірація є швидким рухом порівняно з еволюцією макроскопічного збурення. Тому в повільній МГД-динаміці окремий оберт можна не відстежувати.

Нарешті, відношення ν/ω_c характеризує конкуренцію зіткнень та магнітного обертання. При $\nu \ll \omega_c$ частинка встигає здійснити багато обертів між зіткненнями і є сильно замагніченою; при $\nu \gg \omega_c$ зіткнення руйнують гірообертання ще до завершення циклу.

§ 12.2. Зіткнювальний та беззіткнювальний режими

Для зіткнювального та беззіткнювального режимів одного порівняння частот недостатньо. Вводимо середню довжину вільного пробігу електрона

$$\lambda_{\text{пр}} \sim \frac{v_{Te}}{\nu_{ei}}$$

та число Кнудсена

$$Kn = \frac{\lambda_{\text{пр}}}{L}. \tag{12.1}$$

Якщо $Kn \ll 1$, частинка багато разів стикається на масштабі L і локальний гідродинамічний опис може бути виправданим. Якщо $Kn \gtrsim 1$, структура функції розподілу за швидкостями стає істотною, і кінетичні ефекти вже не можна автоматично відкидати.

Ключова оцінка для токамака ($n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T = 10$ кеВ): $\nu_{ei} \approx 5 \times 10^3$ с$^{-1}$, $v_{Te} \approx 4 \times 10^9$ см/с, тому $\lambda_{\text{пр}} = v_{Te}/\nu_{ei} \approx 10^6$ см ≈ 10 км, тоді як $L \approx 1$ м. Отже, $Kn \sim 10^4$: плазма «беззіткнювальна», проте МГД працює. Парадокс знімається так: поперек поля роль довжини вільного пробігу відіграє $r_{Li} \ll L$ (магнітне поле «склеює» частинки поперек **B**), а вздовж поля ні — тому саме поздовжнє перенесення потребує кінетики.

Водночас беззіткнювальність завжди треба розуміти відносно конкретного процесу. Умова

$$\nu \ll \omega$$

означає, що зіткнення слабкі саме для явища з характерною частотою ω (за $\omega \sim v_{Te}/L$ це те саме, що $Kn \gg 1$). Повільний процес може бути зіткнювальним у тій самій плазмі, для якої швидкі коливання є беззіткнювальними.

Отже, твердження «плазма беззіткнювальна» без зазначення масштабу часу є неповним.

§ 12.3. Як за масштабами вибирають модель

Корисно розглядати наведені вище співвідношення не окремо, а як послідовність запитань.

Таблицю 12.1 не слід читати як набір взаємовиключних категорій. Реальна плазма може одночасно задовольняти кілька нерівностей. Саме їхня сукупність визначає, які члени рівнянь можна відкинути, а які залишити.

Це особливо важливо для МГД. Наприклад, $R_m \gg 1$ саме по собі не означає повної ідеальної МГД: воно лише пригнічує резистивний член. Щоб отримати

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \simeq 0,$$

Таблиця 12.1. Характерні умови вибору моделі плазми.

Умова	Фізичний наслідок	Типовий опис
$\lambda_D \ll L$	квазінейтральність, $n_e \simeq Z n_i$	можна вводити єдину рідину (потрібні ще рівняння стану та коефіцієнти перенесення)
$r_L \ll L$	замагніченість	дрейфовий / МГД (разом з $\omega \ll \omega_{ci}$)
$Kn \ll 1$	багато зіткнень на масштабі L	гідродинамічний
$Kn \gtrsim 1$	важлива структура $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$	кінетичний
$\nu \ll \omega$	зіткнення слабкі для даного процесу	беззіткнювальний режим
магнітне число Рейнольдса $R_m \gg 1$	резистивна дифузія поля повільна	резистивний член малий (ідеальна МГД — за додаткових умов)
$\beta \ll 1$	магнітний тиск домінує	магнітно-керований режим
$\beta \gtrsim 1$	плазма істотно деформує поле	МГД з повним балансом тиску плазми й поля

треба також перевірити малість холлівського члена, члена електронного тиску та інерційного члена узагальненого закону Ома (розд. 5).

Таким чином, «МГД-опис» — це не властивість плазми взагалі, а наближення, справедливість якого треба обґрунтувати для конкретного процесу.

§ 12.4. Типова ієрархія масштабів у магнітному утриманні

Розглянемо типову установку магнітного утримання: $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T = 10$ кеВ, $B = 5 \times 10^4$ Гс, дейтерієва плазма. Для неї характерна ієрархія

$$\underbrace{n^{-1/3}}_{2\times10^{-5}\text{ см}} \ll \underbrace{\lambda_{De}}_{7\times10^{-3}\text{ см}} \sim \underbrace{r_{Le}}_{5\times10^{-3}\text{ см}} \ll \underbrace{r_{Li}}_{0{,}3\text{ см}} \ll \underbrace{L}_{\sim10^{2}\text{ см}}.$$

Ця послідовність дає набагато більше фізичної інформації, ніж кожне число окремо. На найменшому масштабі видно дискретність частинок; далі виникають дебаївське екранування та електронна гірація; ще більшим є іонний ларморівський радіус; і лише на масштабі всієї установки з'являється макроскопічний рух плазми.

Частотна ієрархія для тієї самої оцінки має вигляд

$$\omega_{pe} \approx 6\times10^{11}\ \text{с}^{-1}, \qquad \omega_{ce} \approx 9\times10^{11}\ \text{с}^{-1},$$
$$\omega_{ci} \approx 2\times10^{8}\ \text{с}^{-1}, \qquad \nu_{ei} \approx 5\times10^{3}\ \text{с}^{-1}.$$

Отже, зіткнення значно рідші за електронний та іонний циклотронний рух. Плазма сильно замагнічена й для багатьох швидких процесів практично беззіткнювальна.

Але з цієї ж ієрархії випливає важливе обмеження: «беззіткнювальна» не означає «завжди кінетична». На достатньо великих масштабах і повільних часах багато мікроскопічних ступенів свободи усереднюються, і виникає ефективний рідинний опис.

§ 12.5. Від кінетики до МГД

На масштабах, що значно перевищують іонний ларморівський радіус, і для повільних рухів, коли $\omega \ll \omega_{ci}$, доцільний магнітогідродинамічний опис: плазма розглядається як провідне суцільне середовище (виведення — § 7.5 і розд. 5).

Для швидких процесів і малих масштабів потрібен кінетичний опис: функція розподілу

$$f_s = f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

залежить від координат і швидкостей. Для беззіткнювальної плазми вона задовольняє рівняння Власова

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\cdot\frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0. \tag{12.2}$$

Рівняння (12.2) доповнюється рівняннями Максвелла з джерелами

$$\rho = \sum_s q_s \int f_s\, d^3v, \qquad \mathbf{j} = \sum_s q_s \int \mathbf{v} f_s\, d^3v.$$

Саме з кінетичного опису природно випливають ефекти, які не містяться в найпростішій МГД: загасання Ландау, кінетичні плазмові хвилі, резонансна взаємодія хвиль із частинками та багато видів нестійкостей.

Водночас кінетичний опис не «кращий» за МГД у всіх ситуаціях. Він містить значно більше інформації, ніж потрібно для повільної макроскопічної динаміки. Завдання теорії — не використовувати найскладнішу модель, а відкинути лише ті ступені свободи, які справді є несуттєвими на вибраному масштабі.

§ 12.6. Безрозмірні параметри МГД

Для магнітогідродинаміки додатково важливі безрозмірні параметри

$$\beta = \frac{8\pi p}{B^2}, \qquad R_m \sim \frac{4\pi\sigma L v}{c^2}, \qquad M_A = \frac{v}{v_A}, \qquad v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho_m}}. \tag{12.3}$$

Параметр β порівнює плазмовий тиск із магнітним. При $\beta \ll 1$ магнітне поле домінує над газодинамічним тиском, тоді як при $\beta \gtrsim 1$ тиск плазми стає істотним у силовому балансі. Сама величина β не визначає застосовності МГД (вона працює й за малих β), а лише показує, наскільки плазма впливає на поле.

Магнітне число Рейнольдса R_m порівнює характерний час руху плазми з часом дифузії магнітного поля. Велике R_m означає, що резистивна дифузія поля повільна порівняно з рухом плазми.

Число Альвена M_A порівнює швидкість руху плазми з альвенівською швидкістю. Воно показує, наскільки важливі магнітні напруження для динаміки порівняно з інерцією потоку.

Ці параметри не задають одну-єдину «категорію плазми». Вони описують різні сторони одного й того самого режиму.

§ 12.7. Межі простих моделей

Наведені вище критерії дозволяють визначити режим, але не скасовують обмежень самих моделей.

У цій книзі ми лише позначили, але не розвинули повністю дрейфово-кінетичну теорію, нелінійну теорію хвиль та сильну турбулентність. Повний опис хвиль у замагніченій плазмі потребує розв'язання тензорного дисперсійного рівняння, а детальний опис нестійкостей — лінеаризації кінетичних або МГД-рівнянь для конкретної рівноваги.

Особливо важливо, що реальне перенесення в магнітно утримуваній плазмі може бути значно сильнішим за класичне зіткнювальне перенесення. Турбулентність породжує *аномальне перенесення*, яке може визначати реальний час утримання енергії. Тому навіть дуже мала частота зіткнень не гарантує ідеального утримання. Оцінка: для токамака дифузія Бома $D_B = cT/16eB \approx 1{,}3 \times 10^6$ см^2/с ($\approx 10^2$ м^2/с), тоді як класична $D_\perp \sim \nu_{ei} r_{Le}^2 \sim 0{,}1$ см^2/с: розрив у $\sim 10^7$ разів. Турбулентні флуктуації $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ перемішують плазму з кроком порядку розміру вихору, а не r_L (розд. 9).

Сильнозв'язана та квантова плазма потребує окремих методів. Отже, опис, побудований у цій книзі, треба розуміти як систему моде-

лей із чітко визначеними межами застосовності, а не як універсальне рівняння для будь-якої плазми.

§ 12.8. Основні масштаби та формули

У таблиці зведено основні величини книги. Наведені практичні формули відповідають системі СГС; T задано в еВ, n — у см$^{-3}$, B — у Гс, f — у МГц; A і Z — масове число та заряд іона.

> **!** *Практичні формули в таблиці записано в СГС із числовими множниками для вказаних одиниць (T в еВ, n в см$^{-3}$, B в Гс); вони не переносяться на СІ без перерахунку. Температуру всюди виражено в енергетичних одиницях (еВ).*

Таблиця 12.2. Основні масштаби та формули фізики плазми в системі СГС.

Величина	Формула	Практична форма
Дебаївська довжина	$\lambda_{De} = \sqrt{T_e/4\pi n_e e^2}$	$7{,}43\times10^2\sqrt{T_e/n_e}$ см
Число частинок у сфері	$N_D = \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_{De}^3$	$N_D \approx 0{,}094\,\Gamma^{-3/2}$
Параметр зв'язку	$\Gamma = e^2 n^{1/3}/T$	
Плазмова частота	$\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_e e^2/m_e}$	$5{,}64\times10^4\sqrt{n_e}$ с$^{-1}$
Теплова швидкість	$v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$	$4{,}19\times10^7\sqrt{T_e}$ см/с
Циклотронна частота	$\omega_c = \lvert q\rvert B/mc$	$\omega_{ce} = 1{,}76\times10^7 B$, $\omega_{ci} = 9{,}58\times10^3 (Z/A) B$
Ларморівський радіус	$r_L = mcv_\perp/\lvert q\rvert B$	$r_{Le} = 2{,}38\sqrt{T_e}/B$ см, $r_{Li} = 1{,}02\times10^2\sqrt{AT_i}/(ZB)$ см
Частота зіткнень e–i	формула (4.1)	$2{,}9\times10^{-6}\, n \ln\Lambda\, T_e^{-3/2}$ с$^{-1}$
Провідність (Спітцер), вздовж **B**	$\sigma_\parallel \propto T_e^{3/2}/\ln\Lambda$	$1{,}7\times10^{14}\, T_e^{3/2}/\ln\Lambda$ с$^{-1}$ (поперек $\sigma_\perp \approx \sigma_\parallel/2$)
Критична концентрація	$n_{\text{кр}} = m_e\omega^2/4\pi e^2$	$1{,}24\times10^4 f^2$ см$^{-3}$
Магнітний тиск	$B^2/8\pi$	$3{,}98\times 10^6\,(B/10^4)^2$ дин/см^2
Параметр β	$\beta = 8\pi p/B^2$	
Альвенівська швидкість	$v_A = B/\sqrt{4\pi\rho_m}$	$2{,}18\times10^{11} B/\sqrt{n_i}$ см/с (водень)
Час дифузії поля	$\tau_d = 4\pi\sigma L^2/c^2$	
Довжина Томаса–Фермі	$\lambda_{TF} = \sqrt{E_F/6\pi n e^2}$	$0{,}5\sqrt{a_B n^{-1/3}}$

Продовження на наступній сторінці

Таблиця 12.2. Основні масштаби та формули фізики плазми в системі СГС. (Продовження)

Величина	Формула	Практична форма
Амбіполярна дифузія	$D_a \approx D_i(1 + T_e/T_i)$	
Швидкість іонного звуку	$c_s = \sqrt{(ZT_e + 3T_i)/m_i}$	$9{,}79 \times 10^5 \sqrt{ZT_e/A}$ см/с ($T_i \ll T_e$)
Дрейф $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$	$v_E = cE/B$	$10^8\, E$[В/см]$/B$[Гс] см/с
Дифузія Бома	$D_B = cT_e/16eB$	$6{,}25 \times 10^6\, T_e/B$ см^2/с
Верхня й нижня гібридні частоти	$\omega_{UH}^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2$; $\omega_{LH}^2 \simeq \omega_{ci}\omega_{ce}$ (лише при $\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$)	$f_{UH} = \sqrt{f_{pe}^2 + f_{ce}^2}$
Поле Драйсера	$E_D = 4\pi e^3 n \ln\Lambda/T_e$	$2{,}6 \times 10^{-13}\, n \ln\Lambda/T_e$ В/см
Критерій запалювання (D–T)	$n\tau_E \geq 12T/\langle\sigma v\rangle E_\alpha$	$\gtrsim 1{,}5 \times 10^{14}$ см$^{-3}$с (мінімум, $T \sim 25$ кеВ)
Гальмівне випромінювання	$P_{br} \propto n_e\sqrt{T_e}\sum Z^2 n_i$	$1{,}7 \times 10^{-32} n_e\sqrt{T_e}\sum Z^2 n_i$ Вт/см^3

Таблиця 12.2 призначена не для заміни виведень, а для швидкої оцінки порядків величин. При виборі моделі спочатку визначають характерні масштаби задачі, а вже потім звертаються до відповідних формул.

§ 12.9. Що вимірюють на якому масштабі

Кожен параметр плазми «видно» лише методом, чий власний масштаб (довжина хвилі, ларморівський радіус, розмір котушки) сумірний із вимірюваною величиною. Таблиця 12.3 зводить методи, розібрані в попередніх розділах.

Метод треба вибирати за тими самими критеріями, що й модель: наприклад, томсонівське розсіяння з $\alpha \ll 1$ дає тепловий спектр, а з $\alpha \gtrsim 1$ — колективні ефекти.

Таблиця 12.3. Масштаб, величина й метод діагностики.

Величина	**Метод**	**Де розглянуто**
n_e (інтегральна, уздовж хорди)	інтерферометрія, $\omega \gg \omega_p$	§2.7
n_e (локальна, профіль)	рефлектометрія, $\omega = \omega_p$	§2.7
T_e, n_e (локально)	томсонівське розсіяння, $\alpha = 1/k\lambda_D$	§7.10
T_e (середня)	опір за Спітцером	§4.5
$T_e(r)$	ECE, $\omega = \ell\omega_{ce}$	§3.8
T_i	допплерівське розширення ліній, нейтрони	§4.5, 10.10
I, енергія плазми	пояс Роговського, діамагнітна петля	§5.12
положення, Δ, $\beta_p + l_i/2$	магнітна реконструкція	§9.10
моди m, n, δB	котушки Мірнова, м'який рентген	§8.15
$q(r)$, B	обертання Фарадея	§6.7
P_f, Q	потік нейтронів	§10.10

Головне в розділі

- Модель плазми визначається не назвою середовища, а співвідношенням характерних масштабів задачі.
- Порівнюють λ_D/L, r_L/L, число Кнудсена Kn, частоти ν/ω, магнітне число Рейнольдса R_m та β.
- Зіткнювальний режим допускає гідродинамічний опис, беззіткнювальний — потребує кінетики принаймні для поздовжнього перенесення й швидких процесів.
- Простіші моделі мають межі застосовності; їх треба перевіряти оцінкою масштабів до розв'язання задачі.
- Параметри плазми вимірюють методами, чий масштаб відповідає вимірюваній величині (табл. 12.3).

Задачі

12.1. ★☆☆ Оцініть λ_{De}, середню відстань $a = n^{-1/3}$ та N_D для чотирьох об'єктів з табл. 2: іоносфера ($n = 10^5$ см$^{-3}$, 0,1 еВ), сонячна корона (10^8 см$^{-3}$, 100 еВ), токамак (10^{14} см$^{-3}$, 10 кеВ), ядро Сонця (10^{26} см$^{-3}$, 1 кеВ). Для якого з них колективний опис найменш обґрунтований?

12.2. ★☆☆ Для дейтерієвої плазми $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T = 10$ кеВ у полі $B = 5 \times 10^4$ Гс знайдіть $n^{-1/3}$, λ_{De}, r_{Le}, r_{Li} і розташуйте їх за зростанням. Яка з обох довжин (r_{Le} чи λ_{De}) більша?

12.3. ★☆☆ Для $n_e = 10^{12}$ см$^{-3}$, $T_e = 10$ еВ, $\ln\Lambda = 15$ знайдіть частоту зіткнень ν_{ei}, відношення ν_{ei}/ω_{pe} та довжину вільного пробігу $\lambda_{\text{пр}} = v_{Te}/\nu_{ei}$. Порівняйте $\lambda_{\text{пр}}$ з λ_{De}.

12.4. ★☆☆ Користуючись табл. 12.2, оцініть λ_D та ω_{pe} для плазми газового розряду з $n_e = 10^{10}$ см$^{-3}$ і $T_e = 3$ еВ. Порівняйте отримані масштаби з типовим часом і просторовим масштабом макроскопічного процесу.

12.5. ★★☆ Оцініть час утримання $\tau \sim a^2/D$ для токамака з $a = 1$ м і $B = 5$ Тл, $T = 10$ кеВ, якщо діє (а) класична дифузія $D_\perp \sim 0{,}1$ см^2/с, (б) дифузія Бома $D_B = cT/(16eB)$. Чи узгоджується хоча б один із двох результатів з експериментом ($\tau_E \sim 1$ с) і що це означає для вибору моделі перенесення?

12.6. ★★☆ За якої концентрації плазма з $T = 1$ кеВ перестає бути ідеальною ($\Gamma \sim 1$) і за якої стає виродженою ($T \sim E_F$)? Порівняйте з ядром Сонця (задача 12.1).

12.7. ★★☆ Для плазми з $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T_i = 10$ кеВ та характерним розміром $L = 1$ м задано $\lambda_{\text{пр}} = 10^6$ см і $r_{Li} = 0{,}3$ см. Оцініть $Kn = \lambda_{\text{пр}}/L$ та r_{Li}/L. Який із двох параметрів показує, що звичайна ізотропна МГД-модель має обмеження? Яке уточнення опису слід розглядати?

Контрольні питання

1. Що таке квазінейтральність? Якою нерівністю визначається можливість нехтувати розділенням зарядів на масштабі L?
2. Чому порівняння масштабів часто важливіше за числове значення окремої величини?
3. Що фізично означають умови $\lambda_D \ll L$ та $r_L \ll L$?
4. Чому умова $\nu \ll \omega$ повинна формулюватися відносно конкретного процесу?
5. Чим принципово відрізняються МГД- та кінетичний описи? За яких умов кінетичний опис стає необхідним?
6. Чому виконання $R_m \gg 1$ саме по собі не гарантує повної ідеальної МГД?
7. Як пов'язані між собою число Кнудсена Kn, довжина вільного пробігу та характерний розмір задачі?
8. Чому плазма може бути беззіткнювальною для швидких процесів і водночас суцільним середовищем на великих масштабах?
9. Які явища не описуються найпростішою ізотропною МГД-моделлю?
10. Яку інформацію дає типова ієрархія $n^{-1/3} \ll \lambda_D \sim r_{Le} \ll r_{Li} \ll L$?
11. Чому для МГД важлива саме ω_{ci}, а не ω_{ce}?
12. Чому в токамаку перенесення поперек поля аномальне і що це означає для моделі?

Підсумки

- *Плазма й її масштаби (розд. 1).* Іонізація сама по собі ще не робить газ плазмою в колективному сенсі. Потрібно, щоб на дебаївській довжині λ_D містилося багато частинок ($N_D \gg 1$); тоді на масштабах $L \gg \lambda_D$ плазма квазінейтральна. Просторовий масштаб колективної відповіді — λ_D, часовий — ω_p^{-1}, і для електронів $\lambda_{De} = v_{Te}/\omega_{pe}$. Біля поглинальної стінки утворюється шар із критерієм Бома $u \geq c_s$ і плаваючим потенціалом $\approx -3{,}3\, T_e/e$ (для водню); на цьому ґрунтується зонд Ленгмюра.
- *Колективні коливання й хвилі (розд. 2).* Частотно-залежна проникність $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ означає відсікання й відбиття хвиль з $\omega < \omega_p$; зіткнення дають поглинання. Тепловий рух перетворює плазмові коливання на хвилі Бома–Гросса $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2$.
- *Рух частинки в полях (розд. 3).* У магнітному полі рух розпадається на швидку гірацію (масштаби r_L, ω_c^{-1}) і повільні дрейфи. Дрейф $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ не залежить від заряду; градієнтний і відцентровий дрейфи залежать від знака заряду й створюють струми та розділення зарядів. Магнітний момент $\mu = mv_\perp^2/2B$ і подовжній інваріант J є адіабатичними інваріантами; вони пояснюють магнітне дзеркало, конус втрат і радіаційні пояси Землі.
- *Зіткнення (розд. 4).* Кулонівська частота $\nu_{ei} \propto nT^{-3/2}$ мала порівняно з ω_p у слабкозв'язаній плазмі, але саме вона визначає опір (провідність Спітцера зростає з температурою), теплоперенос і дифузію. Сила тертя на швидкий електрон спадає зі швидкістю, тому існує поле Драйсера й втікаючі електрони. Поперек магнітного поля дифузія зменшується як B^{-2}.
- *Рідинний опис і МГД (розд. 5).* Сума рівнянь руху електронів та іонів дає рівняння МГД $\rho_m\, d\mathbf{v}/dt = -\nabla p + \mathbf{j}\times\mathbf{B}/c$; закон Ома пов'язує $\mathbf{E}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$. Сила, з якою поле діє на плазму, є магнітним тиском $B^2/8\pi$ *поперек* поля та натягом $B^2/4\pi$ *вздовж* ліній (а не ізотропним тиском). Магнітне поле вморожене в плазму за $R_m \gg 1$, але самої вмороженості для утримання недостатньо. Параметр $\beta = 8\pi p/B^2$ показує, наскільки плазма деформує поле. Діамагнітний струм однаковий у частинковому, рідинному описах і через намагніченість $M = -p/B$.
- *МГД-хвилі й хвилі в замагніченій плазмі (розд. 6).* Лінеаризація

МГД дає три моди: альвенівську $\omega = k v_A \cos\theta$ (натяг ліній, енергія вздовж **B**) та швидку й повільну магнітозвукову. Для $\omega \gtrsim \omega_{ci}$ потрібна холодна замагнічена модель: R-, L-, O-, X-моди, вістлер, гібридні резонанси, ЕЦР і ІЦР. Іонний звук існує за $T_e \gg T_i$.

- *Кінетика (розд. 7).* Рідинний опис — моменти функції розподілу; ієрархія моментів не замикається сама. Лінеаризоване рівняння Власова дає $\varepsilon(\omega, k)$ з полюсом при $v = \omega/k$ і беззіткнювальне загасання Ландау $\gamma \approx -\sqrt{\pi/8}\,\omega_{pe}(k\lambda_{De})^{-3}\exp\!\left[-1/(2k^2\lambda_{De}^2) - 3/2\right]$; додатний нахил $F_0'(v_\varphi) > 0$ (наприклад, пучок) натомість дає нестійкість.
- *Нестійкості (розд. 8).* Нестійкість — зростання збурення з $\operatorname{Im}\omega > 0$; її джерелом є вільна енергія (градієнт тиску в поганій кривині — жолобкова/Релея–Тейлора; пучки; анізотропія; струм; градієнт густини — дрейфові хвилі). За енергетичним принципом МГД-рівновага стійка, якщо $\delta W > 0$ для всіх допустимих зміщень $\boldsymbol{\xi}$.
- *Магнітне утримання (розд. 9).* Дзеркала протікають через конус втрат; z-пінч утримується власним струмом (співвідношення Беннета), але нестійкий. Чисто тороїдальне поле не утримує через дрейф, тому поле закручують (токамак, стеларатор). Захоплені частинки (банани) дають неокласичний перенос, а межі Тройона й Грінвальда обмежують β й густину.
- *Термоядерний синтез (розд. 10).* Реакції йдуть завдяки тунелюванню; швидкість визначається піком Гамова ($E_0 \approx 31$ кеВ при $T = 10$ кеВ). Критерій Лоусона вимагає $nT\tau_E \gtrsim 3 \times 10^{15}$ кеВ·с·см$^{-3}$. Для D–T 20% енергії несуть α-частинки (лишаються в плазмі), 80% — нейтрони (у бланкеті дають тепло й тритій). Плазмовий Q не дорівнює інженерному: електростанції потрібні значно більші Q, ніж просте $Q > 1$.
- *Низькотемпературна плазма та газовий розряд (розд. 11).* Розряд підтримує себе, коли іонізація компенсує втрати: пробій за Таунсендом дає закон Пашена $V_b(pd)$ з мінімумом, а в стаціонарі баланс частинок фіксує T_e (кілька еВ) незалежно від густини, тоді як баланс енергії задає густину $n \propto P_{\text{abs}}$. Біля стінок утворюється шар Бома–Чайлда — Ленгмюра, який прискорює іони до поверхні; на цьому ґрунтується плазмове травлення. ЄЗП, ІЗП, ЕЦР і геліконні джерела розрізняються механізмом передачі енергії електронам.
- *Вибір моделі (розд. 12).* Реальну плазму описує сукупність умов (N_D, λ_D/L, r_L/L, ν/ω, R_m, β, ω/ω_{ci}): кожна задає, які члени рівнянь можна відкинути. Межі простих моделей важливі не менше за самі формули: вони показують, коли потрібно переходити від частинкової картини до МГД, а від МГД — до кінетичної теорії.

Висновки

Розділи посібника описують різні явища, але з них випливає кілька спільних висновків.

1. *Плазма — це колективне середовище з власними масштабами.* Довжина λ_D, частота ω_p, радіус Лармора r_L і частота зіткнень ν задають, на яких відстанях і часах плазма екранує заряди, коливається, замагнічується чи втрачає енергію. Порівняння з цими масштабами — перший крок будь-якої задачі.
2. *Не існує єдиної моделі плазми.* Частинкова картина, МГД і кінетична теорія — наближення одного й того ж опису, кожне зі своєю межею застосовності. Правильна модель — найпростіша з тих, що зберігають потрібне явище; вихід за її межі (наприклад, загасання Ландау, якого МГД не містить) означає, що слід перейти до точнішої.
3. *Магнітне поле перетворює плазму на анізотропне середовище.* Вмороженість, дрейфи, магнітний тиск і натяг ліній визначають і хвилі, і нестійкості, і утримання. Але саме утримання — умова рівноваги, а не стійкості: рівновага, яка існує, може бути нестійкою, а стійка — неповною через перенос.
4. *Застосування — це баланс джерел і втрат.* У термоядерній плазмі критерій Лоусона порівнює нагрівання α-частинками з втратами, у газовому розряді іонізація має компенсувати втрати на стінках; у обох випадках температура й густина встановлюються з балансу, а не задаються довільно.

Читачеві, який засвоїв ці чотири ідеї, нескладно опанувати спеціальнішу літературу — з керованого синтезу, космічної чи лабораторної плазми (див. бібліографію).

Корисні ресурси

Нижче — вільнодоступні матеріали, які доповнюють посібник; більшість англомовні.

- *Довідники й курси.* NRL Plasma Formulary — стисла збірка формул і параметрів плазми (у гауссовій системі, як і в посібнику); MIT OpenCourseWare, 22.611J — повний курс з фізики плазми з конспектами й задачами.
- *Обчислення й симуляції.* PlasmaPy — Python-бібліотека для розрахунку плазмових параметрів (λ_D, ω_p, r_L, β), зручна для перевірки оцінок із задач; Smilei — PIC-код з документацією та прикладами.
- *Керований синтез.* ITER, EUROfusion, PPPL — новини, схеми установок і освітні матеріали; Wendelstein 7-X — сторінка про найбільший стеларатор.

- *Космічна плазма.* Solar Dynamics Observatory — знімки й відео Сонця майже в реальному часі; SpaceWeather — сонячна активність, геомагнітні бурі, полярні сяйва; Plasma Universe — популярна енциклопедія про плазму у Всесвіті.
- *Свіжі результати.* arXiv, physics.plasm-ph — препринти з фізики плазми.

Відповіді

Розділ 1. Плазма: від іонізованого газу до колективного середовища

1.1. $T \approx 0{,}5$ еВ $\approx 8 \times 10^{-13}$ ерг $\approx 8 \times 10^{-20}$ Дж.

1.2. $\alpha \approx 0{,}18$; $\alpha = 1/2$ при $T \approx 1{,}2$ еВ.

1.3. $\omega_{pe} \approx 5{,}6 \times 10^{9}$ с$^{-1}$, $f \approx 0{,}9$ ГГц, період $\approx 1{,}1$ нс (мікрохвильовий діапазон).

1.4. $\omega_{pi}^2/\omega_{pe}^2 = m_e/m_i = 1/1836$, відносна поправка до частоти $\approx m_e/2m_i \approx 2{,}7 \times 10^{-4}$.

1.5. $t_{\mathrm{rel}} \approx 6 \times 10^{-8}$ с (іоносфера), $t_{\mathrm{rel}} \approx 2 \times 10^{-12}$ с (токамак).

1.6. $\lambda_{De} \approx 1{,}3 \times 10^{-3}$ см, $\lambda_{Di} \approx 1{,}3 \times 10^{-4}$ см, $\lambda_D \approx \lambda_{Di}$; для швидкого процесу — λ_{De}, для повільного — λ_D.

1.7. $\lambda_{TF} \approx 5 \times 10^{-9}$ см (поряд із міжатомною відстанню $\sim 2 \times 10^{-8}$ см).

1.8. $\lambda_{De} \approx 1{,}05 \times 10^{-3}$ см, $N_D \approx 4{,}9 \times 10^{3}$, $\Gamma \approx 7 \times 10^{-4}$.

1.9. $a \approx 2{,}2{\times}10^{-5}$ см, $\lambda_{De} \approx 2{,}4{\times}10^{-4}$ см ($\lambda_{De}/a \approx 11$), $N_D \approx 5{\times}10^{3} \gg 1$; умова виконується.

1.10. $\lambda_D \approx 5{,}3 \times 10^{-4}$ см, $\sigma \approx 0{,}5$ СГС.

1.11. (а) Збереження енергії $\frac{1}{2}m_i u^2 = \frac{1}{2}m_i u_0^2 - e\varphi$ і потоку $n_i u = n_{\mathrm{sh}} u_0$ дають

$$n_i = n_{\mathrm{sh}}\Big(1 - \frac{2e\varphi}{m_i u_0^2}\Big)^{-1/2} = n_{\mathrm{sh}}\Big(1 + \frac{2\chi c_s^2}{u_0^2}\Big)^{-1/2}, \qquad n_e = n_{\mathrm{sh}}\, e^{-\chi},$$

де $c_s^2 = T_e/m_i$.
(б) При $\chi \ll 1$: $n_i \approx n_{\rm sh}(1 - \chi c_s^2/u_0^2)$, $n_e \approx n_{\rm sh}(1-\chi)$, тому $n_i - n_e \approx n_{\rm sh}\chi\,(1 - c_s^2/u_0^2)$. Рівняння Пуассона $\varphi'' = -4\pi e(n_i - n_e)$ у змінній $\chi = -e\varphi/T_e$ дає

$$\chi'' = \frac{4\pi e^2 n_{\rm sh}}{T_e}\,\chi\Big(1 - \frac{c_s^2}{u_0^2}\Big) = \frac{\chi}{\lambda_{De}^2}\Big(1 - \frac{c_s^2}{u_0^2}\Big), \qquad \lambda_{De}^2 = \frac{T_e}{4\pi n_{\rm sh} e^2}.$$

Якщо $1 - c_s^2/u_0^2 > 0$, розв'язок $\chi \propto \exp\big(x/\lambda_{De}\sqrt{1 - c_s^2/u_0^2}\big)$ монотонно зростає до стінки — це і є шар. Якщо $1 - c_s^2/u_0^2 < 0$, розв'язок осцилює: $n_i < n_e$ біля межі, заряд негативний, і шар, що має монотонно відокремлювати плазму від стінки, не утворюється. Звідси $u_0 \geq c_s = \sqrt{T_e/m_i}$. (Випадок $u_0 = c_s$ межовий: тоді лінійний член зникає, і питання вирішують наступні порядки розкладу; вони дають ту саму умову зі знаком нерівності $\geq$.)

1.12. (а) З енергії $\frac{1}{2}m_i u^2 = eV$ маємо $u = \sqrt{2eV/m_i}$, а за збереження потоку $n_i = \Gamma_i/u$. Рівняння Пуассона:

$$V'' = 4\pi e\, n_i = 4\pi e\Gamma_i\sqrt{\frac{m_i}{2eV}}.$$

Помножимо на V' й проінтегруємо з умовою $V'(0) = 0$ (інтеграл енергії, як у § 1.8):

$$\tfrac{1}{2}V'^2 = 8\pi e\Gamma_i\sqrt{\frac{m_i}{2e}}\,V^{1/2} \;\Rightarrow\; V' = 4A\,V^{1/4}, \qquad A^2 = \pi e\Gamma_i\sqrt{\frac{m_i}{2e}}.$$

Розділяємо змінні: $V^{-1/4}dV = 4A\,dx$, тож $\frac{4}{3}V^{3/4} = 4Ax$, тобто $V = (3Ax)^{4/3} \propto x^{4/3}$.
(б) Товщина d визначається умовою $V(d) = V_{\rm sh}$: $d = V_{\rm sh}^{3/4}/3A$, тому $d^2 = V_{\rm sh}^{3/2}/9A^2$. Підставимо $\Gamma_i = n_{\rm sh}\sqrt{T_e/m_i}$, звідки $A^2 = \pi e\, n_{\rm sh}\sqrt{T_e/2e}$, і $V_{\rm sh} = \upsilon T_e/e$ ($\upsilon \approx 2{,}8$). Отримуємо

$$\frac{d^2}{\lambda_{De}^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}\,\upsilon^{3/2} \approx 2{,}9, \qquad d \approx 1{,}7\,\lambda_{De}.$$

Тут λ_{De} побудовано за $n_{\rm sh}$; якщо взяти густину незбуреної плазми ($n_{\rm sh} \approx 0{,}61\,n_0$), то $d \approx 2{,}2\,\lambda_{De}(n_0)$. Отже, товщина шару — близько двох дебаївських довжин.

1.13. $u_0 = c_s \approx 2{,}0 \times 10^6$ см/с, енергія $\frac{1}{2} m_i c_s^2 = T_e/2 = 2$ еВ, $\Gamma_i = n_{\text{sh}} c_s \approx 2 \times 10^{17}$ см$^{-2}$с$^{-1}$.

1.14. $c_s \approx 1{,}7 \times 10^6$ см/с, $n_0 = I/(0{,}6\, e\, c_s S) \approx 10^{11}$ см$^{-3}$, $\varphi_f \approx -3{,}3\, T_e/e \approx -10$ В.

1.15. $T_e = eI_{is}/[2\, dI/dV] = 0{,}5/(2 \cdot 0{,}1) = 2{,}5$ еВ.

1.16. $\lambda_{De} \approx 13$ мкм, $N_D \sim 10^5$; $\varphi_f \approx -100$ В; $c_s \approx 5{,}4 \times 10^6$ см/с, $\Gamma_i \approx 3 \times 10^{23}$ м$^{-2}$с$^{-1}$, $Q \approx 8$ МВт/м^2.

Розділ 2. Колективні коливання та хвилі в плазмі

2.1. $3k^2 v_{Te}^2/\omega_{pe}^2 = 3k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$, тобто $k\lambda_{De} \ll 1$.

2.2. $f_p \approx 9$ МГц > 1 МГц: хвиля відбивається; глибина проникнення $c/\omega_p \approx 5$ м.

2.3. $f_{\max} = f_p \approx 9$ МГц при 0° і $f_p/\cos\theta \approx 26$ МГц при 70°; для 100 МГц потрібен $\cos\theta \approx 0{,}09$ ($\theta \approx 85°$), практично недосяжно.

2.4. у вакуумі ні: $\nabla \cdot \mathbf{E} = ikE_0 \neq 0$ при $\rho = 0$, електромагнітні хвилі поперечні. У плазмі така поздовжня хвиля існує — це ленгмюрівське коливання з $\omega \approx \omega_p$.

2.5. $n_e \approx 2 \times 10^9$ см$^{-3}$.

2.6. $n_e \approx 2{,}4 \times 10^5$ см$^{-3}$, $v_\varphi = c/0{,}9$, $v_g = 0{,}9c$.

2.7. $\Delta\varphi \approx 56$ рад, ≈ 9 смуг.

2.8. для 1 мм $n_{\text{кр}} \approx 1{,}1 \times 10^{15}$ см$^{-3}$, $\Delta\varphi \approx 280$ рад (≈ 45 смуг), $\delta\varphi \approx 0{,}06$ рад; для 10,6 мкм $\Delta\varphi \approx 3$ рад, $\delta\varphi \approx 6$ рад — вібрація більша за сигнал, потрібна компенсація (зате рефракція в 10^4 разів менша).

2.9. $\tau = (2/c)\int_0^{x_c} dx/\sqrt{1 - x/x_c} = 4x_c/c$; $n_{\text{кр}} \approx 5 \times 10^{12}$–$7 \times 10^{13}$ см$^{-3}$.

Розділ 3. Рух зарядженої частинки в електричному та магнітному полях

3.1. $r_{Le} \approx 3{,}4 \times 10^{-3}$ см $< \lambda_{De} \approx 7{,}4 \times 10^{-3}$ см.

3.2. $v_E = cE/B = 10^5$ см/с (1 км/с), однакова для електрона й протона.

3.3. електрон релятивістський ($\gamma \approx 3$, $v \approx 0{,}94c$); $r_L \approx 5$ км, $2\pi/\omega_c \approx 2 \times 10^{-4}$ с, $\tau_b \approx 0{,}4$ с, $\tau_d \approx 15$ хв.

3.5. $v_\perp$ стала, а вихід настає за $v_\parallel/v_\perp = \cot\theta_c = 2$, тобто коли L зменшиться вдвічі: $t \approx 2{,}5 \times 10^8$ с (≈ 8 років), $\mathcal{E} \approx 2{,}5$ кеВ.

3.6. $\sin\theta_c = \sqrt{B_{\min}/B_{\max}} = 1/2$, $\theta_c = 30°$; частка $1 - \cos\theta_c \approx 13\,\%$.

3.7. $E = v_E B/c \approx 33$ СГС $\approx 10^4$ В/см; від сорту іонів не залежить.

3.8. $\omega = 2c\varphi_0/(Ba^2) \approx 2 \times 10^6$ рад/с.

3.9. $v_d \approx 2$ км/с, $t \approx 1{,}5 \times 10^{-4}$ с.

3.10. $\omega_{ce} = 2\pi \cdot 126$ ГГц відповідає $B \approx 4{,}5$ Тл, $R = R_0 \cdot 5/4{,}5 \approx 1{,}83$ м; точка зміщується до $R \approx 2{,}0$ м.

3.11. $T_i = 20$ еВ.

Розділ 4. Зіткнення, провідність та перенос у плазмі

4.1. $\sigma \propto T^{3/2}$: зростання в 31,6 раза; $\sigma(1\text{ кеВ}) \approx 3{,}6 \times 10^{17}$ с$^{-1}$ (мідь: $\approx 5 \times 10^{17}$ с$^{-1}$); $j^2/\sigma \propto T^{-3/2}$.

4.2. κ_e зростає в 316 разів, σ в 31,6 раза; $\kappa_e/\sigma \propto T_e$ зростає в 10 разів, а $\kappa_e/(\sigma T_e)$ не змінюється (аналог закону Відемана–Франца).

4.3. в обох випадках $E_D \approx 3{,}9$ В/м (відношення n/T_e однакове); $v_c/v_{Te} = \sqrt{E_D/E} \approx 6{,}2$, частка $\sim \exp(-E_D/2E) \approx 3 \times 10^{-9}$.

4.4. $D_a = 2D_i$ при $T_e = T_i$ і $D_a = 11D_i$ при $T_e = 10T_i$.

4.5. іоносфера: $\ln\Lambda \approx 12{,}6$, $\nu_{ei} \approx 10^3$ с$^{-1}$, $\nu_{ei}/\omega_{pe} \approx 2\times10^{-5}$; корона: $\ln\Lambda \approx 19$, $\nu_{ei} \approx 6$ с$^{-1}$, $\nu_{ei}/\omega_{pe} \approx 10^{-8}$; лабораторна: $\ln\Lambda \approx 11{,}5$, $\nu_{ei} \approx 10^7$ с$^{-1}$, $\nu_{ei}/\omega_{pe} \approx 6\times10^{-5}$ — найбільш зіткненнєва.

4.6. $\tau_e \approx 2\times10^{-4}$ с, $\ell_e \approx 8$ км $\gg 2\pi R \approx 19$ м; $\tau_{eq} \sim 0{,}2$ с для водню.

4.7. $\nu_{ei} \approx 5\times10^3$ с$^{-1}$, $r_{Le} \approx 5\times10^{-3}$ см, $D_\perp \approx 0{,}1$ см^2/с; $D_B \approx 1{,}3\times10^6$ см^2/с, тобто в $\sim 10^7$ разів більший. Якби дифузія була бомівською, утримання в реакторних масштабах було б неможливим; реальний (аномальний) перенос лежить між цими межами.

4.8. $\sigma = 10^7$ См/м $= 9\times10^{16}$ с$^{-1}$, $T_e \approx 0{,}4$ кеВ; $T_i \approx 250$ еВ ($\Delta\lambda/\lambda_0 = 1{,}22\times10^{-3}$, $T_i = (\Delta\lambda/\lambda_0)^2 Mc^2/8\ln 2$).

Розділ 5. Гідродинамічний та магнітогідродинамічний опис

5.1. $p = B^2/8\pi = 2\pi n^2 I^2/c^2$, $B = 4\pi nI/c$.

5.2. $p = 2nT = 3{,}2\times10^6$ дин/см^2, $B(\beta=1) \approx 9\times10^3$ Гс; $\beta \approx 3{,}2\,\%$ за 5×10^4 Гс.

5.3. $\sigma \approx 3{,}6\times10^{17}$ с$^{-1}$ (порівнянна з міддю), $\tau_d = 4\pi\sigma L^2/c^2 \approx 50$ с, $R_m \approx 5\times10^4$.

5.4. $v_A \approx 2{,}2\times10^8$ см/с, $v_{Ti} \approx 1{,}0\times10^8$ см/с ($v_{Ti}/v_A \approx 0{,}45$).

5.5. $B^2/8\pi \approx 1{,}1\times10^8$ дин/см$^2 \approx 112$ бар, $\beta \approx 3\,\%$.

5.6. $v_A \approx 7{,}7\times10^8$ см/с, $t = L/v_A \approx 1{,}3\times10^{-7}$ с.

5.7. $\lambda_{\text{пр}} \sim 10^6$ см (10 км), $r_{Li} \approx 0{,}3$ см, для іонів $D_\perp/D_\parallel \sim (\nu_{ii}/\omega_{ci})^2 \sim 10^{-13}$, для електронів $(\nu_{ei}/\omega_{ce})^2 \sim 10^{-17}$. Уздовж поля частинки вільно пролітають $\lambda_{\text{пр}} \gg L$, а поперек поля гірація з $r_L \ll L$ локалізує їх: роль довжини пробігу відіграє r_L.

5.8. $\Gamma_y = c\,T\,n'/(qB)$, $j_y = c\,p'/B$.

5.9. у 10^4 разів.

5.10. $\psi \approx 45°$.

5.11. $W = \frac{3}{4} R B_0 |\Delta\Phi| \approx 1{,}7 \times 10^{13}$ ерг $= 1{,}7$ МДж; ні, петля дає лише $\int p\, dS$, тобто добуток nT.

5.12. $\dfrac{4\pi n_c S}{c^2} I \approx 4 \times 10^{-4}$ СГС $= 0{,}13$ В·с (для $I = 10^6$ А $= 3 \times 10^{15}$ СГС); не залежить — лише від повного охопленого струму.

5.13. (а) $\eta_\parallel = 5{,}2 \times 10^{-5} \cdot 15/1000^{3/2} \approx 2{,}5 \times 10^{-8}$ Ом·м (близько до міді, $1{,}7 \times 10^{-8}$ Ом·м), $\eta_\perp = 2\eta_\parallel \approx 4{,}9 \times 10^{-8}$ Ом·м. (б) $\nu_{ei} = 2{,}91 \times 10^{-6} \cdot 10^{14} \cdot 15/1000^{3/2} \approx 1{,}4 \times 10^5$ с$^{-1}$, $\omega_{ce} = 1{,}76 \times 10^7 \cdot 5 \times 10^4 \approx 8{,}8 \times 10^{11}$ с$^{-1}$, тож $(\omega_{ce}/\nu_{ei})^2 \approx 4 \times 10^{13}$ і $\eta_\perp \sim 10^6$ Ом·м — на 13 порядків більше за реальний; плазма була б практично непровідною поперек поля, що суперечить спостереженню. (в) Тертя $\mathbf{R}_{ei} = en\mathbf{j}/\sigma$ залежить лише від відносної швидкості електронів та іонів, тобто від $\mathbf{j}$. Спільний дрейф $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ однаковий для обох сортів, відносної швидкості не створює й тертя не викликає; опір поперек поля визначає лише доданок $\mathbf{j}_\perp$, тому $\eta_\perp \sim \eta_\parallel$.

Розділ 6. Хвилі в замагніченій плазмі

6.1. $v_A \approx 7{,}7 \times 10^8$ см/с (дейтерій), $c_s \approx 1{,}4 \times 10^8$ см/с, $v_{Ti} \sim 10^8$ см/с — $v_A \gg v_{Ti}$; час проходу $a/v_A \approx 2{,}6 \times 10^{-7}$ с.

6.2. при $\theta \to 0$ $v_+ \to \max(v_A, c_s)$, $v_- \to \min(v_A, c_s)$: для $v_A > c_s$ швидка мода переходить в альвенівську, а повільна — у звук; для $v_A < c_s$ — навпаки.

6.3. $v_g = 2c\sqrt{\omega}\,(\omega_{ce} - \omega)^{3/2}/(\omega_{pe}\omega_{ce}) \approx 3{,}2 \times 10^9$ і $3{,}8 \times 10^9$ см/с; час проходу $\approx 3{,}1$ і $2{,}6$ с, $\Delta t \approx 0{,}5$ с. Формула $v_g \approx 2c\sqrt{\omega\omega_{ce}}/\omega_{pe}$ (границя $\omega \ll \omega_{ce}$) дала б $3{,}8 \times 10^9$ і $5{,}4 \times 10^9$ см/с, $\Delta t \approx 0{,}8$ с, тобто завищує v_g приблизно на 17 і 40 %.

6.4. $f_{pe} \approx 63$ ГГц, $f_{ce} \approx 84$ ГГц, $f_{UH} \approx 105$ ГГц; $f_{ci} \approx 46$ МГц, $f_{pi} \approx 1{,}5$ ГГц, $f_{LH} \approx 1{,}2$ ГГц. З боку слабкого поля X-мода спершу натрапляє на відсікання $\omega = \omega_R$ і відбивається; запущена з боку сильного поля, вона доходить до резонансу.

6.5. ≈ 520 км/с; ≈ 220 км/с; $\approx 6{,}5$ км/с.

6.6. у короні ($T \sim 100$ еВ) спітцерівська $\nu_m \sim 10^4$ см^2/с; для $\omega \sim 10^{-2}$ с$^{-1}$ і $v_A \sim 7\times 10^7$ см/с довжина загасання $1/\operatorname{Im} k \sim 10^{24}$ см $\gg R_\odot$. Дисипація можлива лише на дуже малих масштабах (фазове перемішування, турбулентний каскад).

6.7. $f_{pe} \approx 90$ ГГц, $f_{ce} \lesssim 140$ ГГц $\ll 1{,}5$ ТГц; $\psi \approx 0{,}53$ рад $\approx 30°$.

6.8. $B = 5$ Тл, $R = B_0 R_0/B = 3{,}6$ м.

6.9. Вивід за [7]. Збурення беремо у вигляді $\propto e^{i(kx-\omega t)}$, тож $\partial_t \to -i\omega$, $\partial_x \to ik$. Незбурена плазма квазінейтральна: $n_{e0} = Zn_{i0}$. *Електрони.* Через $\omega \ll kv_{Te}$ вони больцманівські, $n_e = n_{e0}e^{e\varphi/T_e}$, і після лінеаризації

$$\frac{n_{e1}}{n_{e0}} = \frac{e\varphi}{T_e}.$$

Іони. Сила на іон $-Ze\,\partial_x\varphi$, а тиск іонів $p_{i1} = \gamma_i T_i n_{i1}$ з $\gamma_i = 3$, тож градієнт тиску на один іон дорівнює $-\gamma_i T_i\,\partial_x n_{i1}/n_{i0}$:

$$-i\omega m_i v = -ik\,Ze\varphi - ik\,3T_i\,\frac{n_{i1}}{n_{i0}}.$$

Неперервність $-i\omega n_{i1} + ikn_{i0}v = 0$ дає $n_{i1}/n_{i0} = kv/\omega$, тобто $v = \omega n_{i1}/(kn_{i0})$. Підставляємо v в рівняння руху, множимо на ik і групуємо члени з n_{i1}:

$$\left(\omega^2 - \frac{3k^2T_i}{m_i}\right)\frac{n_{i1}}{n_{i0}} = \frac{k^2Ze\varphi}{m_i} \;\Rightarrow\; \frac{n_{i1}}{n_{i0}} = \frac{k^2Ze\varphi}{m_i\,(\omega^2 - 3k^2T_i/m_i)}.$$

Пуассон. $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ з $\rho = e(Zn_{i1} - n_{e1})$ дає $k^2\varphi = 4\pi e(Zn_{i1} - n_{e1})$. Підставляємо n_{i1} та $n_{e1} = Zn_{i0}\,e\varphi/T_e$ і скорочуємо на φ:

$$k^2 = 4\pi Z^2e^2n_{i0}\left[\frac{k^2}{m_i(\omega^2 - 3k^2T_i/m_i)} - \frac{1}{ZT_e}\right].$$

Оскільки $4\pi Z^2e^2n_{i0}/(ZT_e) = 4\pi n_{e0}e^2/T_e = \lambda_{De}^{-2}$, множимо на λ_{De}^2:

$$k^2\lambda_{De}^2 + 1 = \frac{ZT_e}{m_i}\,\frac{k^2}{\omega^2 - 3k^2T_i/m_i}.$$

Звідси $\omega^2 - 3k^2T_i/m_i = k^2ZT_e/[m_i(1 + k^2\lambda_{De}^2)]$, тобто

$$\omega^2 = k^2\left[\frac{ZT_e}{m_i\,(1 + k^2\lambda_{De}^2)} + \frac{3T_i}{m_i}\right].$$

6.10. $c_s \approx 3{,}1\times10^6$ см/с; $k\lambda_{De}\approx 0{,}48$.

Розділ 7. Кінетичний опис плазми

7.1. $f\to 0$ при $|\mathbf{v}|\to\infty$ швидше за $1/v^2$; крім того, для сили Лоренца $\nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{F}=0$.

7.2. для ізотропного f тензор $\mathsf{P}_{ij}=p\,\delta_{ij}$, тож $p=\operatorname{Tr}\mathsf{P}/3$; для максвеллівського розподілу $\int c^2 f\,d^3v = 3nT/m$.

7.3. (а) $\lambda_{De}\approx 2{,}4\times10^{-3}$ см, $k\lambda_{De}\approx 0{,}15$, $\omega\approx 1{,}03\,\omega_{pe}$, $v_\varphi\approx 9\times10^8$ см/с, $v_\varphi/v_{Te}\approx 7$, $\gamma/\omega_{pe}\approx 5\times10^{-9}$ — загасання дуже слабке; (б) $\gamma/\omega\approx 1/(2\pi\cdot 10)\approx 0{,}016$ дає $k\lambda_{De}\approx 0{,}3$, тобто $\lambda\approx 2\pi\lambda_{De}/0{,}3\approx 0{,}5$ мм.

7.4. $\sqrt{2T/m}$, $\sqrt{8T/\pi m}$, $\sqrt{3T/m}$ (у відношенні $1:1{,}13:1{,}22$).

7.5. $\delta f=-i\,(q/m)\,E\,F'/(\omega-kv+i\nu)$, тобто $\omega\to\omega+i\nu$.

7.7. $1=\dfrac{\omega_p^2}{2}\Big[\dfrac{1}{(\omega-ku)^2}+\dfrac{1}{(\omega+ku)^2}\Big]$.

7.8. $\omega_b\approx 0{,}01\,\omega_{pe}$, $\gamma\approx 0{,}02\,\omega_{pe}$: хвиля загасає швидше, ніж починається захоплення.

7.9. $F_b'\sim n_b/\Delta v^2$ максимальна на висхідному схилі пучка, при $v\approx v_b-\Delta v$.

7.10. $T_e=m_ec^2\big[\sigma_\lambda/(2\lambda_i\sin 45^\circ)\big]^2\approx 90$ еВ, $\lambda_{De}\approx 10^{-3}$ см, $\alpha\approx 0{,}01\ll 1$.

7.11. $\sin(\theta/2)=\lambda_i/4\pi\lambda_{De}\approx 0{,}11$, $\theta\approx 13^\circ$; колективне при $\theta\lesssim 13^\circ$. Для 1064 нм потрібно $\sin(\theta/2)\approx 0{,}011$, тобто $\theta\approx 1^\circ$ — відокремити сигнал від пучка практично неможливо.

Розділ 8. Загальний принцип нестійкості плазми

8.1. $A=1/3$; $\gamma(1\text{ см})\approx 46$ с$^{-1}$, $\gamma(10\text{ см})\approx 14{,}5$ с$^{-1}$; швидше росте коротша хвиля (без поверхневого натягу). Умова $\omega^2=0$ дає k_c; при $k>k_c$ натяг переважає, $\omega^2>0$. У плазмі роль натягу відіграє натяг силових ліній (збурення з $k_\parallel\neq 0$, шир) і скінченний лармо-

рівський радіус.

8.2. $\omega_p \approx 5{,}6\times10^{10}$ с$^{-1}$; $\gamma \approx 0{,}069\,\omega_p \approx 3{,}9\times10^{9}$ с$^{-1}$; $\lambda = 2\pi v_b/\omega_p \approx$ 1,1 мм; $t = 10/\gamma \approx 2{,}6$ нс, тобто ≈ 23 плазмові періоди.

8.3. $\beta_\parallel \approx 1{,}4$, $\beta_\perp \approx 0{,}7$, різниця $\approx 0{,}7 < 2$ — плазма стійка.

8.4. $t_{\text{зр}} = 1/\gamma = 5$ мкс (амплітуда зростає в e разів); при $\gamma < 0$ збурення загасає.

8.5. межа нестійкості $\omega^2 = 0$ дає $k^2v_0^2 = 2\omega_p^2$; мінімум ω^2 за k^2 досягається при $\sqrt{4k^2v_0^2+\omega_p^2} = 2\omega_p$, де $\omega^2 = -\omega_p^2/4$.

8.6. $\delta W = mgl(1-\cos\theta) \approx mgl\,\theta^2/2 > 0$ біля $\theta = 0$ (стійке); для $\theta = \pi+\vartheta$ $\delta W \approx -mgl\,\vartheta^2/2 < 0$ (нестійке). Оскільки $\omega^2_{\min} = \min(\delta W/K)$, одне зміщення з $\delta W < 0$ уже гарантує $\omega^2 < 0$.

8.7. $|\mathcal{E}| \approx 2{,}1\times10^{-3}$ ст.В $\approx 0{,}6$ В; $m\Delta\theta = 90^\circ \Rightarrow m = 3$.

Розділ 9. Магнітне утримання плазми

9.1. $f_t \approx \sqrt{2\varepsilon} \approx 0{,}77$; $r_L \approx 0{,}3$ см, $\Delta_b \sim qr_L/\sqrt{\varepsilon} \approx 1$ см $\ll a = 200$ см; $D_{\text{neo}}/D_{\text{cl}} \sim q^2\varepsilon^{-3/2} \approx 24$.

9.2. $\beta_{\max} \approx 2{,}8\cdot 2/(0{,}5\cdot 2) \approx 5{,}6\%$; $n_G \approx 2{,}5\times10^{20}$ м$^{-3} = 2{,}5\times10^{14}$ см$^{-3}$; $p = \beta B^2/8\pi \approx 9\times10^5$ дин/см$^2 \approx 0{,}9$ атм.

9.3. $N_1 = 2n\pi R^2 \approx 7{,}9\times10^{17}$ см$^{-1}$, $I \approx 2{,}2\times10^5$ А, $B_\theta = 2I/cR \approx 9\times10^4$ Гс; $\tau \sim R/v_A \sim 2\times10^{-8}$ с.

9.4. $\beta = 1 - B_z^2(0)/B_0^2 = 0{,}75$; $p = (B_0^2 - B_z^2)/8\pi \approx 4{,}8\times10^7$ дин/см$^2 \approx$ 47 атм; $n = p/2T \approx 1{,}5\times10^{16}$ см$^{-3}$; $v_{Ti} \approx 2{,}2\times10^7$ см/с, $\tau \sim L/2v_{Ti} \approx$ 7 мкс; $n\tau \approx 10^{11}$ см$^{-3}$ с, на три порядки менше за потрібне.

9.5. $q \approx 1{,}7$.

9.6. $1-\sqrt{1-1/R_m} \approx 0{,}11$ і $\approx 0{,}05$.

9.7. $\langle p\rangle = 2nT \approx 1{,}6\times10^{5}$ дин/см^2, $\beta_p \approx 0{,}25$; $\Delta \approx (a^2/R)(\beta_p + l_i/2) \approx$ 12 см.

Розділ 10. Керований термоядерний синтез

10.1. $P_f \approx 0{,}80$, $P_\alpha \approx 0{,}16$, $P_{br} \approx 0{,}017$ Вт/см^3; $\tau_E \approx 3$ с ($n\tau_E \approx 3\times10^{14}$ см$^{-3}$с); при 20 кеВ $n\tau_E \approx 1{,}6\times10^{14}$.

10.2. $v_\alpha \approx 1{,}3\times10^{9}$ см/с, $r_{L\alpha} \approx 5{,}1$ см; частка $Q/(Q+5)$, при $Q=10$ це 2/3.

10.3. $Q_{\min} \approx 5{,}3$; з урахуванням власних потреб умова стає $0{,}8\,\eta_{\rm th}[(0{,}8M+0{,}2)Q+1] \geq 1/\eta_{\rm aux}$, звідки $Q_{\min}\approx 6{,}8$.

10.4. $R = 10$ мкм, $c_s \sim 9\times10^{7}$ см/с, $\tau \sim 10$ пс.

10.5. D–T дає 17,6 МеВ, із них лише 20% у заряджених продуктах; D + ^{3}He $\to$ ^{4}He (3,6 МеВ) + p (14,7 МеВ) дає 18,3 МеВ, усе в заряджених частинках. Оптимальна температура для D–^{3}He значно вища ($\sim$ 50–100 кеВ проти 10–20 кеВ), а $\langle\sigma v\rangle$ там приблизно на порядок менше за D–T при 10–20 кеВ. Перевага: мало нейтронів (лише від побічних D–D-реакцій), отже менша активація конструкцій і можливість прямого перетворення енергії заряджених продуктів в електрику. Недоліки: потрібні вищі T і $nT\tau_E$, гальмівне випромінювання ($Z=2$) відносно більше, а ^{3}He на Землі майже немає.

10.6. $3{,}4\times10^{14}$ Дж/кг; якщо все тепло $P_{\rm th} = 2{,}5$ ГВт дає синтез, — $\approx$ 0,64 кг/добу (з урахуванням тепла бланкета, $M = 1{,}2$, — $\approx$ 0,55 кг/добу) проти $\approx 8{,}5$ тис. т вугілля на добу.

10.7. $dN_n/dt = P_f/(17{,}6\text{ МеВ}) \approx 1{,}8\times10^{20}$ с$^{-1}$; $\Delta E \approx 82{,}5\sqrt{15} \approx$ 320 кеВ.

Розділ 11. Низькотемпературна плазма та газовий розряд

11.1. $k_{iz} = C\bar{v}_e(\varepsilon_{iz}+2T_e)e^{-\varepsilon_{iz}/T_e}$; зростання приблизно в ≈ 6 разів (за апроксимацією з розд. 11.1 — у $\approx 6{,}5$ раза).

11.2. $(pd)_{\min} = e\ln(1+1/\gamma)/A \approx 0{,}84$ Торр·см, $V_{\min} = B(pd)_{\min} \approx 305$ В; при $pd = 76$ Торр·см $V_b \approx 4{,}6$ кВ.

11.3. $r_D \approx 0{,}13$ мм, $s \approx 3{,}2$ мм; кінцева швидкість іона $\approx 3{,}8 \times 10^6$ см/с, час прольоту $3s/v \approx 0{,}25$ мкс, тобто $\approx 3{,}4$ періоду поля.

11.4. $T_e \approx 2{,}8$ еВ, $n_0 \approx 1{,}5 \times 10^{11}$ см$^{-3}$; від потужності T_e не залежить, а зменшення тиску вдвічі підвищує її до $\approx 3{,}3$ еВ; густина зросте менш ніж удвічі, бо зростають u_B і $\mathcal{E}_T$ (A_{eff} вважаємо сталою).

11.5. $B = 2\pi f mc/e \approx 875$ Гс; $n_c \approx 7{,}4 \times 10^{10}$ см$^{-3}$; при $\omega < \omega_{ce}$ права хвиля є свистовою і не має відсічки за густиною.

11.6. $k_\perp \approx 1{,}5$ см$^{-1}$, $k_z \approx 0{,}31$ см$^{-1}$, $k \approx 1{,}6$ см$^{-1}$; $n \approx 1{,}4 \times 10^{13}$ см$^{-3}$.

11.7. $\rho_e \approx 0{,}15$ мм (замагнічені), $\rho_i \approx 7$ см (незамагнічені).

Розділ 12. Основні масштаби, режими та межі моделей

12.1. іоносфера: $\lambda_D \approx 0{,}7$ см, $a \approx 2 \times 10^{-2}$ см, $N_D \approx 2 \times 10^5$; корона: 0,7 см, 2×10^{-3} см, 2×10^8; токамак: 7×10^{-3} см, 2×10^{-5} см, 2×10^8; ядро Сонця: $\lambda_D \approx 2 \times 10^{-9}$ см $\sim a$, $N_D \approx 5$ — колективний опис найменш обґрунтований.

12.2. $n^{-1/3} \approx 2 \times 10^{-5}$ см $< r_{Le} \approx 4{,}8 \times 10^{-3}$ см $< \lambda_{De} \approx 7{,}4 \times 10^{-3}$ см $< r_{Li} \approx 0{,}29$ см; λ_{De} трохи більша за r_{Le}.

12.3. $\nu_{ei} \approx 1{,}4 \times 10^6$ с$^{-1}$, $\nu_{ei}/\omega_{pe} \approx 2{,}5 \times 10^{-5}$, $\lambda_{\text{пр}} \approx 1$ м; $\lambda_{\text{пр}}/\lambda_{De} \approx 4 \times 10^4$.

12.4. $\lambda_D \approx 1{,}3 \times 10^{-2}$ см, $\omega_{pe} \approx 5{,}6 \times 10^9$ с$^{-1}$ ($f \approx 0{,}9$ ГГц); обидва масштаби набагато менші за сантиметрові розміри й мікро-/мілісекундні часи розряду, тому плазма квазінейтральна.

12.5. (а) $\sim 10^5$ с, (б) $\sim 10^{-2}$ с. Жоден не збігається з $\tau_E \sim 1$ с: реальне перенесення аномальне (на п'ять порядків швидше за класичне), але на два порядки слабше за дифузію Бома, тому потрібна модель турбулентного перенесення.

12.6. $\Gamma \sim 1$ при $n \sim 3 \times 10^{29}$ см$^{-3}$, $T \sim E_F$ при $n \sim 10^{26}$ см$^{-3}$.

12.7. $Kn \approx 10^4$, $r_{Li}/L \approx 3 \times 10^{-3}$; обмеження показує Kn: поздовжнє перенесення беззіткнювальне, тиск анізотропний — потрібні гідродинаміка з анізотропним тиском або кінетичний опис поздовжнього перенесення.

Додатки

A. Таблиця позначень

Нижче зібрано позначення, що вживаються в розд. 1, 2, 6 і 4, у порядку їхнього введення. Усі формули подано в системі СГС (гаусовій), як у розд. 1; температури T (у тому числі T_e, T_i) записано в енергетичних одиницях, $k_B = 1$, а числові значення дають в електронвольтах: 1 еВ $\approx 1{,}16 \times 10^4$ К. Одиниці СГС потенціалу й поля відповідають 300 В і 300 В/см. Стовпець «Де» вказує параграф або формулу, де величину введено; символи, що мають кілька значень залежно від контексту, перелічено в кінці додатка.

Загальні сталі та позначення

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
e	елементарний заряд	$4{,}80 \times 10^{-10}$ СГСЕ	§ 1.4 (с. 35)
m_e, m_i, m_a, m	маса електрона, іона, атома; m — маса частинки (у формулі Саха — електрона)	г	§ 1.1 (с. 30)
k_B	стала Больцмана (далі $k_B = 1$)	ерг/К	§ 0.1 (с. 14)
$\hbar$, $h = 2\pi\hbar$	стала Планка	ерг·с	(1.1)
c	швидкість світла	см/с	(3.1)
Z	кратність іонізації: заряд іона Ze	—	(1.3)
n, n_e, n_i, n_n	концентрація (загальна), електронів, іонів, нейтральних частинок	см^{-3}	(1)
T, T_e, T_i, T_s	температура (в енергетичних одиницях): загальна, електронів, іонів, сорту s	еВ	§ 1.2 (с. 32)

Іонізація (формула Саха)

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
α	ступінь іонізації $n_i/(n_i+n_n)$	—	(1)
I	енергія іонізації атома (для водню 13,6 еВ)	еВ	(1.1)
g, g_e, g_i, g_a	статистичні ваги	—	§ 1.1 (с. 30)
μ	хімічний потенціал	еВ	§ 1.1 (с. 30)
λ_T, λ_{Te}	теплова довжина хвилі де Бройля $h/\sqrt{2\pi mT}$ (для електрона — λ_{Te})	см	§ 1.1 (с. 30)
n_q	квантова концентрація $\lambda_{Te}^{-3} = (mT/2\pi\hbar^2)^{3/2}$	см$^{-3}$	§ 1.1 (с. 30)
$\Delta E/E$	частка енергії, яку електрон передає іону при пружному зіткненні	—	§ 1.2 (с. 32)

Квазінейтральність і дебаївське екранування

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
ρ	густина заряду $\sum_s q_s n_s$	СГСЕ/см^3	(1.3)
$\mathbf{E}$, E	напруженість електричного поля	СГС (поле)	§ 1.3 (с. 33)
δn	локальне відхилення концентрації від середньої	см$^{-3}$	§ 1.3 (с. 33)
L	розмір плазми (характерний масштаб неоднорідності)	см	(1.10)
φ	електростатичний потенціал; $\varphi_0 = \varphi(0)$ — потенціал поверхні	СГС (потенціал)	§ 1.4 (с. 35)
q, q_s	пробний заряд; заряд частинки сорту s	СГСЕ	§ 1.4 (с. 35)
Q	густина потоку енергії на стінку (на відміну від заряду q)	ерг·см$^{-2}$·с$^{-1}$	§ 1.8 (с. 45)
L_{ps}	масштаб передшару (на відміну від розміру плазми L)	см	§ 1.8 (с. 45)
n_{s0}	незбурена концентрація сорту s	см$^{-3}$	§ 1.4 (с. 35)

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
λ_D, λ_{De}, λ_{Di}	дебаївська довжина (повна, електронна, іонна); $\lambda_D = \lambda_{De}/\sqrt{2}$ при $T_e = T_i$	см	(1.7), (1.9)
$\delta(\mathbf{r})$	дельта-функція (точковий заряд)	см$^{-3}$	(1.7)

Екранування у виродженому газі

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
E_F	енергія Фермі	еВ	(1.17)
λ_{TF}	довжина Томаса–Фермі	см	(1.17)
λ	довжина екранування в загальному випадку $[4\pi e^2 \partial n/\partial\mu]^{-1/2}$	см	(1.16)
a_B	борівський радіус $\hbar^2/me^2 = 0{,}53 \times 10^{-8}$ см	см	(1.17)

Колективність і зв'язаність

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
N_D	число електронів у дебаївській сфері $\frac{4\pi}{3} n_e \lambda_{De}^3$	—	(1.11)
a	середня відстань між частинками $n^{-1/3}$	см	§ 1.5 (с. 39)
U_C, U_T	енергія кулонівської взаємодії e^2/a та теплова енергія T	еВ	§ 1.6 (с. 42)
Γ	параметр зв'язку $e^2/(aT)$	—	(1.13)
p	тиск ідеального газу $\sum_s n_s T_s$	дин/см^2	§ 1.6 (с. 42)

Шар біля стінки та зонд Ленгмюра

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
σ	поверхнева густина заряду площини	СГСЕ/см^2	§ 1.8 (с. 45)
x, y	відстань від площини; $y = e\varphi/T$	см; —	§ 1.8 (с. 45)
c_s	іонно-звукова швидкість $\sqrt{T_e/m_i}$ при $T_i \ll T_e$ (загальна — розд. 6)	см/с	(1.19)
u, u_0	швидкість іонів у шарі; їхня швидкість на вході в шар (критерій Бома $u_0 \geq c_s$)	см/с	(1.19)
n_0, n_{sh}	концентрація в незбуреній плазмі; на межі шару ($n_{\text{sh}} \approx 0{,}6\, n_0$)	см$^{-3}$	§ 1.8 (с. 45)
χ	безрозмірний потенціал $-e\varphi/T_e$	—	§ 1.8 (с. 45)
Γ_i, Γ_e	потік іонів, електронів на стінку	см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$	§ 1.8 (с. 45)
$\bar{v}_e$, v_{Te}, v_{Ti}	середня швидкість електрона $\sqrt{8T_e/\pi m_e}$; теплові швидкості електронів і іонів	см/с	§ 1.8 (с. 45)
φ_f	плаваючий потенціал відносно плазми, $\varphi_f = V_f - V_p < 0$	СГС (потенціал)	(1.20)
V, V_f, V_p	потенціал зонда відносно опорного електрода; плаваючий потенціал; потенціал плазми	В	§ 1.8 (с. 45)
I	струм на зонд (не плутати з енергією іонізації I)	мА	§ 1.8 (с. 45)
I_{is}, I_{es}, I_e	струми іонного та електронного насичення; електронний струм	мА	§ 1.8 (с. 45)
S, r_p	площа зонда; його характерний розмір	см^2; см	§ 1.8 (с. 45)
V_1, V_2, I_{e1}, I_{e2}	потенціали й електронні струми двох електродів подвійного зонда	В; мА	(1.21)
λ_{fp}	довжина вільного пробігу (відстань між зіткненнями)	см	§ 1.8 (с. 45)
$\mathbf{B}$, B	індукція магнітного поля	Гс	(3.1)
$v_\perp$	складова швидкості поперек $\mathbf{B}$	см/с	(3.1)

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
r_{Le}	ларморівський радіус електрона $m_e c v_\perp / eB$ (розд. 3)	см	(3.1)

Хвилі в плазмі (розд. 2)

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
ω_{pe}, ω_p	електронна плазмова частота $\sqrt{4\pi n_e e^2/m_e}$; далі $\omega_p \equiv \omega_{pe}$	с^{-1}	(1.5)
ε	діелектрична проникність $1 - \omega_p^2/\omega^2$	—	(2.1)
N	показник заломлення $\sqrt{\varepsilon}$ (літеру n зарезервовано для концентрації)	—	§2.1 (с. 57)
v_φ, v_g	фазова ω/k та групова $d\omega/dk$ швидкості	см/с	§2.1 (с. 57)
$n_{\text{кр}}$	критична концентрація $m_e\omega^2/4\pi e^2$, при якій $\omega = \omega_p$	см^{-3}	(2.7)
ν	ефективна частота зіткнень електрона (ν_{ei})	с^{-1}	(2.6)
δ	товщина скін-шару, глибина проникнення $1/\varkappa$	см	§2.1 (с. 57)

Хвилі в замагніченій плазмі (розд. 6)

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
$\mathbf{B}_0$, θ	рівноважне поле (вздовж осі z); кут між $\mathbf{k}$ і $\mathbf{B}_0$	Гс; рад	(6.7)
ρ_m, ρ_0, $\delta\rho$	масова густина, її рівноважне значення й збурення (не плутати з густиною заряду ρ)	$\text{г}/\text{см}^3$	(6.2)
p_e, p_i, β	тиск електронів, іонів; $\beta = 8\pi p/B^2$	$\text{дин}/\text{см}^2$; —	розд. 5

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
γ, γ_e, γ_i	показник адіабати: спільний; електронів ($\gamma_e = 1$, ізотермічні); іонів ($\gamma_i = 3$, одновимірне стискання)	—	§6.2 (с. 128)
c_s	швидкість звуку $\sqrt{\gamma(p_e + p_i)/\rho_m}$; для іонного звуку $\sqrt{(ZT_e + 3T_i)/m_i}$	см/с	(6.3), (6.4)
v_A, $\mathbf{v}_A$	альвенівська швидкість $B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$ (вектор вздовж $\mathbf{B}_0$)	см/с	(6.9)
$v_\pm$	фазові швидкості швидкої (+) і повільної (−) магнітозвукових мод	см/с	(6.10)
ν_m	магнітна в'язкість $c^2/4\pi\sigma$ (коефіцієнт дифузії поля)	см^2/с	§6.3 (с. 130)
ω_{ce}, ω_{ci}, Ω_s	циклотронні частоти електрона eB_0/m_ec та іона ZeB_0/m_ic; $\Omega_s = q_sB_0/m_sc$ зі знаком	с$^{-1}$	§6.7 (с. 135)
ω_{ps}	плазмова частота сорту s (ω_{pe}, ω_{pi})	с$^{-1}$	(6.13)
$\hat{\varepsilon}$; S, D, P, R, L	тензор діелектричної проникності та його елементи (позначення Стікса)	—	(6.12), (6.13)
ω_R, ω_L	частоти відсікання R- і L-хвиль вздовж поля	с$^{-1}$	§6.7 (с. 135)
ω_{UH}, ω_{LH}	верхній і нижній гібридні резонанси	с$^{-1}$	(6.15)
ψ	кут обертання Фарадея	рад	(6.16)

Рідинний опис і МГД (розд. 5)

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
σ	електропровідність плазми (не плутати з поверхневою густиною заряду)	с$^{-1}$	розд. 5
ρ_q	густина нескомпенсованого заряду, $\rho_q = \nabla\cdot\mathbf{E}/4\pi$ (у квазінейтральній плазмі мала)	СГСЕ/см^3	розд. 5

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
$\mathbf{R}_{ei} = -\mathbf{R}_{ie}$	сила тертя між електронами й іонами (передача імпульсу при зіткненнях)	дин/см^3	розд. 5
T_{ij}	максвеллівський тензор напружень магнітного поля $(B_iB_j - \frac{1}{2}B^2\delta_{ij})/4\pi$	дин/см^2	розд. 5
R_m, τ_d	магнітне число Рейнольдса $4\pi\sigma L v/c^2$ і час дифузії поля $4\pi\sigma L^2/c^2$	—; с	розд. 5
M_A	число Альвена v/v_A	—	розд. 5
$\mathbf{v}_*$, L_p	діамагнітна швидкість іонів $v_{*i} = cT_i/(eBL_p)$ і характерна довжина профілю тиску $L_p = \lvert p/p' \rvert$	см/с; см	розд. 5
$\mathcal{V}$	ЕРС у котушці або поясі Роговського	СГСЕ	розд. 5
η	питомий опір плазми $1/\sigma$ (не в’язкість)	с	розд. 5
R_c	радіус кривизни силової лінії; сила натягу $B^2/4\pi R_c$ на одиницю об’єму	см	розд. 5
$\gamma_\perp$	ефективний показник адіабати при стисканні поперек $\mathbf{B}$ (= 2)	—	розд. 5
n_c	кількість витків на одиницю довжини пояса Роговського	см$^{-1}$	розд. 5

Зіткнення, провідність і перенос (розд. 4)

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
$\sigma_{\text{зіт}}$	переріз зіткнення в газі (літеру σ без індексу зарезервовано для провідності)	см^2	розд. 4
v_T, τ, ℓ	теплова швидкість; час між зіткненнями $\tau = 1/(n v_T \sigma_{\text{зіт}})$; довжина вільного пробігу $\ell = v_T\tau$	см/с; с; см	розд. 4

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
D, η, κ	коефіцієнти дифузії, в'язкості й теплопровідності в газі (за порядком величини $D \sim v_T^2\tau$, $\eta \sim nT\tau$, $\kappa \sim nT\tau/m$)	см^2/с; — ; —	розд. 4
b, b_{90}	прицільна відстань; $b_{90} = e^2/m_e v^2 \sim e^2/T$ — відстань, при якій електрон відхиляється на $\sim \pi/2$	см	рис. 4.2
θ	кут розсіяння на одному іоні, $\operatorname{tg}(\theta/2) = b_{90}/b$	рад	рис. 4.2
$\ln\Lambda$	кулонівський логарифм $\ln(\lambda_D/b_{90}) \sim \ln N_D$	—	табл. 4.1
ν_{ei}, ν_{ee}, ν_{ii}	частоти електрон-іонних, електрон-електронних, іон-іонних зіткнень; $\nu \equiv \nu_{ei} = 1/\tau_e$	с$^{-1}$	(4.1)
τ_e	час між електрон-іонними зіткненнями $1/\nu_{ei}$	с	(4.1)
$\lambda_{\text{пр}}$	довжина вільного пробігу v_T/ν (= ℓ; у розд. 1 її позначено λ_{fp})	см	(4.2)
ν_{en}, σ_{en}	частота й переріз зіткнень електрона з нейтральним атомом, $\nu_{en} = n_n\sigma_{en}v_{Te}$	с$^{-1}$; см^2	розд. 4
σ_0, $\sigma(\omega)$	провідність у сталому полі $n_e e^2/m_e\nu$; частотна провідність $\sigma_0/(1 - i\omega/\nu)$	с$^{-1}$	(4.3)
$\sigma_\parallel$, $\sigma_\perp$	провідність вздовж і поперек $\mathbf{B}$ (за Спітцером $\sigma_\parallel \approx 1{,}96\, n_e e^2/m_e\nu_{ei} \propto T_e^{3/2}/\ln\Lambda$)	с$^{-1}$	(4.5)
$\eta_\parallel$, $\eta_\perp$	питомий опір вздовж і поперек $\mathbf{B}$ ($\eta_\perp \approx 2\eta_\parallel$ у повністю іонізованій плазмі)	с	розд. 4
Z_{eff}	ефективний заряд іонів (збільшує опір)	—	§ 4.5 (с. 96)
$\mathbf{j}$, q	густина струму; питома потужність джоулевих втрат $\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sigma E_0^2$	СГСЕ/(см^2·с); ерг/(см^3·с)	(4.3)
E_D, v_c	поле Драйсера $4\pi e^3 n\ln\Lambda/T_e$; критична швидкість втікання $v_{Te}\sqrt{E_D/E}$	СГС (поле); см/с	(4.6)

Символ	Значення	Одиниця (СГС)	Де
$\varkappa_e$, $\varkappa_\parallel$, $\varkappa_\perp$	теплопровідність електронів; вздовж і поперек **B**, $\varkappa_\perp \sim \varkappa_\parallel(\nu/\omega_c)^2$	$\text{см}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$ (T в енергетичних одиницях)	розд. 4
D_s, μ_s	коефіцієнт дифузії й рухливість сорту s, $D_s = \mu_s T_s/e$ (співвідношення Ейнштейна)	$\text{см}^2/\text{с}$; СГС (рухливість)	§ 4.4 (с. 95)
D_a	амбіполярний коефіцієнт дифузії $\approx D_i(1 + T_e/T_i)$	$\text{см}^2/\text{с}$	(4.7)
$D_\perp$, $D_\parallel$, $D_{a\perp}$	коефіцієнти дифузії поперек і вздовж **B**, $D_\perp \sim r_L^2\nu$; амбіполярний поперек **B**	$\text{см}^2/\text{с}$	§ 4.4 (с. 95)
D_B	бомівська дифузія $cT/16eB$	$\text{см}^2/\text{с}$	§ 4.4 (с. 95)
M, λ_0, $\Delta\lambda$	маса іона; довжина хвилі лінії; повна ширина лінії на половині висоти (допплерівська $\Delta\lambda/\lambda_0 = \sqrt{8\ln 2\, T_i/Mc^2}$)	г; нм; нм	(4.9)

Символи з кількома значеннями. У розд. 1, 6 і 4 деякі літери означають різні величини; значення визначається контекстом та індексами.

- I — енергія іонізації (§ 1.1) і струм на зонд (§ 1.8);
- Γ — параметр зв'язку (1.13) ; з індексом виду (Γ_i, Γ_e) — потік частинок (на стінку, при дифузії);
- n_s — концентрація сорту s (§ 1.4 (с. 35)); концентрацію на межі шару позначено n_{sh};
- a — середня відстань між частинками (розмір зонда позначено r_p);
- ρ — густина заряду; ларморівський радіус позначено r_L (r_{Le} для електрона), а не ρ;
- u — швидкість іонів у шарі; допоміжна змінна $u = r\varphi$ у § 1.4 (с. 35) вживається лише в одному виведенні;
- λ без індексу — довжина екранування в загальному випадку (1.16), λ_D — дебаївська;
- E — напруженість електричного поля, E_F — енергія Фермі;
- N — показник заломлення (розд. 2); у розд. 1 N_D — число частинок у дебаївській сфері, а n — завжди концентрація;
- δ — товщина скін-шару (розд. 2) і дельта-функція $\delta(\mathbf{r})$;
- S — площа зонда (розд. 1) і елемент тензора Стікса (розд. 6);
- λ — довжина екранування (розд. 1) і довжина хвилі в обертанні Фарадея (розд. 6);

- c_s — $\sqrt{T_e/m_i}$ у розд. 1 (межа $T_i \ll T_e$) і загальна швидкість звуку в розд. 6;
- ρ_m — масова густина (розд. 6), на відміну від густини заряду ρ;
- σ без індексу — провідність (розд. 5, 4) і поверхнева густина заряду (§ 1.8); переріз зіткнення позначено $\sigma_{\text{зіт}}$, σ_{en};
- η — питомий опір $1/\sigma$ (розд. 5, 4); у вступі розд. 4 за порядком величини $\eta \sim nT\tau$ — в'язкість газу;
- θ — кут між $\mathbf{k}$ і $\mathbf{B}_0$ (розд. 6) і кут розсіяння на іоні (розд. 4);
- μ — хімічний потенціал (§ 1.1) і рухливість μ_s (розд. 4);
- q — пробний заряд (розд. 1) і питома потужність джоулевих втрат (розд. 4);
- ν без індексу — частота зіткнень електрона з іонами ν_{ei}; магнітну в'язкість позначено ν_m.

Б. Перехід між СГС і СІ. Константи

У цьому посібнику використано гауссову систему (СГС), а значна частина сучасної навчальної й прикладної літератури, зокрема з термоядерних установок, спирається на СІ. Перехід між системами — це не просте масштабування, а зміна вигляду рівнянь: у СІ з'являються сталі ε_0 і μ_0, а в гауссовій системі їх нема, і відповідні коефіцієнти стоять у формулах як множники 4π та c. Тому формули з СГС не можна просто «перекласти» заміною символів. Нижче наведено числові коефіцієнти переведення одиниць, вигляд основних формул плазми в обох системах і найважливіші константи.

Числові коефіцієнти переведення. Остання колонка таблиці Б.1 дає, у скільки разів числове значення величини в СГС більше, ніж у СІ: наприклад, 1 Тл $= 10^4$ Гс, 1 Дж $= 10^7$ ерг. Швидкість світла в цих коефіцієнтах округлено до 3×10^{10} см/с.

Таблиця Б.1. Числові коефіцієнти переведення між СІ та СГС

Величина	Система СІ	Система СГС	СГС/СІ
Основні та механічні одиниці			
Довжина	метр, м	сантиметр, см	10^2
Маса	кілограм, кг	грам, г	10^3
Час	секунда, с	секунда, с	1

Продовження на наступній сторінці

Таблиця Б.1. Числові коефіцієнти переведення між СІ та СГС (Продовження)

Величина	**Система СІ**	**Система СГС**	**СГС/СІ**
Сила	ньютон, Н	дина	10^5
Робота, енергія	джоуль, Дж	ерг	10^7
Тиск	паскаль, Па	дин/см^2	10
Електричні одиниці			
Електричний заряд	кулон, Кл	франклін, Фр (СГСЕ)	3×10^9
Густина заряду	Кл/м^3	Фр/см^3	3×10^3
Сила струму	ампер, А	Фр/с (статампер)	3×10^9
Густина струму	А/м^2	Фр/(с·см^2)	3×10^5
Дипольний момент	Кл·м	Фр·см	3×10^{11}
Напруга, потенціал	вольт, В	статвольт, статВ	$\frac{1}{3} \times 10^{-2}$
Напруженість поля **E**	В/м	статВ/см	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$
Індукція поля **D**	Кл/м^2	Фр/см^2	$12\pi \times 10^5$
Опір	ом, Ом	с/см	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$
Ємність	фарад, Ф	см	9×10^{11}
Магнітні одиниці			
Напруженість поля **H**	А/м	ерстед, Е	$4\pi \times 10^{-3}$
Магнітна індукція **B**	тесла, Тл	гаус, Гс	10^4
Магнітний момент	А·м^2	ерг/Гс	10^3
Магнітний потік	вебер, Вб	максвел, Мкс	10^8
Індуктивність	генрі, Гн	см	10^9

Основні формули фізики плазми в СГС і СІ. Таблиця Б.2 показує, як виглядають формули цього посібника в обох системах. Температура скрізь в енергетичних одиницях; заряд іона для простоти $Ze = e$.

Таблиця Б.2. Основні формули фізики плазми в гауссовій системі та в СІ

Величина	**СГС**	**СІ**
Сила Лоренца	$q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c\right)$	$q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$
Плазмова частота ω_{pe}^2	$\dfrac{4\pi ne^2}{m_e}$	$\dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}$
Дебаївська довжина λ_{De}^2	$\dfrac{T_e}{4\pi ne^2}$	$\dfrac{\varepsilon_0 T_e}{ne^2}$
Циклотронна частота ω_c	$\dfrac{eB}{mc}$	$\dfrac{eB}{m}$
Ларморівський радіус r_L	$\dfrac{mv_\perp c}{eB}$	$\dfrac{mv_\perp}{eB}$
Критична концентрація $n_{\text{кр}}$	$\dfrac{m_e\omega^2}{4\pi e^2}$	$\dfrac{\varepsilon_0 m_e\omega^2}{e^2}$
Енергія взаємодії пари на відстані r	$\dfrac{e^2}{r}$	$\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$
Радіус розсіяння на 90° b_{90}	$\dfrac{e^2}{m_e v^2}$	$\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v^2}$
Частота зіткнень ν_{ei}	$\dfrac{4\sqrt{2\pi}}{3}\dfrac{ne^4\ln\Lambda}{m_e^{1/2}T_e^{3/2}}$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{12\pi^2}\dfrac{ne^4\ln\Lambda}{\varepsilon_0^2 m_e^{1/2}T_e^{3/2}}$
Поле Драйсера E_D	$\dfrac{4\pi e^3 n\ln\Lambda}{T_e}$	$\dfrac{e^3 n\ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_0^2 T_e}$
Магнітний тиск	$\dfrac{B^2}{8\pi}$	$\dfrac{B^2}{2\mu_0}$
Параметр β	$\dfrac{8\pi p}{B^2}$	$\dfrac{2\mu_0 p}{B^2}$
Альвенівська швидкість v_A	$\dfrac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}$	$\dfrac{B}{\sqrt{\mu_0\rho}}$
Магнітне число Рейнольдса R_m	$\dfrac{4\pi\sigma L v}{c^2}$	$\mu_0\sigma L v$
Коефіцієнт дифузії поля	$\dfrac{c^2}{4\pi\sigma}$	$\dfrac{1}{\mu_0\sigma}$

Безрозмірні комбінації (β, R_m, N_D, Γ, відношення частот) в обох системах однакові — різняться лише записи через розмірні величини. Тому порівняння з літературою зручно починати саме з безрозмірних параметрів.

Фізичні константи. Значення найуживаніших констант у гауссовій системі зібрано в таблиці Б.3 (за рекомендаціями CODATA).

Таблиця Б.3. Деякі фізичні константи

Константа	**Символ**	**Значення**
Фундаментальні сталі		
Швидкість світла у вакуумі	c	$2{,}997\,924\,58 \times 10^{10}$ см/с
Гравітаційна стала	G	$6{,}674 \times 10^{-8}$ см^3/(г·с^2)
Стала Планка	$\hbar$	$1{,}054\,572 \times 10^{-27}$ ерг·с
Елементарний заряд	e	$4{,}803\,204 \times 10^{-10}$ Фр
Елементарні частинки		
Маса електрона	m_e	$9{,}109\,384 \times 10^{-28}$ г
Енергія спокою електрона	$m_e c^2$	0,511 МеВ
Маса протона	m_p	$1{,}672\,622 \times 10^{-24}$ г
Енергія спокою протона	$m_p c^2$	938,27 МеВ
Відношення мас	m_p/m_e	1836,15
Атомні й термодинамічні сталі		
Борівський радіус	a_0	$5{,}291\,772 \times 10^{-9}$ см
Магнетон Бора	μ_B	$9{,}274\,010 \times 10^{-21}$ ерг/Гс
Стала Больцмана	k_B	$1{,}380\,649 \times 10^{-16}$ ерг/К; $8{,}617\,333 \times 10^{-5}$ еВ/К
Універсальна газова стала	R	$8{,}314 \times 10^7$ ерг/(К·моль)
Число Авогадро	N_A	$6{,}022 \times 10^{23}$ моль$^{-1}$
Атомна одиниця маси	u	$1{,}660\,539 \times 10^{-24}$ г

Енергетичні еквіваленти. Електронвольт — основна енергетична одиниця фізики плазми, тому корисно мати під рукою його еквіваленти (таблиця Б.4).

Таблиця Б.4. Еквіваленти електронвольта

Величина	**1 еВ відповідає**	**Обернено**
Енергія	$1{,}602 \times 10^{-12}$ ерг $= 1{,}602 \times 10^{-19}$ Дж	1 ерг $= 6{,}242 \times 10^{11}$ еВ
Температура	11 605 К	1 К $= 8{,}617 \times 10^{-5}$ еВ

Продовження на наступній сторінці

Таблиця Б.4. Еквіваленти електронвольта (Продовження)

Величина	1 **еВ відповідає**	**Обернено**
Частота	$2{,}418 \times 10^{14}$ Гц	1 Гц = $4{,}136 \times 10^{-15}$ еВ
Довжина хвилі фотона	1,240 мкм	1 мкм ↔ 1,240 еВ
Маса	1 еВ/c^2 = $1{,}783 \times 10^{-33}$ г	1 г = $5{,}610 \times 10^{32}$ еВ/c^2

В. Шпаргалка: ключові масштаби

Практичні формули в СГС для плазми з концентрацією n (см$^{-3}$), температурою T (еВ) і полем B (Гс); $\mu = m_i/m_p$ (для дейтерію $\mu = 2$). Останній стовпець — значення для токамака: $n = 10^{14}$ см$^{-3}$, $T_e = T_i = 10$ кеВ, $B = 5$ Тл, дейтерій, $\ln\Lambda = 17$. Докладніше про кожну величину — у розд. 12, табл. 12.2; перехід до СІ — у додатку Б.

Величина	Практична формула	Токамак
Плазмова частота електронів ω_{pe}	$5{,}64\times10^{4}\sqrt{n}$ с$^{-1}$	$5{,}6\times10^{11}$ с$^{-1}$
Дебаївська довжина λ_{De}	$743\sqrt{T_e/n}$ см	74 мкм
Число частинок у дебаївській сфері N_D	$1{,}72\times10^{9}\,T_e^{3/2}/\sqrt{n}$	$1{,}7\times10^{8}$
Електронна циклотронна частота ω_{ce}	$1{,}76\times10^{7}\,B$ с$^{-1}$	$8{,}8\times10^{11}$ с$^{-1}$
Ларморівський радіус електрона r_{Le}	$2{,}38\sqrt{T_e}/B$ см	48 мкм
Ларморівський радіус іона r_{Li}	$102\sqrt{\mu T_i}/B$ см	0,29 см
Теплова швидкість електронів v_{Te}	$4{,}19\times10^{7}\sqrt{T_e}$ см/с	$4{,}2\times10^{9}$ см/с
Іонно-звукова швидкість c_s	$9{,}79\times10^{5}\sqrt{T_e/\mu}$ см/с	$6{,}9\times10^{7}$ см/с
Альвенівська швидкість v_A	$2{,}18\times10^{11}\,B/\sqrt{\mu n}$ см/с	$7{,}7\times10^{8}$ см/с
Частота зіткнень електронів ν_{ei}	$2{,}91\times10^{-6}\,n\ln\Lambda\,T_e^{-3/2}$ с$^{-1}$	$4{,}9\times10^{3}$ с$^{-1}$
Параметр $\beta = 8\pi p/B^2$ ($T_e = T_i$, T в еВ)	$8{,}05\times10^{-11}\,nT/B^2$	3,2 %
Час дифузії поля $\tau_d = 4\pi\sigma L^2/c^2$ (L в см)	$2{,}7\times10^{-6}\,T_e^{3/2}L^2/\ln\Lambda$ с	$1{,}6\times10^{3}$ с ($T_e = 10$ кеВ, $L = 1$ м)

Чотири питання до будь-якої задачі: який просторовий масштаб? який часовий? які процеси встигають відбутися? яка модель (кінетика, МГД, окремі частинки) справедлива на цих масштабах? Порівняйте L з λ_{De}, r_L, $\lambda_{\text{пробігу}}$, а ω — з ω_p, ω_c, ν.

Словник термінів

Нижче зібрано терміни фізики плазми, які вживаються в книзі і не є звичними із загальної фізики. Кожен термін коротко пояснено й вказано місце, де його означено докладно; нових означень тут нема. Терміни розташовано за абеткою.

А

- **Адіабатичне стискання** — стискання, настільки швидке, що за період коливання електрон не встигає вилетіти з області стискання, $kv_{Te} \ll \omega$ (§ 2.3 (с. 61)).
- **Адіабатичний інваріант** — величина, що майже не змінюється, коли параметри системи міняються повільно порівняно з періодом руху; для гірації це магнітний момент μ, для відбиття між дзеркалами — подовжній інваріант J (розд. 3; § 3.6 (с. 82)).
- **Альвенівська хвиля** — поперечна хвиля вздовж силових ліній, яку відновлює їхній натяг: $\omega = k_\parallel v_A$, $v_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$; енергія йде лише вздовж $\mathbf{B}_0$, густина не змінюється (§ 6.4 (с. 132)).

Б

- **Бананова орбіта** — траєкторія захопленої частинки в токамаку в полоїдальній проєкції; радіальна ширина $\Delta_b \sim q\,r_L/\sqrt{\varepsilon}$ (§ 9.8 (с. 189)).
- **Беззіткнювальна плазма** — плазма, у якій для даного процесу зіткненнями можна знехтувати: за час процесу (період хвилі $2\pi/\omega$) частинка майже не встигає зіткнутися, $\nu \ll \omega$, або довжина вільного пробігу набагато більша за розмір системи чи довжину хвилі. Це властивість *процесу*, а не плазми загалом (розд. 4). Тоді рівновага не підтримується зіткненнями, тому рідинний опис з одним γ та максвеллівський розподіл можуть не годитись: потрібна кінетика (наприклад, загасання Ландау).
- **Безсилове поле** — поле з $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$, тому $\mathbf{j}\times\mathbf{B} = 0$; рівновага за $\beta \ll 1$ вимагає саме такого поля (розд. 5, с. 100).
- **Бета плазми** β — відношення газокінетичного тиску до магнітного, $\beta = 8\pi p/B^2$; не є критерієм застосовності МГД, а показує, наскільки плазма деформує поле (§ 5.6 (с. 108)).
- **Бома–Гросса співвідношення** — закон дисперсії ленгмюрівських хвиль із тепловою поправкою, $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2v_{Te}^2$ (§ 2.3 (с. 61)).

В

- **Вироджений газ** — газ, у якому температура нижча за енергію Фермі, $T \lesssim E_F$, і розподіл частинок визначає квантова статистика (§ 1.7 (с. 45)).
- **Вістлер (свистяча хвиля)** — низькочастотна гілка R-хвилі вздовж поля, $\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}$, з дисперсією $\omega \propto k^2$: високі частоти біжать швидше («свист» після блискавки) (§ 6.7 (с. 135)).
- **Власова рівняння** — кінетичне рівняння беззіткнювальної плазми для функції розподілу $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ із самоузгодженими полями (розд. 7).
- **Вмороженість поля** — властивість ідеально провідної плазми: магнітний потік крізь контур, що рухається разом із нею, зберігається (теорема Альвена); порушується скінченною провідністю та в тонких струмових шарах (розд. 5, с. 100).

Г

- **Гамова фактор** — ймовірність тунелювання ядра крізь кулонівський бар'єр, що експоненційно зростає з енергією; разом із максвеллівським «хвостом» дає пік Гамова, який і задає температуру синтезу (§ 10.2 (с. 195)).
- **Гаряча, тепла й холодна плазма** — назви *моделей*, що показують, наскільки істотний тепловий рух частинок для даного процесу, а не просто значення T. У *холодній* плазмі тепловим рухом нехтують ($kv_T \ll \omega$); тоді $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ (§ 2.1 (с. 57)). У *теплій* його враховують як малу поправку, наприклад $3k^2v_{Te}^2$ у співвідношенні Бома–Гросса (§ 2.3 (с. 61)). У *гарячій* він істотний, і потрібен кінетичний опис (загасання Ландау). У побуті «гаряча плазма» часто означає просто високотемпературну.
- **Гідродинамічний опис** — опис електронів як суцільного середовища з густиною, швидкістю й тиском, без стеження за окремими частинками (§ 2.3 (с. 61)).
- **Гілка дисперсійного рівняння** — окремий розв'язок $\omega(k)$ рівняння $D(\omega, k) = 0$ зі своєю поляризацією: у незамагніченій плазмі поздовжня (ленгмюрівська) і поперечна (§ 2.2 (с. 59)).
- **Гірація** — обертання зарядженої частинки по колу навколо силової лінії магнітного поля з циклотронною частотою $\omega_c = |q|B/mc$ і ларморівським радіусом $r_L = v_\perp/\omega_c$ (розд. 3, с. 72).
- **Гіротрон** — потужний генератор НВЧ на електронах, що обертаються в сильному магнітному полі на циклотронній частоті; джерело 140 ГГц для ЕЦР-нагріву (ECRH) в токамаках (§ 6.7 (с. 135)).

Д

- **Двопотокова нестійкість** — нестійкість двох потоків заряджених частинок (наприклад пучка в плазмі): коливання зростають,

бо пучок віддає їм кінетичну енергію (§ 8.10 (с. 173)).

- **Дебаївська довжина** λ_D — відстань, на якій екранований поле заряду спадає в e разів; масштаб екранування (§ 1.4 (с. 35)). Дорівнює відстані, яку електрон із тепловою швидкістю проходить за час ω_{pe}^{-1} (§ 1.3 (с. 34)).
- **Дебаївська сфера** — область радіуса λ_{De} навколо частинки; число частинок у ній N_D вимірює колективність (§ 1.5 (с. 39)).
- **Дебаївське екранування** — перебудова плазми навколо заряду, внаслідок якої його поле експоненціально спадає на відстанях $\gtrsim \lambda_D$ (§ 1.4 (с. 35)).
- **Динамо** — самопідсилення магнітного поля рухом електропровідного середовища без зовнішнього джерела; діє, коли розтягування силових ліній течією переважає дифузію поля ($R_m \gg 1$) (§ 5.9 (с. 114)).
- **Діамагнетизм плазми** — послаблення магнітного поля всередині плазми діамагнітним струмом $j_\theta = c\,p'/B$, що виникає через градієнт тиску й гірацію частинок, хоча їхні ведучі центри нерухомі (§ 5.8 (с. 111)).
- **Діамагнітна петля** — виток, що охоплює шнур; інтеграл його сигналу вимірює зміну потоку, а отже енергію плазми (§ 5.12 (с. 122)).
- **Діамагнітний дрейф** — рух рідини поперек $\mathbf{B}$ через градієнт тиску, $\mathbf{v}_* = c\,\mathbf{B}\times\nabla p/(qnB^2)$; протилежний для іонів і електронів, хоча ведучі центри нерухомі (розд. 5, с. 100).
- **Діелектрична проникність плазми** ε — коефіцієнт у зв'язку $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$; для холодної плазми $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ (§ 2.1 (с. 57)).
- **Дрейф** — повільний рух центра гірації поперек $\mathbf{B}$ під дією сили $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}_d = c\,\mathbf{F}\times\mathbf{B}/(qB^2)$; електричний $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$-дрейф не залежить від заряду й маси, а градієнтний і дрейф кривини розводять іони й електрони (розд. 3).
- **Дрейфові хвилі** — повільні хвилі в замагніченій плазмі з градієнтом густини, $\omega_* = k_y v_*$, $v_* = cT_e/(eBL_n)$; їхня турбулентність зумовлює аномальний перенос (§ 8.13 (с. 176)).
- **Дрижання плазми** — слабкі випадкові коливання густини заряду на власних частотах у плазмі, залишеній саму по собі; їх збуджує тепловий рух частинок (§ 2.3 (с. 61)). Це образ, а не стандартний термін; строго — теплові флуктуації.

Е

- **Енергетичний принцип** — критерій стійкості рівноваги за знаком зміни потенціальної енергії δW при допустимих зсувах: рівновага стійка, якщо $\delta W > 0$ для всіх зсувів (§ 8.12 (с. 175)).

Ж

- **Жолобкова нестійкість** — нестійкість, за якої силові трубки

міняються місцями без згинання ліній; розвивається там, де градієнт тиску й кривина силових ліній спрямовані однаково («погана кривина») (§ 8.9 (с. 171)).

З

- **Загасання Ландау** — передача енергії хвилі електронам із швидкістю, близькою до фазової, без зіткнень (§ 2.3 (с. 61); докладно — розд. 7.8).
- **Закон дисперсії** — зв'язок частоти хвилі з хвильовим числом, $\omega(k)$ (§ 2.2 (с. 59)).
- **Замагнічена плазма** — плазма, у якій частинка встигає зробити багато обертів між зіткненнями, $\omega_c \gg \nu$, а ларморівський радіус малий порівняно з розміром неоднорідності поля, $r_L \ll L$; рух поперек поля тоді пригнічений (розд. 3). У *незамагніченій* плазмі магнітним полем можна знехтувати.
- **Замикання системи рівнянь** — додаткові рівняння (стану, закон Ома), що обривають ланцюжок рівнянь для ρ, $\mathbf{v}$, p і роблять систему замкненою (розд. 5, с. 100).
- **Запалювання** — режим, коли нагрівання α-частинками синтезу покриває втрати енергії, $P_\alpha \geq P_L$; тоді реакція самопідтримна (розд. 10).
- **Запас стійкості** q — число тороїдальних обходів силової лінії за один полоїдальний, $q = rB_\varphi/(RB_\theta)$; шир $s = (r/q)\,dq/dr$ стабілізує збурення (§ 9.7 (с. 188)).
- **Захоплена частинка** — частинка в токамаку, що відбивається від зони сильного поля й не обходить усю магнітну поверхню; частка таких частинок $\sim \sqrt{\varepsilon}$ (§ 9.8 (с. 189)).
- **Збурення** — будь-що, що виводить плазму з рівноваги: зовнішнє (антена, пучок, хвиля) або власне (тепловий рух частинок) (§ 1.3 (с. 34)).
- **Зонд Ленгмюра** — малий електрод у плазмі; за вольт-амперною характеристикою знаходять T_e, V_p і n (§ 1.8 (с. 45)).
- **Зсув Шафранова** — зсув магнітних поверхонь плазмового тора до зовнішньої стінки, $\Delta \sim (a^2/R)(\beta_p + l_i/2)$ (§ 9.9 (с. 191)).

І

- **Ідеальна МГД** — МГД з нехтовним опором, у якій $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c = 0$ і поле вморожене в плазму (розд. 5, с. 100).
- **Ідеальна плазма (слабкозв'язана)** — плазма з $\Gamma \ll 1$ (еквівалентно $N_D \gg 1$), де кулонівська енергія сусідів мала порівняно з тепловою (§ 1.6 (с. 42)). Не означає відсутності колективних ефектів.
- **Інерційне утримання** — утримання плазми її власною інерцією за час розльоту $\sim R/c_s$ без магнітного поля; основа лазерного

синтезу (розд. 10).

- **Інкремент** γ — уявна частина частоти, $\omega = \omega_r + i\gamma$: швидкість експоненційного зростання амплітуди збурення при $\gamma > 0$ (розд. 8).
- **Іонно-звукова хвиля** — звук у беззіткнювальній плазмі: електрони ізотермічні, іони дають інерцію, $\omega^2 = k^2 c_s^2/(1 + k^2\lambda_{De}^2)$; існує за $T_e \gg T_i$ (§ 6.2 (с. 128)).

К

- **Квазінейтральність** — рівність сумарних зарядів електронів та іонів на масштабах $\gg \lambda_D$; локальні відхилення можливі (§ 1.3 (с. 33)).
- **Кінк-нестійкість** — гвинтове згинання шнура зі струмом; обмежує струм токамака умовою $q(a) > 1$ (критерій Крускала–Шафранова) (§ 9.6 (с. 186)).
- **Колективність** — властивість плазми, коли поле створюють і відчувають одночасно багато частинок; умова $N_D \gg 1$ (§ 1.5 (с. 39)).
- **Критерій Бома** — умова входу іонів у шар біля стінки: $u_0 \geq c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ (§ 1.8 (с. 45)).
- **Критична концентрація** $n_{\text{кр}}$ — концентрація, при якій плазмова частота дорівнює частоті хвилі, $\omega = \omega_p$ (§ 2.5 (с. 64)).

Л

- **Ларморівський радіус** $r_L = v_\perp/\omega_c$ — радіус кола, яким частинка обертається навколо силової лінії; його мала величина порівняно з масштабом поля означає замагніченість (розд. 3).
- **Ленгмюрівські хвилі** — поздовжні електростатичні хвилі в плазмі; у теплій плазмі їхня частота залежить від k (§ 2.3 (с. 61)).
- **Лоусона критерій** — умова синтезу в сучасному формулюванні: потрійний добуток $nT\tau_E \gtrsim 3 \times 10^{15}$ кеВ·с·см$^{-3}$ для D–T (розд. 10).

М

- **Магнітна гідродинаміка (МГД)** — опис плазми як однієї провідної рідини в магнітному полі; виводиться з двох рідин для процесів із $L \gg r_{Li}$ та $\omega \ll \omega_{ci}$ (розд. 5, с. 100).
- **Магнітне дзеркало** — область зростаючого поля, що відбиває частинки з достатнім пітч-кутом; частинки в *конусі втрат*, $\sin\theta < \sqrt{B_{\min}/B_{\max}}$, вилітають (§ 3.5 (с. 81)).
- **Магнітне число Рейнольдса** R_m — відношення конвекції поля до його дифузії, $R_m = 4\pi\sigma L v/c^2$; за $R_m \gg 1$ поле вморожене (розд. 5, с. 100).
- **Магнітний момент** $\mu = mv_\perp^2/2B$ — адіабатичний інваріант гірації; зберігається при повільній зміні поля (розд. 3).
- **Магнітний тиск і натяг** — дві частини магнітної сили: тиск $B^2/8\pi$ діє поперек поля, натяг вздовж викривлених силових ліній створює силу $B^2/4\pi R_c$ на одиницю об'єму (розд. 5, с. 100).

- **Магнітні поверхні** — вкладені поверхні, на яких $p = \text{const}$ і на яких лежать силові лінії рівноважного поля (§ 5.6 (с. 108)).
- **Магнітозвукові хвилі** — стисливі хвилі в замагніченій плазмі, відновлювальна сила яких — тиск плазми й магнітний тиск: швидка (тиски діють у фазі) і повільна (в протифазі) (§ 6.5 (с. 133)).
- **Максвеллівський розподіл** — рівноважний розподіл частинок за швидкостями, $f \propto \exp(-mv^2/2T)$; лише для нього визначена температура (розд. 7).

Н

- **Нейтральні частинки (атоми й молекули)** — незаряджені компоненти частково іонізованого газу, концентрація n_n (§ 0.1 (с. 14)).
- **Неокласичний перенос** — перенос у тороїдальній плазмі з урахуванням захоплених частинок: бананові орбіти збільшують крок блукання й перенос перевищує класичний (§ 9.8 (с. 189)).
- **Нерівноважна (двотемпературна) плазма** — плазма, у якій електрони й іони мають різні температури, $T_e \neq T_i$ (у газових розрядах зазвичай $T_e \gg T_i$) (§ 1.2 (с. 32)).
- **Нестійкість** — зростання малого збурення рівноваги, $\gamma > 0$; джерелом є вільна енергія рівноваги (розд. 8).
- **Низькотемпературна й високотемпературна плазма** — умовний поділ за температурою: $T \lesssim 10$ еВ ($\lesssim 10^5$ К), типово розряди, іоносфера; і $T \gtrsim 100$ еВ ($\gtrsim 10^6$ К), потрібна для термоядерного синтезу (§ 0.1 (с. 14)). Не плутати з «холодною» і «гарячою» плазмою в моделях (див. «Гаряча, тепла й холодна плазма»).

П

- **Параметр зв'язку** Γ — відношення кулонівської енергії сусідніх частинок до теплової, $\Gamma = e^2/(aT)$ (§ 1.6 (с. 42)).
- **Пашена закон** — залежність напруги пробою газу від добутку тиску на міжелектродну відстань pd; має мінімум (§ 11.2 (с. 208)).
- **Передшар** — слабко неквазінейтральна область перед дебаївським шаром, де іони прискорюються до швидкості Бома; падіння потенціалу в ній $\approx T_e/2e$ (§ 1.8 (с. 45)).
- **Пересполучення силових ліній** — зміна топології магнітного поля: у тонкому струмовому шарі, де вмороженість порушується скінченною провідністю чи іншими доданками закону Ома, лінії розриваються й зростаються по-новому; перетворює магнітну енергію на теплову й кінетичну (§ 5.10 (с. 114)).
- **Пінч-ефект** — стискання струмового каналу власним магнітним полем (паралельні струми притягуються); z-пінч і θ-пінч (розд. 9).
- **Пітч-кут** θ — кут між швидкістю частинки й напрямком магнітного поля; визначає, чи буде частинка відбита дзеркалом (§ 3.5 (с. 81)).

- **Плаваючий потенціал** φ_f — потенціал ізольованого тіла в плазмі, за якого потоки електронів та іонів на нього однакові; відносно плазми від'ємний (§ 1.8 (с. 45)).
- **Плазмова частота** ω_p — частота власних коливань електронів відносно іонів; задає час відновлення квазінейтральності (§ 1.3 (с. 34)).
- **Плазмові коливання** — коливання електронного компонента відносно нерухомих іонів на частоті ω_p (§ 1.3 (с. 34)).
- **Поздовжня хвиля** — хвиля, у якій $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$; у холодній плазмі $\varepsilon = 0$ (§ 2.3 (с. 61)).
- **Поперечна хвиля** — електромагнітна хвиля, у якій $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$; в плазмі $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$ (§ 2.2 (с. 59)).
- **Пробій газу** — перехід газу в провідний стан внаслідок лавинної іонізації електронами (механізм Таунсенда); напруга пробою — за законом Пашена (§ 11.2 (с. 208)).
- **Пробний заряд** — малий заряд, внесений у плазму, щоб дослідити її відгук; будь-яка частинка плазми для решти є пробною (§ 1.4 (с. 35)).

P

- **Резонанс хвилі** — частота (або напрям поширення), при якій показник заломлення $N \to \infty$: довжина хвилі $\to 0$, і хвиля віддає енергію частинкам. Приклади: ЕЦР ($\omega = \omega_{ce}$), ІЦР ($\omega = \omega_{ci}$), верхній гібридний ω_{UH} (§ 6.7 (с. 135)). Протилежне до відсікання.
- **Рівновага Саха** — рівновага між іонізацією та рекомбінацією, що задає ступінь іонізації залежно від T і n (§ 1.1 (с. 30)).
- **Роговського пояс** — рівномірно навита котушка, що охоплює струм; інтеграл її сигналу пропорційний струму (§ 5.12 (с. 122)).

C

- **Сильнозв'язана плазма** — плазма з $\Gamma \gtrsim 1$, ближча до рідини, ніж до газу (§ 1.6 (с. 42)).
- **Скін-шар** — поверхневий шар, у який електромагнітне поле проникає на глибину δ (§ 2.1 (с. 57), § 2.4 (с. 62)).
- **Слабоіонізована й повністю іонізована плазма** — розрізняють за ступенем іонізації $\alpha = n_e/(n_e + n_n)$: у слабоіонізованій нейтральних частинок багато, і заряджені частинки зіштовхуються здебільшого з ними; у повністю іонізованій ($\alpha \to 1$) домінують кулонівські зіткнення між зарядженими частинками (§ 1.1 (с. 30)).
- **Стеларатор** — тороїдальна пастка, де закрутку силових ліній створюють зовнішні гвинтові котушки, а струму в плазмі нема (§ 9.7 (с. 188)).

T

- **Токамак** — тороїдальна магнітна камера для утримання гаря-

чої плазми струмом у самій плазмі та зовнішніми котушками (§ 0.1 (с. 14)).

- **Томсонівське розсіяння** — розсіяння лазерного випромінювання на вільних електронах; ширина спектра дає T_e, інтенсивність — n_e (§ 7.10 (с. 159)).
- **Тройона межа** — емпірична межа $\beta_{\max}[\%] = \beta_N\, I[\text{МА}]/(a[\text{м}]\, B[\text{Тл}])$, $\beta_N \approx 2{,}8$, за якою токамак втрачає стійкість за тиском (§ 9.9 (с. 191)).

Ф

- **Функція розподілу** $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — густина частинок у фазовому просторі; з її моментів отримують густину, швидкість і температуру (розд. 7).

Ц

- **Циклотронна частота** $\omega_c = |q|B/mc$ — частота обертання частинки навколо силової лінії (розд. 3).

Ч

- **Частота відсікання** — частота, нижче якої хвиля в плазмі не поширюється; для електромагнітних хвиль це ω_p (§ 2.2 (с. 59)). У замагніченій плазмі відсікань кілька, зокрема ω_R і ω_L (§ 6.7 (с. 135)).
- **Частота зіткнень** ν — ефективна частота, з якою електрон втрачає імпульс унаслідок зіткнень (§ 2.4 (с. 62)).

Ш

- **Шар (біля стінки, зонда)** — область завтовшки $\sim \lambda_D$, де квазінейтральність порушена (§ 1.8 (с. 45)).
- **Шуба** — образна назва дебаївської хмари заряду протилежного знака навколо частинки (§ 1.4 (с. 35)). Не стандартний термін.

Література

Основні підручники та посібники

1. *Анісімов І. О.* Фізика плазми. Конспект лекцій. — Київ : КНУ ім. Тараса Шевченка, 2018. — 229 с.
   Український конспект лекцій із фізики плазми: класифікація, кінетичний і гідродинамічний описи, утримання, хвилі, діагностика.
2. *Загородній А. Г.*, *Засенко В. І.* Вступ до кінетичної теорії плазми. — Київ : Академперіодика, 2006. — ISBN 966-360-043-1.
   Навчальний посібник із кінетичної теорії плазми: кінетичні рівняння, зіткнення, флуктуації. Українською мовою; відповідає розділам про кінетику й зіткнення.
3. *Ситенко О. Г.*, *Мальнєв В. М.* Основи теорії плазми. — Київ : Наукова думка, 1996. — ISBN 5-12-003664-9.
   Українське викладення теорії плазми: кінетичний і гідродинамічний описи, хвилі та нестійкості в плазмі. Підручник для студентів-фізиків.

Допоміжні підручники та посібники

4. *Bellan P. M.* Fundamentals of Plasma Physics. — Cambridge : Cambridge University Press, 2006. — ISBN 978-0-521-82116-2. — DOI: 10.1017/CBO9780511807183.
   Підручник для старших курсів з акцентом на хвилі, МГД і самоорганізацію плазми; виклад ведеться через фізичну інтуїцію з подальшим формальним виведенням.
5. *Bittencourt J. A.* Fundamentals of Plasma Physics. — 3-е вид. — New York : Springer, 2004. — ISBN 978-0-387-20975-3.
   Докладний підручник із широким охопленням: рухи частинок, кінетична теорія й рідинні моделі, хвилі, зіткнення, дифузія, нестійкості; багато розв'язаних прикладів і задач.
6. *Boyd T. J. M.*, *Sanderson J. J.* The Physics of Plasmas. — Cambridge : Cambridge University Press, 2003. — ISBN 978-0-521-45912-9.
   Підручник для старших курсів: кінетична теорія і її зв'язок із рідинним описом, хвилі, нелінійні явища, зіткнення, розряди. Помірно математизований.

7. *Chen F. F.* Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. — 3-е вид. — Cham : Springer, 2016. — ISBN 978-3-319-22308-7. — DOI: 10.1007/978-3-319-22309-4.
   Класичний вступний підручник: рухи частинок, плазма як рідина, хвилі, дифузія, рівновага й нестійкості, кінетична теорія, нелінійні ефекти; остання частина — керований синтез. Найкращий перший текст за цією книгою.

8. *Chen F. F.*, *Chang J. P.* Lecture Notes on Principles of Plasma Processing. — New York : Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003. — ISBN 978-0-306-47497-2.
   Конспект лекцій із фізики плазмових технологій: основи плазми, розряди, шари, травлення й осадження. Короткий і практичний, доповнює Lieberman та Lichtenberg.

9. *Freidberg J. P.* Plasma Physics and Fusion Energy. — Cambridge : Cambridge University Press, 2007. — ISBN 978-0-521-85107-7. — DOI: 10.1017/CBO9780511755705.
   Підручник, зосереджений на керованому синтезі: МГД-рівновага і стійкість, транспорт, нагрів, критерій Лоусона, концепції реакторів. Дає інженерний контекст для розд. «Керований термоядерний синтез».

10. *Goldston R. J.*, *Rutherford P. H.* Introduction to Plasma Physics. — Bristol : Institute of Physics Publishing, 1995. — ISBN 978-0-7503-0183-1.
    Стислий вступ до фізики плазми з орієнтацією на керований синтез: орбіти, рівновага, транспорт, нестійкості, хвилі. Короткий, зручний для першого знайомства.

11. *Gurnett D. A.*, *Bhattacharjee A.* Introduction to Plasma Physics: With Space, Laboratory and Astrophysical Applications. — 2-е вид. — Cambridge : Cambridge University Press, 2017. — ISBN 978-1-107-02737-4. — DOI: 10.1017/9781139226059.
    Сучасний підручник з акцентом на космічну й астрофізичну плазму поряд із лабораторною: рух частинок, рідинний і кінетичний описи, хвилі, нестійкості, зіткнення. Багато прикладів із магнітосфери й сонячного вітру.

12. *Hazeltine R. D.*, *Waelbroeck F. L.* The Framework of Plasma Physics. — Boulder : Westview Press, 2004. — ISBN 978-0-7382-0047-7.
    Нестандартна «структурна» подача фізики плазми: єдина логіка від кінетичного рівняння до рідинних і МГД-моделей з оцінкою меж застосовності кожної. Корисна для розд. про масштаби й вибір моделі.

13. *Krall N. A.*, *Trivelpiece A. W.* Principles of Plasma Physics. — New York : McGraw-Hill, 1973. — ISBN 978-0-070-35346-6.

Класичний підручник: теорія орбіт, кінетична теорія, рідинні моделі, хвилі та нестійкості. Багато виведень і задач, що вимагають підготовки.

14. *Kulsrud R. M.* Plasma Physics for Astrophysics. — Princeton : Princeton University Press, 2005. — ISBN 978-0-691-12073-7.
Підручник для астрофізиків: МГД, кінетична теорія, хвилі, нестійкості, пересполучення силових ліній; висока математична строгість при астрофізичній мотивації.

15. *Lieberman M. A.*, *Lichtenberg A. J.* Principles of Plasma Discharges and Materials Processing. — 2-е вид. — Hoboken, NJ : Wiley, 2005. — ISBN 978-0-471-72001-0. — DOI: 10.1002/0471724254.
Стандартний підручник з фізики низькотемпературної плазми та плазмових технологій: розряди, прошарки, нагрів, хімія, травлення. Джерело для розд. про розряди.

16. *Nicholson D. R.* Introduction to Plasma Theory. — New York : Wiley, 1983. — ISBN 978-0-471-09045-8.
Підручник теорії плазми: кінетичний опис, рівняння Власова та Фоккера–Планка, лінійні хвилі, затухання Ландау. Побудований від кінетики до рідинних наближень.

17. *Priest E.*, *Forbes T.* Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications. — Cambridge University Press, 2000. — ISBN 0-521-48179-1.
Монографія про пересполучення: моделі Світа–Паркера й Петчека, швидке пересполучення, застосування до Сонця й магнітосфери.

18. *Raizer Y. P.* Gas Discharge Physics. — Berlin : Springer, 1991. — ISBN 978-3-540-19462-0.
Монографія з фізики газового розряду: пробій, тліючий і дуговий розряди, іскра, корона, вакуумний пробій. Класичне джерело формул для розд. про розряд.

19. *Stix T. H.* Waves in Plasmas. — New York : American Institute of Physics, 1992. — ISBN 978-0-88318-859-0.
Фундаментальна монографія про хвилі в плазмі: холодна, тепла й гаряча плазма, дисперсійні співвідношення, резонанси, затухання, нагрів хвилями. Довідник для розділів про хвилі.

Джерела фактів і результатів

20. *Klimchuk J. A.* Key aspects of coronal heating // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 2015. — Т. 373, № 2042. — С. 20140256. — DOI: 10.1098/rsta.2014.0256.

Оглядова стаття про нагрів сонячної корони: спостережні обмеження, нанофлеєри, хвильовий нагрів. Приклад застосування теорії плазми в астрофізиці.

21. *Lawrence Livermore National Laboratory*. Achieving Fusion Ignition. Сторінка Ліверморської національної лабораторії про запалювання на NIF: хронологія пострілів від грудня 2022 р. (3,15 МДж) до рекордних 8,6 МДж при $G \approx 4{,}1$ у квітні 2025 р.

22. *EUROfusion*. JET's final fusion campaigns set a new energy record and hand ITER a legacy of irreplaceable data. — 2024. Підсумок останніх D–T-кампаній JET: рекорд 69 МДж за ~ 5 с (грудень 2023 р.), що перевищив 59 МДж 2021 р., хоча $Q < 1$; накопичені дані передаються ITER.

23. *ITER Organization*. Baseline press conference summary. — 2024. Резюме пресконференції ITER (липень 2024 р.) про нову базову лінію: початок дослідної фази 2034 р., повна магнітна енергія 2036 р., D–T-операції 2039 р.; додаткові витрати близько 5 млрд євро.

24. *Gary G. A.* Plasma beta above a solar active region: rethinking the paradigm // Solar Physics. — 2001. — Т. 203, № 1. — С. 71—86. — DOI: 10.1023/A:1012722021820. Профіль плазмового параметра β від фотосфери до корони над активною областю.

25. *Kaspi V. M.*, *Beloborodov A. M.* Magnetars // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 2017. — Т. 55. — С. 261—301. — DOI: 10.1146/annurev-astro-081915-023329. Огляд про магнетари: магнітні поля нейтронних зірок, порівняння зі звичайними радіопульсарами.

26. *Roberts P. H.*, *King E. M.* On the genesis of the Earth's magnetism // Reports on Progress in Physics. — 2013. — Т. 76, № 9. — С. 096801. — DOI: 10.1088/0034-4885/76/9/096801. Огляд теорії геодинамо: омічне загасання поля й генерація в рідкому ядрі Землі.

27. *Parker E. N.* Sweet's mechanism for merging magnetic fields in conducting fluids // Journal of Geophysical Research. — 1957. — Т. 62, № 4. — С. 509—520. — DOI: 10.1029/JZ062i004p00509. Першоджерело моделі пересполучення Світа–Паркера: оцінка швидкості через товщину дифузійного шару.

28. *Loureiro N. F.*, *Schekochihin A. A.*, *Cowley S. C.* Instability of current sheets and formation of plasmoid chains // Physics of Plasmas. — 2007. — Т. 14, № 10. — С. 100703. — DOI: 10.1063/1.2783986. Плазмоїдна нестійкість струмового шару за великого числа Лундквіста: шар розпадається на ланцюжок острівців.

29. *Yamada M.*, *Kulsrud R.*, *Ji H.* Magnetic reconnection // Reviews of Modern Physics. — 2010. — Т. 82, № 1. — С. 603—664. — DOI: 10.1103/RevModPhys.82.603.
Оглядова стаття про пересполучення: теорія, лабораторні експерименти, космічні спостереження; швидкість пересполучення в МГД і холлівському режимах.

30. *Withbroe G. L.*, *Noyes R. W.* Mass and energy flow in the solar chromosphere and corona // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 1977. — Т. 15. — С. 363—387. — DOI: 10.1146/annurev.aa.15.090177.002051.
Класичний огляд: потоки енергії, потрібні для підтримання хромосфери й корони (спокійної, активних областей, корональних дір).

31. *Ballegooijen A. A. van*, *Asgari-Targhi M.*, *Voss A.* The heating of solar coronal loops by Alfvén wave turbulence // The Astrophysical Journal. — 2017. — Т. 849. — С. 46. — DOI: 10.3847/1538-4357/aa9118.
Модель нагріву петель сонячної корони турбулентністю альвенівських хвиль; демонструє, як хвильові процеси з розділу про МГД-хвилі забезпечують нагрів плазми.

32. *Walén C.* On the Theory of Sunspots // Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. — 1944. — Vol. 30A, no. 15.
Праця К. Валена (Уппсала), на яку посилаються як на джерело співвідношення Валена: зв'язку між збуреннями швидкості й магнітного поля в альвенівській хвилі (рівнорозподіл енергії). Первинне джерело; не читалося, атрибуція за оглядом Рассела (2018) і каталожним записом.

33. *Prater R.* Heating and current drive by electron cyclotron waves // Physics of Plasmas. — 2004. — Vol. 11, no. 5. — P. 2349–2376. — DOI: 10.1063/1.1690762.
Оглядова стаття про ЕЦ-нагрів і генерацію струму електронними циклотронними хвилями в токамаках: фізична модель і її порівняння з експериментом. Опора для твердження, що мікрохвильовий нагрів на ЕЦР є перевіреним методом; відкрито лише анотацію, статтю повністю не читано.

34. Electron cyclotron emission and absorption in fusion plasmas / M. Bornatici [et al.] // Nuclear Fusion. — 1983. — Vol. 23, no. 9. — P. 1153–1257. — DOI: 10.1088/0029-5515/23/9/005.
Класичний огляд (понад 100 сторінок) випромінювання й поглинання електронних циклотронних хвиль у термоядерній плазмі, зокрема ЕЦ-нагріву й діагностики за ECE. Джерело для поглинання *O*- і *X*-мод на гармоніках; перевірено лише анотацію й цитування в пізніших роботах, огляд повністю не вивчався.

35. *Bhatnagar P. L.*, *Gross E. P.*, *Krook M.* A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Physical Review. — 1954. — Vol. 94, no. 3. — P. 511–525. — DOI: 10.1103/PhysRev.94.511.
Першоджерело моделі БГК: інтеграл зіткнень замінено релаксацією до місцевого максвеллівського розподілу з частотою ν.

36. *EUROfusion*. Wendelstein 7-X sets World record for long plasma triple product. — 2025.
Повідомлення про рекорд стелларатора W7-X (травень 2025 р.): найвищий потрійний добуток для розрядів понад 30 с, 43 с із подачею заморожених гідрогенних пелет. Результат на момент повідомлення ще не пройшов рецензування.

37. *CEA-IRFM*. WEST sets a new plasma duration record. — 2025.
Повідомлення CEA про рекордний імпульс токамака WEST: 1337 с (лютий 2025 р.) при потужності нагріву 2 МВт та енергії 2,6 ГДж; перевищив попередній рекорд EAST.

38. *Interesting Engineering*. China's artificial sun advances.
Науково-популярний огляд китайських проєктів: рекорд EAST (1066 с у H-режимі, січень 2025 р.) і спорудження токамака BEST у Хефеї (завершення до кінця 2027 р.). Вторинне джерело.

39. *Commonwealth Fusion Systems*. SPARC progress, DOE Milestone approvals reflect CFS power plant maturity.
Блог компанії CFS про хід спорудження токамака SPARC на високотемпературних надпровідних магнітах; мета $Q > 1$ у 2027 р. Це заява розробника, а не незалежне підтвердження.

Предметний покажчик

Жирним виділено сторінку, де термін означено або розібрано докладно; звичайним шрифтом — місця, де його лише вжито.

А

Автозміщення, **214**
Адіабатичний інваріант, **78**
Акреційний диск, **17**
Актинометрія, **217**
Альвена хвиля, 107, **132**
Аналізатор енергій із гальмівним потенціалом, **85**

Б

Безрозмірні параметри МГД, **226**
Беннета співвідношення, **185**
Бета плазми, **109**
Бланкет, **200**
Бома критерій, **49**
Бома–Гросса співвідношення, 61

В

Випромінювання
  гальмівне, **198**
  циклотронне, **198**
Високочастотні хвилі в замагніченій плазмі, **135**
Відсікання частота, **59**
Вістлер (свистяча хвиля), **137**
Вітер
  сонячний, **20**
Власова рівняння, **146**
  лінеаризація, 151
Вмороженість магнітного поля, **112**
Втікаючі електрони, **94**
Вторинної емісії коефіцієнт, **209**

Г

Газ
  вироджений, **27**
Гамова фактор, **195**
Гібридні резонанси
  верхній, **137**
  нижній, **137**
Гілка дисперсійного рівняння, **59**
Гірація, **72**
Глобальна модель розряду, **212**

Д

Дворідинний опис, **101**
Дебая довжина, **36**
Дебая сфера, **39**
Джерело плазми
  геліконне, **215**
  ЕЦР, **215**
Джет, **18**
Динамо, **114**
Диполь Землі, 83
Дисперсії закон, **59**
Дисперсійне рівняння, **167**
Дифузія

амбіполярна, **95**
класична, **73**
поперек магнітного поля, **96**
Діагностика плазми
аналізатор енергій, 85
ВЧ-зонди, 217
допплерівське розширення, 97
електронна температура з опору, 96
електронно-циклотронне випромінювання, 85
інтерферометрія, 67
котушки Мірнова, 178
м'який рентген, 178
магнітна реконструкція рівноваги, 191
магнітні виміри, 122
масштаб і метод, 228
нейтронна діагностика, 203
оптична емісія, 217
поляриметрія, 139
рефлектометрія, 67
томсонівське розсіяння, 159
штарківське розширення, 97
Діамагнетизм
ларморівського кільця, 80
плазми, **111**
Діамагнітна петля, **122**
Діамагнітний дрейф, **119**
Діелектрична проникність плазми, **57**
Допплерівське розширення ліній, **97**
Драйсера поле, **94**
Дрейф
гравітаційний, 76
градієнтний, **75**
електричний (в схрещених полях), **73**
кривизни (відцентровий), **75**
поляризаційний, **77**
Дрейфове наближення, **73**
Дрейфові хвилі, **176**
Дуга, **211**

Е

Екранування
дебаївське, **35**
у виродженому газі, 45
Електронно-циклотронне випромінювання (ECE), **85**
Енергетичний принцип, **175**

З

Замикання системи рівнянь, **106**
Запалювання, **197**
Запас стійкості, **188**
Захоплені частинки, **189**
Захоплення частинок хвилею, 158
Звичайна хвиля (O-мода), **138**
Звукова хвиля, **128**
Зіткнення
кулонівські, **89**
Зонд Ленгмюра, **45**
подвійний, **51**

І

Ієрархія моментів, **149**
Індукції рівняння, **112**
Інерційний термоядерний синтез, **202**
Інтерферометр, **67**
Іонізація
електронним ударом, **207**
ступінь, 30
Іонно-звукова хвиля, **128**
Іоносонда, **68**
Іоносфера, 21, **65**

К

Катодне падіння, **209**
Квазінейтральність, **33**
Кінетичне рівняння, **146**

Колективність, **14**
Константа швидкості іонізації, **208**
Конус втрат, **81**
Корона Сонця, **19**
Космічна погода, **21**
Критична концентрація, **64**
Кросовер, **31**
Кулонівський бар'єр, **195**
Кулонівський логарифм, **90**

Л

Ландау загасання, **155**
Ларморівський радіус, **72**
Ленгмюрівські коливання, 34
Ленгмюрівські хвилі, **61**
Ліва хвиля (L-мода), **137**
Лоусона критерій, **197**

М

Магнетрон, **216**
Магнітна гідродинаміка (МГД), **102**
  лінеаризована, 130
Магнітне дзеркало, **81**, 182
Магнітний момент, **78**
Магнітні зонди, **123**
Магнітні поверхні, **108**
Магнітозвукові хвилі, **133**
  повільна, 131
  швидка, 131
Магнітосфера, **20**
Максвелла розподіл, **147**
Масштаби
  просторові та часові, **221**
Мірнова котушки, **178**
Модель плазми
  вибір за масштабами, **223**
  межі застосовності, 226
Моменти функції розподілу, **145**

Н

Незвичайна хвиля (X-мода), **138**
Неокласичний перенос, **189**
Нестійкість, **165**
  анізотропної плазми, 174
  двопотокова, **173**
  жолобкова, **172**
  пучкова, **173**

О

Ома закон
  узагальнений, **103**

П

Параметр зв'язку, **42**
Параметр розсіяння, **159**
Пастка
  відкрита, **182**
Пашена закон, **209**
Перенос
  аномальний, **176**
Пересполучення силових ліній, **114**
Перетяжка, **170**
Підсилення коефіцієнт, **200**
Пінч
  нестійкість перетяжки, 170
  нестійкості, 186
Пінч-ефект, **183**
Пітч-кут, **81**
Плазма, **14**
  високотемпературна, **16**
  двотемпературна, **33**
  замагнічена, **73**
  низькотемпературна, **15**, 207
  повністю іонізована, **14**
  сильнозв'язана, **42**
  слабкозв'язана, **42**
  слабоіонізована, **14**
  холодна, 57
Плазмова обробка матеріалів, **215**
Плазмова частота, **34**
Плазмотрон, **22**

Подовжній інваріант, **82**
Позитивний стовп, **210**
Права хвиля (R-мода), **137**
Пробій газу, **208**
Провідність плазми, **92**

Р

Радіаційні пояси, **20**
Радіаційні пояси Землі, **83**
Радіозв'язок далекий, 65
Режим
  зіткнювальний і
    беззіткнювальний, **222**
Резонанс хвиля–частинка, **153**
Рейнольдса магнітне число, **112**
Рекомбінація космологічна, **16**
Релея–Тейлора нестійкість, **171**
Реліктове випромінювання, **16**
Рефлектометр, **67**
Рівновага
  магнітогідродинамічна, **108**
Роговського пояс, **122**
Розряд
  ємнісний, **214**
  індуктивний, **214**
  тліючий, **209**
Розряд газовий, **207**
Рух зарядженої частинки
  в однорідному полі, 72

С

Саха формула, **30**
Світа–Паркера модель, **115**
Скін-довжина, **60**
Стабілізація пінча поздовжнім
    полем, 187
Стелларатор, **189**
Стікса позначення (S, D, P, R, L), **136**
Стример, **209**

Т

Таунсенда механізм, **208**
Температура
  електронна та іонна, 32
Теплопровідність плазми, **94**
Термоядерні реакції, **195**
Тета-пінч, **185**
Токамак, **188**
Томаса–Фермі довжина, **45**
Томсонівське розсіяння, **159**
Травлення
  іонно-стимульоване, **216**
Травлення плазмове, **24**
Тройона межа, **191**
Тунелювання, **195**

У

Ударна хвиля, 20
Утримання плазми
  інерційне, **199**
  магнітне, **199**

Ф

Фарадея обертання, **139**
Фермі прискорення, **83**
Фрідріхса діаграма, **133**
Функція розподілу, **144**

Х

Хвилі
  відбиття від плазми, **64**
  поглинання зіткненнями, **62**
Холла член, **104**

Ц

Циклотронна частота, **72**
Циклотронний резонанс
  електронний, **137**
  іонний, **137**

Ч

Чайлда–Ленгмюра закон, 45, **212**

Ш

Шар біля стінки, **45**, 211
Шафранова зсув, **191**
Штарківське розширення ліній, **97**

Пономаренко Сергій Миколайович

Елементи фізики плазми

Комп'ютерне верстання в системі LaTeX 2ε С. М. Пономаренко

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р.
просп. Берестейський, 37, м. Київ, 03056